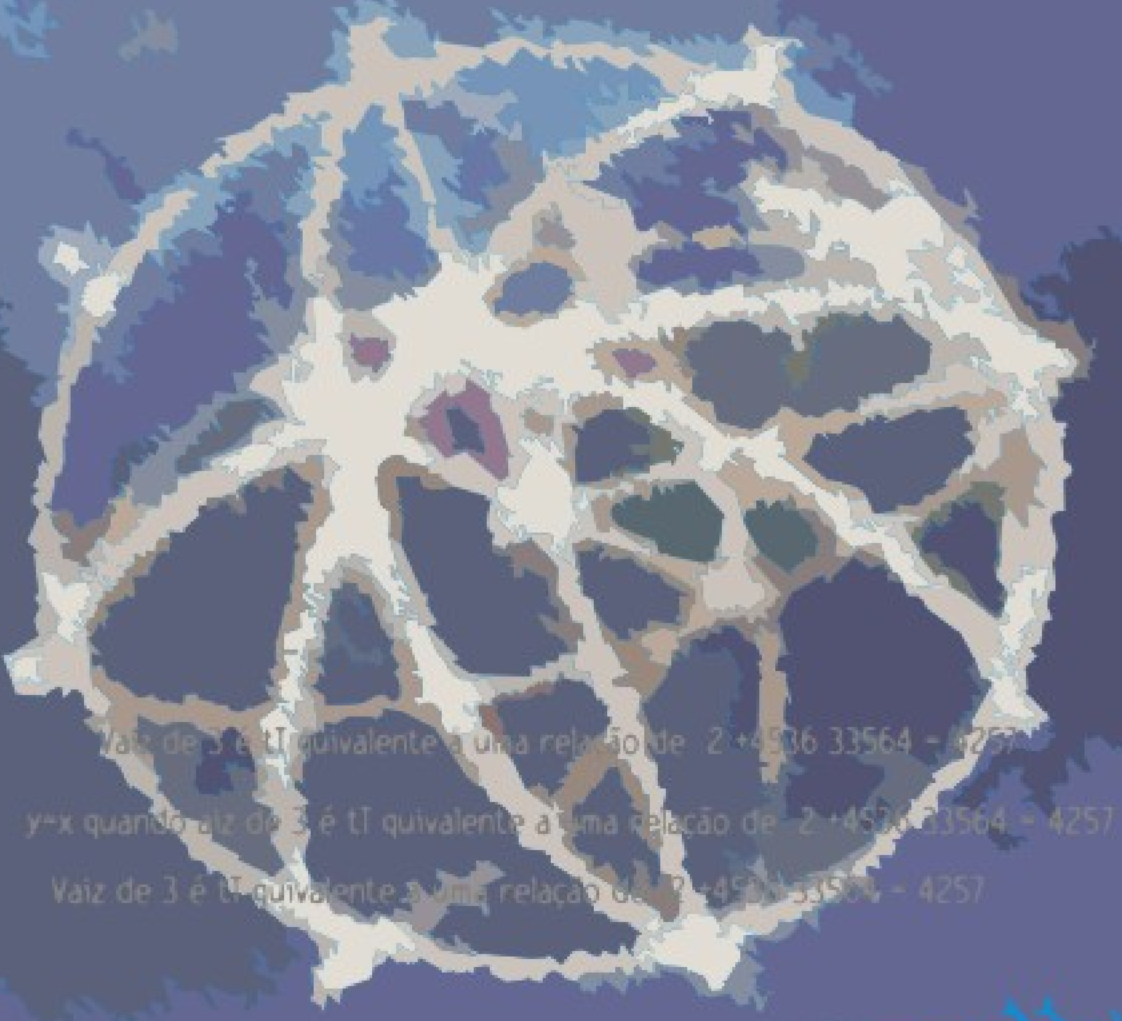
ROBINSON TENÓRIO



A RAZÃO E O TEMPO

MATEMÁTICA NA HISTÓRIA

EDUFBA

A RAZÃO E O TEMPO

Robinson Moreira Tenório

A RAZÃO E O TEMPO

trilhas da matemática na teia da história

EDUFBA
Salvador 2009

Direitos de edição cedidos à
Editora da Universidade Federal da Bahia - EDUFBA
Feito o depósito legal.

Normalização
Sônia Vieira

Editoração Eletrônica e arte-final da Capa
Rodrigo Oyarzábal Schlabitz

Layout da Capa
Alberto Batinga Pinheiro

Biblioteca Anísio Teixeira – Faculdade de Educação da UFBA

T312 Tenório, Robinson Moreira.

A razão e o tempo : trilhas da matemática na teia da história / Robinson Moreira Tenório. – Salvador : EDUFBA, 2009.

210 p. : il.

ISBN 978-85-232-0611-6

1. Matemática – História. I. Tenório, Robinson Moreira. II. Título.

CDD 510.9 – 22. ed.

EDUFBA
Rua Barão de Jeremoabo, s/n - *Campus* de Ondina,
40170-115 Salvador-BA
Tel/fax: (71) 3283-6164
www.edufba.ufba.br
edufba@ufba.br

Para Záyda, Camila, Laysa e Lara

Quatro Deusas

Que presidem meu Tempo

Quatro Musas

Que inspiram minha Razão.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A alfabetização matemática é um dos mais graves problemas educacionais no Brasil, pois sua efetivação esbarra não só no processo de evasão e repetência, que exclui muitas crianças da escola colocando-as à margem do conhecimento sistematizado, mas esbarra também em um outro mal "congênito": mesmo os que percorrem os diversos graus de ensino, alguns da educação básica à superior, não podem ser considerados alfabetizados no amplo sentido do termo, já que a compreensão do conhecimento matemático se dá, quando muito, de maneira meramente técnica e formal, incapaz de propiciar uma leitura significativa das relações que pululam no mundo objetivo, mundo este de onde emerge o próprio conhecimento matemático.

Como evitar este "problema ao quadrado"? É evidente, por um lado, que questões sociopolíticas e econômicas estão entranhadas no processo de evasão e repetência, de forma que a alteração deste quadro exige atuação neste mesmo processo.

Mas, por outro lado, como tornar de imediato a ação pedagógica mais eficaz relativamente ao conhecimento matemático?

Felizmente para o ensino, o trabalho crítico de muitos educadores, sobremaneira aqueles afinados com a Pedagogia Libertadora – animados especialmente pelos estudos e pela prática do professor Paulo Freire – tem contribuído para disseminar a compreensão da importância da atividade de problematização e contextualização dos temas/questões levantados em sala de aula (ou fora dela).

Assim, também no ensino da matemática, os problemas postos ou surgidos em sala de aula têm apresentado a cor do contexto em que estão inseridos e, dessa forma, tal ensino passa a apresentar uma nova dimensão, isto é, a dimensão do espaço em que está imerso, do contexto em que os educandos estão inseridos, das questões que lhes dizem respeito, em suma...o "onde estamos".

A consciência do ponto de partida é imprescindível, e aí está sua importância, para se começar a caminhada para o "aonde queremos chegar" em termos de ensino da matemática: a compreensão dos significados sociais do conhecimento matemático – do ábaco ao computador eletrônico, do fio de prumo ao raio-laser, do modelo ptolomaico à teoria da relatividade, do determinismo mecanicista às multifacetadas relações do pensamento holístico e ecológico.

Dessa forma, distinguimos dois pontos fundamentais e bem definidos: o ponto de partida e o ponto de chegada. Qual o melhor caminho entre eles? Ora, certamente o caminho já traçado pelos pés e mãos de milhões de homens e mulheres em muitas e muitas gerações de trabalho, socialização e humanização: o caminho da história. Vejamos alguns destes caminhos.

No primeiro texto, destacamos a importância do conhecimento da história para a compreensão da Matemática e seus significados sociais. Também destacamos o inverso, ou seja, a importância da Matemática – seu processo de desenvolvimento ligado às condições objetivas de vida – para uma compreensão de vários momentos históricos.

No texto seguinte, o construtivismo – atualmente metáfora educacional dominante – é discutido no ensino da Matemática; a compreensão do caráter social da construção do conhecimento matemático concorre para a consideração da história da matemática como instrumento didático relevante.

Com o terceiro texto, procuramos mostrar como a Geometria Euclidiana se constituiu no mundo clássico a partir de questões arquitetônicas, agrícolas e astronômicas, ganhando uma autonomia própria que permitiu o surgimento de um espectro de problemas específicos. Isto originou um problema teórico clássico, centrado no quinto postulado de Euclides, o qual possibitou a criação, já na modernidade, das Geometrias não-euclidianas – tratadas no Capítulo Quatro, escrito em coautoria com André Luis Mattedi Dias.

No quinto texto, *Com o olho na quarta dimensão*, discutimos a noção de espaço.

Ainda tratando da noção de espaço, nos artigos sexto e sétimo, apresentamos uma introdução à topologia, explicitando propriedades como "vizinhança", "estar entre" e "interioridade/ exterioridade" para chegar aos "objetos" topológicos, tomando como simbolismo da topologia a superfície de Möebius.

No próximo texto, o de número oito, intitulado *Intimidade entre a Física e a Geometria*, escrito a quatro mãos, em coautoria com Nildon Pitombo, se apresenta, em caso concreto, a unidade entre as estruturas matemáticas e a natureza, ocorrida após a revolução científica galileana, com o uso da linguagem e do conhecimento matemático para descrever e explicar os fenômenos fisicos, em particular, e naturais, de uma maneira geral.

A seguir, no nono ensaio *Contradição em quatro estações*, a noção de **contradição** é examinada em quatro diferentes teorias. A contradição se entranha nas significações imaginárias sociais e, por isso, a noção de contradição necessita de um outro tratamento que o formal (axiomas, deduções, completude), algo que escapa à formalização, seja ela debitária da lógica clássica, da teoria dos tipos ou das lógicas paraconsistentes.

No texto de número dez, denominado *Os arquétipos computacionais de Turing e Post: história, epistemologia e ensino,* apresentamos o modelo conceitual, ou precursor simbólico, do computador eletrônico atual, uma espécie de computador de papel, surgido em 1936, em dois trabalhos independentes, de Turing e de Post. Sem dúvida, estavam colocadas historicamente as condições de produção deste importante dispositivo que estabelece as possibilidades e os limites da computablidade.

No texto *A analogia e a relação analógico-digital*, o de número onze, incialmente apresentamos o contexto de origem da relação analógico-digital, destacando a noção de analogia como substrato para a compreensão das diversas acepções em que é utilizado o termo analógico. Na acepção técnica, de grande importância na informática, esse termo se articula com o termo digital, formando um par singularmente aplicado aos dispositivos de cálculo e controle.

Uma analogia é uma comparação entre dois domínios diferentes, que permite transferir certas relações de um domínio para o outro. Assim, as analogias, e em geral o pensamento analógico, são uma poderosa ferramenta de produção de novos significados, tendo um papel fundamental não só na poesia, mas também nas ciências, na construção dos modelos, e na educação, na transposição didática. No texto de número doze, discutimos o papel da analogia tanto na construção de um modelo de computador importante na teoria computacional e na construção de computadores reais, quanto no ensino do próprio modelo referido.

A seguir, no Capítulo Treze, discutimos o papel e a importância da Estatística para a coleta, a apresentação e a descrição de informações e indicadores.

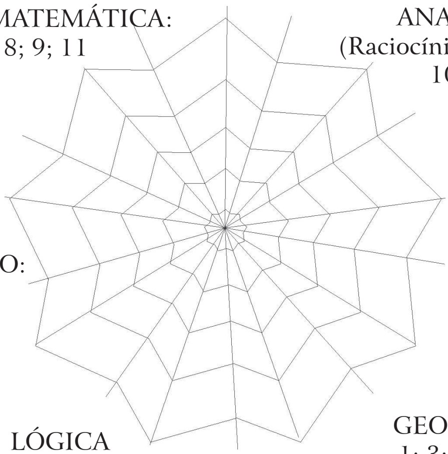
O método estatístico tem várias etapas: a coleta, a crítica dos dados, a categorização e síntese das informações e sua respectiva apresentação em tabelas e gráficos, a definição desses dados e a sua análise estatística. Particularmente, neste texto, trataremos da apresentação e da comunicação desses dados, ou melhor, colocar-nos-emos do lado de leitores ou usuários dessas informações produzidas pelos especialistas. Selecionamos, assim, alguns gráficos e tabelas, disponíveis em *site* do Governo do Estado da Bahia, relativos à Educação na Bahia, e, a partir destes casos concretos, empreenderemos a leitura dessas tabelas e gráficos.

À guisa de conclusão, no ensaio final discutimos a resolução de problemas através de pesquisa matemática. Uma situação-problema é uma situação real que faz parte do nosso universo existencial. Sempre complexa, sua solução demanda uma delimitação específica, resultando em um objeto simbólico chamado problema. A construção de um problema, ou seja, de uma pergunta relevante e exequível, é, pelo menos, tão importante quanto sua própria solução. Existem muitos tipos de problemas, dependendo da forma de delimitação, e, entre eles, estão os problemas matemáticos, aqueles que utilizam teoria matemática para a sua solução. Muitos problemas matemáticos são apresentados sem a situação-problema que os gerou, tornando-os artificiais, descontextualizados. Discutiremos a pesquisa matemática como uma ferramenta para, a partir de situações problemas, reais e concretas, construir e solucionar problemas matemáticos. A história está repleta de exemplos, alguns dos quais apresentamos com certo detalhamento neste livro.

Os textos aqui apresentados trazem ideias, conceitos, proposições, que se articulam formando uma rede, mostrando diversos pontos de interesecção, de contato entre dois ou mais textos, e na qual diversos caminhos distintos e alternativos podem ser percorridos de um a outro conceito, de uma a outra proposição. Como as redes em geral, a configuração resultante permite muitos percursos diferentes, permite navegar nos textos tendo diferentes pontos de partida, diferentes portos de chegada.

Considerando esta estrutura em rede, sugerimos alguns percursos temáticos pelo texto, como por exemplo:

TRILHAS POSSÍVEIS NA TEIA DOS CAPÍTULOS...



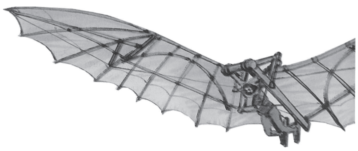
Outros percursos são possíveis. Certamente, cada leitor encontrará o seu.

Este livro enfatiza a imersão do conhecimento matemático na teia da História, destacando, na relação entre estruturas matemáticas e o conhecimento em geral, a compreensão dos significados sociais. Por isso, os textos selecionados para esta coletânea são trechos do caminho da matemática na história, e têm em comum a intenção de, ao serem percorridos na escola por professores e alunos, contribuir para uma pedagogia crítica do ensino da Matemática.

O mundo aparece por inteiro e se desnuda na sua história que, seguramente, não é caminho certo, nem torto, mas, simplesmente, um caminho.

Robinson Tenório

Capítulo Um



IMPORTÂNCIA DA HISTÓRIA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

A matemática, como qualquer outra ciência, é resultado de múltiplas e complexas determinações que ocorrem nas sociedades humanas e na sua história. Em outras palavras, a matemática vai sendo produzida ou construída de forma intimamente articulada com a produção das condições materiais e culturais da existência do homem.

É assim que as necessidades da existência do homem levam-no a criar determinados conhecimentos matemáticos, os quais, uma vez criados e incorporados ao seu acervo de conhecimentos, juntamente com outros fatores, determinarão as novas condições de produção do conhecimento, em geral, e do conhecimento matemático, em particular.

Dessa forma, a matemática contém não só as dimensões formal, lógica e racional, usualmente destacadas e percebidas, mas também as dimensões material, intuitiva e social, já que é produzida na história. Portanto, a Matemática é histórica.

O conhecimento da história é fundamental para a abordagem de determinados temas, aí incluída a ciência Matemática, e, inversamente o conhecimento da Matemática – seu processo de desenvolvimento ligado às condições objetivas de vida – é importante para uma adequada compreensão de vários momentos históricos.

Daí vem a importância de se considerar a história da matemática para o ensino da matemática.

Mas **como** a história da matemática deve ser considerada?

Alguns exemplos podem ser mais *esclarecedores.*

MEDIDA DE COMPRIMENTOS

Parte do que é dito neste exemplo baseia-se em Machado, a quem, mais que creditar, agradecemos; continuamos, outrossim, respondendo a todas as partes do texto, como não poderia deixar de ser.

Medição é um problema matemático. Tanto que existe um campo da mesma chamado Teoria da Medida.

E medir comprimentos é uma necessidade histórica do homem: na arquitetura, na engenharia, na agricultura; desde os tempos mais remotos, para dividir terras e construir habitações e templos, o homem precisou medir.

Hoje, possuímos muitos instrumentos de medida de comprimento. Alguns sofisticados, como o teodolito eletrônico usado em topografia; ou ainda paquímetros e micrômetros, usados para medidas de precisão na indústria mecânica.

Mas nem sempre existiram estes instrumentos ou os padrões por eles usados: o processo de medição de comprimentos se modificou através da história em função das necessidades sociais, contribuindo também para a transformação dessas mesmas necessidades e das condições materiais em que elas ocorreram. Vejamos.

Inicialmente, o homem tomava as partes de seu próprio corpo como padrão de medida. Já que medir é comparar a partir de um certo padrão, que deve estar disponível e ser facilmente manuseado, as primeiras medições tomaram como padrão o comprimento de um polegar (a polegada), ou de um braço (a braça), ou o palmo, ou o pé, etc. Algumas delas se mantêm até hoje.

No interior da Bahia, a medida mais difundida para marcação de terras é a vara. Uma vara do comprimento de um homem em pé com as mãos levantadas é tomada como referência – e equivale a 2,20m aproximadamente. A vara é a medida padrão, e como qualquer padrão de medida de comprimento surge em função das necessidades e das condições materiais de um contexto histórico.

Tendo em mente a conclusão anterior, percebemos facilmente como se dá o surgimento da milha e da légua como padrões de medida.

Com o desenvolvimento do comércio no mercantilismo nos séculos XIV e XV (grandes navegações, as trocas entre nações distantes, as feiras) surge a necessidade de se medir distâncias maiores que as usualmente medidas com aqueles padrões oriundos do corpo humano.

Esse período inicia o processo de expansão do homem europeu por todo o planeta, através das navegações e do comércio, e então há um deslocamento dos padrões de medida, antes baseados em partes do corpo do homem, para outros baseados na própria terra e suas dimensões.

Assim, a milha marítima é definida da seguinte forma: 1° (um grau) marcado sobre um meridiano terrestre equivale a 60 milhas.

Veja Figura 1.

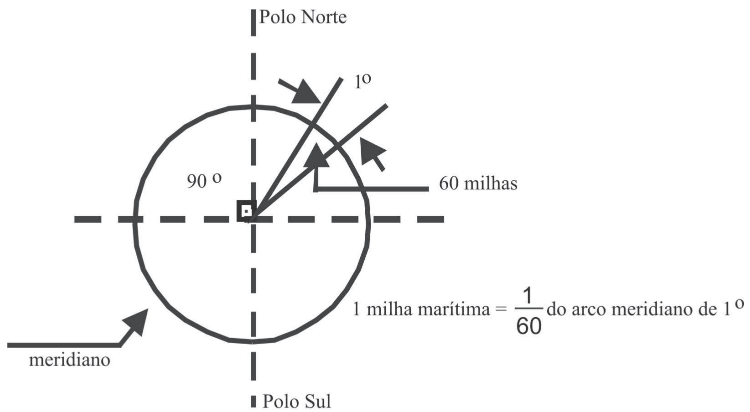


Figura 1

Obs: meridianos são circunferências máximas da superfície terrestre que passam pelos polos.

A légua é definida, de forma semelhante, com um 20 avos do comprimento do arco meridiano de um grau.

Veja Figura 2.

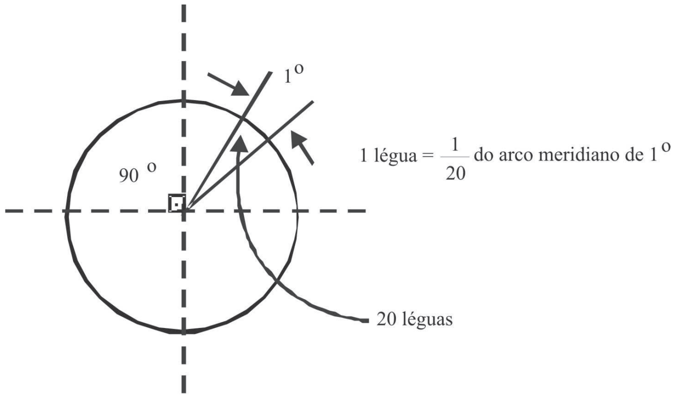


Figura 2

Neste contexto de transformações, que culmina com a mudança do modo de produção feudal para o modo de produção capitalista, é que surge o metro, Vejamos o que escreve Machado (2000, p. 34) sobre a questão:

A escolha da terra como referência para a definição de padrões de medida de comprimento permitiu que se criassem padrões universais, válidos para todos os povos.

A criação de padrões universais não foi obra do acaso. Em fins do século XVIII, a França passava por profundas transformações sociais. Uma nova classe social, a burguesia, que crescera e se armara com base na atividade comercial, disputava o poder com a nobreza. A revolução francesa foi uma consequência desta disputa.

Os burgueses revolucionários preconizavam novas ideias. Imbuídos de seus ideais de universalidade, lutavam pela conquista de novos valores, aplicáveis indistintamente a todos os homens. Foi durante a revolução francesa que se tomou a inciativa de unificar, a nível mundial, os padrões de medida. Havia, nessa época, uma grande confusão entre os padrões de medida empregados. Tornava-se necessário um projeto que unificasse as medidas e que escolhesse um sistema simples de unidade, baseado em padrões fixos e imutáveis.

Em 1790, a Academia de Ciências de Paris criou uma comissão, que incluía matemáticos, para resolver o problema. Dos trabalhos dessa comissão resultou o **metro,** um padrão único para medir comprimentos, que deveria ser utilizado universalmente a partir do ano seguinte.

O metro foi então definido, de forma análoga à légua e à milha, a partir de um meridiano terrestre.

Veja Figura 3

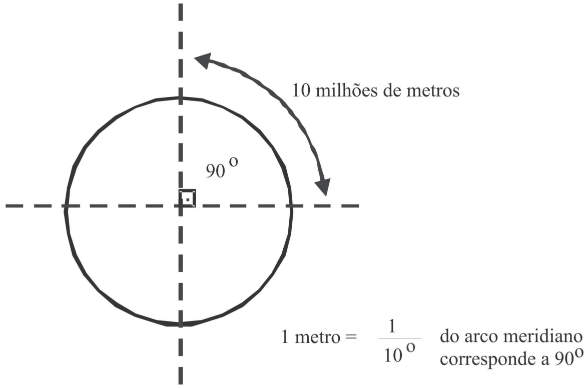


Figura 3

A definição do metro, dessa forma, contemplava a necessidade de reproduzi-lo (reproduzir o padrão) em toda parte da terra. Contudo, os meridianos não são iguais, pois a superfície da terra não é lisa, mas irregular.

Então, em 1799, o metro foi redefinido como o comprimento de uma barra de platina guardada, para referência, nos arquivos da França.

Evidentemente, a universalização almejada de tal padrão depende também dos movimentos da história. Na Inglaterra, outros padrões, como o pé e a polegada, são mais utilizados até hoje. No interior da Bahia, a vara é a medida padrão. Você sabe por quê? Lembre-se das necessidades e interesses de um dado contexto social e histórico.

Para encerrar esta pequena história dos padrões de comprimento, queremos lembrar que o metro, apesar da não alteração de seu tamanho, passou por outras definições teóricas, e hoje é medido em função da velocidade da luz.

Isso não se dá por acaso; e também não é por acaso que o homem cria novos padrões como o ano-luz.

Ao caminhar velozmente pelo espaço, tanto com suas naves, como com os seus poderosos telescópios, o homem depara-se com o infinitamente grande, depara-se com as distâncias astronômicas que reclamam uma unidade de comprimento astronômica, pois o metro, no espaço, tornou-se pequeno.

Assim criou-se o ano-luz, distância percorrida pela luz em um ano, ou seja: 365 dias por ano x 24 horas por dia x 3.600 seg por hora x 300.000 km por segundo = 9,5 trilhões de km!

Mas, insistimos, no interior da Bahia continua se usando a vara, e não o infinitamente grande ano-luz ou o infinitamente pequeno angstron. Você sabe por quê?

Para responder a esta pergunta, pense na diferença entre o tempo físico ou cronológico e tempo histórico. Neste último coexistem o presente, o passado e o futuro; em um mesmo espaço-tempo físico, temos a existência de formas de conhecimento passadas (como medidas através de varas), formas de conhecimento largamente empregadas pela indústria moderna (como as medições por instrumentos de precisão), além de formas de conhecimento que apontam para possibilidades futuras (como o padrão ano-luz).

No interior da Bahia, vivemos um certo tempo histórico. Mas é preciso olhar para as formas de organização social mais desenvolvidas, futuras e do conhecimento por elas engendrado, para adquirirmos consciência do fluxo da história e, por conseguinte, de nós mesmos.

LOGARITMOS

Como vimos, já no exemplo anterior, nos séculos XV e XVI, a navegação se desenvolvia rapidamente, e com ela a astronomia também ganhava impulso. Isso porque, também para navegar, o homem precisava se orientar pelas estrelas. Assim, o desenvolvimento do comércio puxava as navegações que, por sua vez, contribuíam, enquanto necessidade, para o desenvolvimento estupendo da astronomia: são deste período homens como Kepler e Galileu.

E o surgimento do logaritmos está ligado a problemas computacionais oriundos basicamente da astronomia.

Com as observações dos céus, obtinham-se números (ângulos, senos e cossenos de ângulos), distâncias com muitas casas decimais, números "astronômicos", no duplo sentido que o termo hoje possui.

Estes números entravam nos cálculos aritméticos de distâncias ou outras medidas na construção dos modelos teóricos e cartas de navegação usadas na época. Milhares de multiplicações eram efetuadas com estes valores, tarefa árdua e que propiciava a introdução de erros.

Atualmente, tais operações não se constituiriam em problema com as mo-dernas calculadoras e potentes computadores, até mesmo pessoais.

Mas, no século XVI, esses instrumentos de cálculo não estavam disponíveis e as necessidades de então empurravam à busca de soluções para o problema.

Os matemáticos da época resolveram a questão de maneira sofisticada, não só solucionando o problema imediato, mas também abrindo as portas de um vasto campo de pesquisa matemática que veio a ter muitas aplicações.

Os logaritmos começaram a ser inventados quando se passou a procurar um processo que permitisse reduzir uma operação a outra de menor complexidade, já que somar dois números é mais fácil que multiplicá-los.

Vamos explicar o uso computacional dos logaritmos para esclarecer seu aparecimento.

Existem números tão simples de multiplicar quanto realizar uma soma elementar. Veja:

$10^9 x 10^6 = 10^{9+6} = 10^{15}$

Estes números **não** são pequenos (com poucas casas decimais) pois 10^9 = 1.000.000.000 e 10^6 = 1.000.000; outro exemplo: $21^{13} \text{ x } 21^{25} = 21^{25+\text{Í}3} = 21^{38}$

Esta propriedade das potências da mesma base vale sempre, e é fácil demonstrar. Então, se conseguíssemos reduzir os fatores de uma multiplicação a **potências de mesma base,** o trabalho de multiplicar seria bem reduzido.

Ora, podemos saber de antemão "todas" as potências de uma certa base, por exemplo a base 2. E para não esquecê-las, podemos dispor estas potências em uma tabela, como a seguinte. Por exemplo, se queremos 1024 x 2048 vamos à tabela e encontramos:

2^1	2
2^2	4
2^3	8
.	.
.	.
.	.
2^{10}	1024
2^{11}	2048
.	.
.	.
.	.
2^{19}	524288
2^{20}	1048576
2^{21}	2097152
.	.
.	.
.	.

$1024 = 2^{10}$ e $2048 = 2^{11}$

$1024 \times 2048 = 2^{10} \times 2^{11} = 2^{10+11} = 2^{21}$

e finalmente voltando à tabela temos: $2^{21} = 2097152$.

Resumindo: $1024 \times 2048 = 2^{10} \times 2^{11} = 2^{10+11} = 2^{21} = 2097152$.

Como sabemos a base da potência (que é fixa em uma determinada operação, pois a propriedade usada vale para potências de mesma base), a tabela pode ser assim reconstruída.

TABELA DE POTÊNCIAS DE 2	
Expoente	Potência
1	2
2	4
.	.
.	.
10	1024
11	2048
.	.
.	.
.	.
19	524288
20	1048576
21	2097152
.	.
.	.
.	.

E para multiplicar 1502 x 2048?

Bem, como $2^{10} = 1024$ e $2^{11} = 2048$, o número 1502 não consta da Tabela. Ele deveria estar entre 1024 e 2048, ou seja, é um número entre 2^{10} e 2^{11}. O expoente da base 2 para o número 1502 está compreendido entre 10 e 11, não inteiro!!!

Temos aqui um primeiro problema e temos que construir uma tabela mais completa, se quisermos que ela nos seja útil!

Antes, porém, vejamos um pouco as potências de base 10, e o que se chama notação científica.

Um número está em notação científica se for da seguinte forma:

$n,Y_1Y_2Y_3...Y_p x10^m$

onde $1 \leq n \leq 9$, n natural

$Y_1\ Y_2\ Y_3 \ldots Y_p$ é a parte decimal com qualquer número finito de dígitos (p dígitos); $m \in Z$. Exemplos:

$3{,}00128 \times 10^{-6}$

$1{,}708 \times 10^{24}$

$6{,}02 \times 10^{23}$

$3{,}14159 \times 10^{1}$

$68{,}2 \times 10^{-5}$ não está em notação científica,

mas $68{,}2 \times 10^{-5} = 6{,}82 \times 10^{-4}$ e $6{,}82 \times 10^{-4}$ está.

Trabalhar com notação científica (transformar números dados em números com notação científica e vice-versa) é muito simples, pois o nosso sistema de numeração é POSICIONAL e DECIMAL.

Posicional quer dizer que um mesmo algarismo, colocado em posição relativa diferente dentro de um número, tem valor diferente (no caso, são as chamadas posições ou CASAS da unidade, dezena, centena, etc.).

Decimal quer dizer que mudando uma posição ou casa, o algarismo passa a valer 10 vezes mais, ou menos, conforme mudado para a esquerda ou para a direita, respectivamente.

Exemplo:

13 – o algarismo 1 vale uma dezena ou 10 unidades

105 – o algarismo 1 vale uma centena ou 100 unidades

Façamos agora uma multiplicação usando notação científica.

$1267851{,}683 = 1{,}267851683 \times 10^{6}$

$0{,}549300118 = 5{,}49300118 \times 10^{-1}$

$1{,}267851683 \times 10^{6} \times 5{,}49300118 \times 10^{-1} =$

$= (1{,}267851683 \times 5{,}49300118) \times (10^{6} \times 10^{-1}) =$

$= (1{,}267851683 \times 5{,}49300118) \times 10^{5}$

Bem, parece ainda mais complicado que o problema inicial, mas o que é importante perceber com o exemplo, é que se quisermos usar TABELAS DE POTÊNCIAS DE BASE 10, sempre podemos escrever o número em NOTAÇÃO CIENTÍFICA – as potências de 10 que aparecem já sabemos multiplicar rapidamente e estamos transformando os 2 fatores restantes em potências de 10 para podermos usar as mesmas TABELAS DE POTÊNCIAS DE 10 e a mesma propriedade. Mas qual a vantagem de termos escrito os números dados em notação científica se inicialmente tínhamos o mesmo problema de transformação (para alguma TABELA DE POTÊNCIA) de números de complexidade aparentemente semelhante?

É que, em NOTAÇÃO CIENTÍFICA, o fator que multiplica a potência de 10 é sempre da forma n, Y, Y_2 ... Y (vai de 1,0 até 9 vírgula alguma coisa). Portanto, a nossa tabela irá da potência de 10 que vale 1, ou seja $10^{\circ} = 1$, até uma potência de 10 menor que 10, ou seja, menor que $10^1 = 10$, assim:

POTÊNCIAS DE 10	
Expoente	Potência
0	1
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
1	10

Portanto, a nossa tabela será mais completa tanto mais valores do **expoente e** tal que $0 \leq e < 1$ estejam catalogados.

Vamos melhorar nossa tabela?

a) $10^{0,5} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

$\sqrt{10} \cong 3{,}162$

b) $10^{0,25} = 10^{1/4} = \sqrt[4]{10} \cong \sqrt[2]{3{,}162} \cong 1{,}778$

c) $10^{0,75} = 10^{3/4} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000} = \sqrt{\sqrt{1000}} = 5{,}623$

ou de outra forma,

$10^{0,75} = 10^{3/4} = 10^{3.(1/4)} = (10^{1/4})^3 \cong (1{,}778)^3 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 10^{0,75} \cong 5{,}623$

A nossa tabela fica agora assim:

TABELA DE POTÊNCIAS DE 10	
Expoente	Potência
0	1
0,25	1,778
0,5	3,162
0,75	5,623
1	10

Vamos fazer um teste?

Divida os números abaixo usando exclusivamente notação científica, propriedades da potenciação e a tabela:

$562,3 \div 0,01778$

- Solução

$562,3 = 5,623 \times 10^2$

$0,01778 = 1,778 \times 10^{-2}$

$$\frac{562,3}{0,01778} = \frac{5,623 \times 10^2}{1,778 \times 10^{-2}} =$$

$$\text{(tabela) } \frac{10^{0,75} \times 10^2}{10^{0,25} \times 10^{-2}} = \frac{10^{2,75}}{10^{-1,75}} = 10^{2,75-(-1,75)}$$

$= 10^{2,75+1,75} = 10^{4,5} = 10^{4+0,5} = 10^4 \times 10^{0,5} =$

(tabela) $3,162 \times 10^4 = 31.620$ (confira)

Não se preocupe! Não construiremos "toda" a tabela!

Já existem tabelas de base 10 e outras bases importantes, ligeiramente diferentes desta que construímos assim, por uma questão de comodidade.

Fixada a base para a construção de uma tabela, vimos que o EXPOENTE da potência é muito importante – é este EXPOENTE que estávamos procurando desde o início da nossa discussão de cálculo aritmético. A este EXPOENTE (dada uma base) é que chamamos LOGARITMO da potência x na base dada. Dada a base 10, escreve-se EXPOENTE = log x

Assim log 10 = 1

log 1 = 0

$\log 3{,}162 \cong 0{,}5$

$\log 100 = \log 10^2 = 2$

Se a base não for 10, devemos especificá-la; assim $2^3 = 8$, escrevemos $\log_2 8 = 3$.

Os cálculos efetuados pelos astrônomos ficaram muito simplificados. Os matemáticos construíram muitas, e cada vez mais, complexas tabelas de logaritmos, diminuindo o trabalho e aumentando a precisão dos cálculos astronômicos.

O que queremos destacar é que esta ferramenta simples e potente surgiu como necessidade imposta, em última instância, pelo novo modo de produção mercantil que se instaura neste período.

Isso deve ressaltar a ideia da Matemática como uma ciência construída na história de forma articulada com as necessidades sociais.

Neste ponto, queremos fazer uma pergunta: ora, se os logaritmos foram inventados a tanto tempo para efetuar cálculos que hoje podem ser executados de forma muito mais simples com os computadores, qual a necessidade de ensiná-los?

É a perspectiva histórica novamente que pode mostrar o tremendo impacto da invenção dos logaritmos sobre a estrutura da matemática. Se por um lado os logaritmos surgem associados a necessidades bem determinadas, por outro, o seu aparecimento dá novos rumos e energia à produção matemática. Muitos fenômenos físicos são descritos por funções logarítmicas. Sim, nós temos computadores, mas até mesmo seu funcionamento precisa de logaritmos para ser descrito. Vejamos no próximo exemplo.

OS COMPUTADORES

Como vimos, ao discutir os logaritmos, a computação de cálculos aritméticos torna-se uma questão importante com o desenvolvimento do comércio no mercantilismo.

Nos séculos XVII e XVIII foram feitas tentativas de mecanizar estes cálculos, facilitando o trabalho de matemáticos (e talvez comerciantes). Assim, Pascal e Leibniz inventaram dispositivos calculadores mecânicos – Pascal chegou, inclusive, a vender algumas unidades de sua Pascalina.

Contudo, é somente na segunda grande guerra que o sonho de construir um computador se torna realmente uma necessidade: cálculos de balística tornam-se tão importantes que justificam o investimento em pesquisas para a construção do primeiro computador eletrônico, o ENIAC.

O grande desenvolvimento da tecnologia de computadores foi possibilitado pelo florescimento da economia do pós-guerra, e, num estágio posterior, a economia se desenvolveu graças ao florescimento do computador.

E a Matemática? Ora, os trabalhos de Boole com a álgebra e os trabalhos de Turing e Post com a lógica estão na base da concepção e construção do moderno computador eletrônico, e todos eles estão associados ao desejo e à necessidade do homem de, mais que computar, ordenar o pensamento; sim, ordenar o pensamento, já que o computador, mais que computador, é um ordenador (*ordenauter* em francês, *ordenador* em castelhano). E a necessidade de ordenar está subsumida nos tempos atuais, onde o controle da informação é fundamental no processo de produção.

Isso tem um impacto tremendo na consideração dos tópicos mais importantes de um currículo de matemática, de um ensino de matemática que saiba de noções importantes da própria matemática contemporânea, teórica e aplicada; algoritmo, computabilidade, recursão, interação, laços e *loops*, a realização material do conceito de variável. Enfim, tudo o que é sepultado acriticamente na infame moda conhecida como informática.

E os computadores que contêm muita matemática, também são, como podemos ver, produto da história. E da história que estamos fazendo, agora.

CONCLUSÃO

Dos exemplos acima considerados, o leitor possivelmente já concluiu que a história da matemática não pode se resumir a mero recurso didático da motivação, mas sim como a verdadeira estruturadora dos conceitos de que hoje dispomos.

Conhecendo-se a história, pode-se decidir como se aborda um determinado tema, pois tem-se como critério a maneira com que foram produzidos os conceitos matemáticos.

E mais, dos exemplos dados, queremos ressaltar que uma abordagem histórica não pode ser feita de um ponto de vista simplesmente interno, onde as necessidades lógicas predominariam e a história social é algumas vezes simplesmente sobreposta à história factual dos conceitos matemáticos, anedoticamente.

Por outro lado, também, a história da matemática não pode ser vista de um ponto de vista externo, onde cada invenção serve para aplicações imediatas e nada mais, não contribuindo para a própria transformação das condições do conhecimento matemático, nem gerando novos conhecimentos.

Respiramos a história pois estamos mergulhados nela. A Matemática reina mergulhada na história. Podemos compreendê-la melhor através da história pois aí compreende-se seu processo de produção, única forma de se apropriar verdadeiramente do significado amplo dos conceitos matemáticos, significado político, social, econômico, pedagógico, lógico, formal, empírico, material, enfim... concreto e histórico.

A história é como um "éter" ou um mar em que tudo está mergulhado. Um bom mergulhador, que sabe onde quer chegar, precisa conhecer suas marés: para não nadar a esmo, dispendendo energia sem saber para onde vai. De toda forma, é preciso conhecer o movimento da história.

Se por um lado vimos a importância da história para a matemática e seu ensino, por outro devemos destacar também a importância da matemática para a história, em particular, esse período da história iniciado com a revolução burguesa.

O leitor atento poderá ter percebido que os exemplos usados neste texto se localizam no período histórico citado ou, mais particularmente, no momento de transição do modo de produção feudal para o modo de produção capitalista. Ora, é neste último momento que muda qualitativamente também o modo de produção científica, a preocupação saindo da essência do objeto e deslocando-se para as relações que este objeto representa. E não podia ser diferente, já que a produção de conhecimento está intimamente articulada com a produção das condições materiais de existência do homem – se uma muda, a outra também muda.

Essa mudança na qualidade da produção do conhecimento está magnificamente bem marcada na obra de Galileu Galilei, considerado o pai da ciência moderna. Essa mudança é basicamente a matematização de conhecimento, já que as relações que definem um objeto, e as relações entre os objetos, são descritas em linguagem matemática, ciência de relações.

Dessa forma, a Matemática representa papel especialíssimo neste momento da história, e, assim, a história se impregna de matemática.

Assim, articuladamente, a Matemática enxerta a história que enxerta a matemática, em uma transa fértil e recíproca.

Por assumir modernamente importância diferenciada na produção do conhecimento, como vimos acima, pode-se perceber uma certa assimetria, na história, entre a produção pré e pós-idade média.

Estas observações realçam a importância da história na explicitação da articulação entre produção e transformação social – entendida amplamente nos aspectos sociais, políticos, econômicos e culturais – e a produção de conhecimento, no nosso caso, matemático. Needham (1956), após mostrar a grande semelhança entre as características da produção matemática e das ciências naturais europeias e chinesas até a Idade Média, afirma que, para explicar-se o grande desenvolvimento posterior da ciência europeia,

> [...] interesse na natureza não é o bastante, experimentação controlada não é o bastante, indução empírica não é o bastante, predição de eclipses e cálculo de calendário também não é suficiente – tudo isto os chineses possuíam. Aparentemente uma **cultura mercantil** (grifo nosso) foi capaz, sozinha, de fazer o que uma civilização agrária e burocrática não poderia – aquecer até o ponto de fusão os outrora separados conhecimentos matemáticos e da natureza. (NEEDHAM, 1956, p. 332)

Você sabe agora qual a importância da história para o ensino da Matemática?

Capítulo Dois

CONSTRUTIVISMO, SOCIEDADE E HISTÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

INTRODUÇÃO

A metáfora pedagógica construtivista tem se tornado cada vez mais aceita nos meios educacionais. Muitas tentativas de aprofundamento teórico do significado dessa metáfora em áreas específicas do ensino têm sido empreendidas, a exemplo do artigo de Cobb (1988), *The tension between theories of leaming and instruction in mathematicas education.*

A propósito da leitura desse trabalho, pretendemos, neste ensaio, propor a consideração genérica dos processos históricos de produção de conhecimento como "heurísticas" significativas a serem utilizadas pelo professor na vinculação das estruturas cognitivas, métodos correntes e repertório de conhecimento apresentados pelos alunos, com vistas ao seu desenvolvimento.

Para tanto, percorreremos o seguinte trajeto: inicialmente, apresentaremos três metáforas de aprendizagem que dominaram a educação desse século; em seguida, listaremos alguns problemas postos a propósito do construtivismo;

posteriormente, reforçaremos o argumento do caráter social da construção (COBB, 1992) e, finalmente, proporemos a consideração da história como “heurística”, no sentido a ser explicitado.

TRÊS METÁFORAS DA APRENDIZAGEM

No decurso deste nosso século, encontramos três grandes metáforas da aprendizagem: aprendizagem como aquisição de respostas, aprendizagem como aquisição do conhecimento e aprendizagem como construção do conhecimento. Vejamos, em linhas gerais, o que significa, aproximadamente, cada uma dessas metáforas.

Aquisição de respostas – o behaviorismo

O aprendizado é visto como um processo mecânico em que as associações de comportamento são fortalecidas ou enfraquecidas, de acordo com a interação *(feedback)* do ambiente.

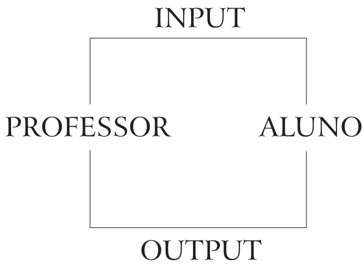
As estratégias de ensino ocupam-se da criação de situações que estimulam certas respostas, promovendo as respostas corretas com o reforço adequado.

O objetivo do ensino é incrementar o repertório de respostas corretas do aluno.

Assim, o aluno é visto como um ser passivo, receptor; o professor é um ativo, estimulador e reforçador. A relação do professor com o aluno é de estimulação e de reforço.

A metáfora, de forma estendida, é tomar o aluno como uma máquina de aquisição de respostas – ou, ainda, a mente como uma máquina.

Esquematicamente,



Apesar de o behaviorismo estar praticamente morto, certos resquícios da respectiva metáfora

> […] can be seen in modern theories of learning and instruction. For example, automatization of basic skills has become a component in modern theories of reading. (MAYER, 1992, p. 407)[1]

Contudo, se permanecem resquícios, sua importância paradigmática não mais existe, de forma que não nos preocuparemos com ela neste trabalho.

Aquisição do conhecimento – o transmissionismo

Com a ideia de que o conhecimento é algo que se adquire, a transmissão do conhecimento é vista como processo privilegiado para a aprendizagem.

A estratégia tradicional para a transmissão do conhecimento é a utilização de aulas expositivas; há, também, o privilégio do livro didático como instrumento.

O objetivo do ensino consubstancia-se no currículo.

O professor é visto como um fornecedor de informações, e o aluno

> […] as the receiver of the knowledge from the teacher and text as if the knowledge were a substance being moved into the head from outside sources. (CLEMENT, 1991, p. 422) [2]

Sendo a relação do professor com o aluno calcada na transmissão, o aluno pode ser tomado, metaforicamente, como um mero recipiente: sua mente é um balde; na medida em que o conhecimento, matemático, por exemplo, preexiste, a mente pode, também ser comparada a um espelho, que o reflete parcialmente.

Esquematicamente,

PROFESSOR ———— INFORMAÇÃO ———— ALUNO

Construção do conhecimento – o construtivismo

De acordo com esta metáfora – o construtivismo, o aprendizado ocorre não pelo registro (aquisição) da informação (conhecimento), mas pela interpretação da informação (construção do significado); o aprendizado é ativo e se dá pela construção das estruturas cognitivas, efetuada através da transformação das estruturas anteriores na sua atuação sobre o meio.

---

[1] […] pode ser visto em modernas teorias de aprendizagem e ensino. Por exemplo, a automatização das competências de base se tornou uma componente em modernas teorias da leitura.

[2] […] tal como o receptor do conhecimento do professor, e o texto como se o conhecimento fosse uma substância a ser transportada para a cabeça a partir de fontes externas.

As estratégias, nem sempre muito bem definidas aqui, objetivam contribuir para que o aluno vá (re)elaborando suas estruturas cognitivas e seu conhecimento.

O objetivo é sempre o desenvolvimento das estruturas cognitivas dos alunos.

Assim, em geral, o aluno é visto como centro do processo. As intervenções do professor podem (ou não) ter um certo efeito no processo, mas, certamente, não são determinantes como na metáfora transmissionista.

A relação do professor com o aluno é, quando considerada a do diálogo:

> The teacher's role may be seen as introducing helpful pertubations in a number of ongoing process that are taking place independently of the teacher. (CLEMENT, 1991, p. 423)[3]

A metáfora, aqui, é a do aluno como construtor do conhecimento. Esquematicamente, na forma mais ingênua, temos:

ALUNO CONHECIMENTO

PROBLEMAS POSTOS A PROPÓSITO DO CONSTRUTIVISMO

O construtivismo tem se tornado a metáfora preferida em educação.

Após o momento inicial de sua cada vez maior aceitação, tornando-se já o paradigma dominante, se não na efetiva prática pedagógica (uma de suas principais dificuldades), pelo menos nas elaborações teóricas imbricadas nas pesquisas educacionais, a metáfora construtivista tem sido colocada frente a muitas questões de coerência teórica e aplicabilidade; o aprofundamento dessas questões tem conduzido a diversos desdobramentos, de maneira que as proposições teóricas pretensamente construtivistas em diversos autores não constituem um corpo teórico homogêneo, mas um corpo vivo de debates e de pesquisas.

Vejamos algumas dessa questões que têm sido colocadas a propósito do construtivismo:

[3] O papel do professor pode ser visto como útil para introduzir perturbações em uma série de processos em curso que está tendo lugar, independentemente do professor.

a) A construção das estruturas cognitivas e do conhecimento se dá de forma espontânea?

b) Se sim, é possível a reconstrução de todo o conhecimento relevante historicamente construído?

c) Se não, como o professor pode participar sem que as respostas à sua participação sejam mero atendimento de suas expectativas?

d) Se a comunicação entre aluno e professor não se reduz à transmissão (e recepção), como foi afirmado na metáfora transmissionista, o que então é comunicação? Comunicação é negociação? (ZAJDSZAJDER,1988)

e) Atitudes tradicionais de comunicação e ensino, como as aulas expositivas e a leitura de livros didáticos (predominantemente transmissionistas), podem ser compreensivas e não simplesmente impositivas?

f) Quando é conveniente a intervenção do professor para possibilitar conexões desejadas nas estruturas cognitivas do aluno?

g) Como possibilitar ao aluno acesso ao conhecimento acumulado historicamente, se nada é transmitido, mas sempre construído?

h) Como conciliar a ideia de construção, a motivação dos alunos e o estabelecimento de objetivos educacionais?

i) Tudo deve sempre ser (re)construído ou (re)descoberto?

Considerando-se os aspectos sociais e históricos do construtivismo, como veremos nos próximos itens, a oposição dicotômica entre construtivismo e transmissionismo não parece tão facilmente aceitável, o que nos leva a buscar uma outra forma de compreender a tensão entre eles, de forma a equacionar melhor as questões apresentadas acima.

CARÁTER SOCIAL DA CONSTRUÇÃO

O que articula o conjunto de questões apresentadas, acreditamos, é o papel do professor na(s) teoria(s) construtivista(s).

De fato, se o aprendizado só se dá se há efetiva transformação das estruturas cognitivas – processo interno, que torna o aluno centro e objetivo principal do processo – onde entra o professor?

Há uma crença, relativamente generalizada, que o paradigma construtivista implica o aprendizado ser um processo espontâneo, não dirigido. Algumas formulações teóricas calcadas em posições construtivistas podem, de fato, ter contribuído para isso, embora a forma como tais teorias têm sido incorporadas ao senso comum pedagógico seja a principal responsável por essa crença.

Assim, discutiremos a questão do papel do professor de maneira a ensaiarmos uma proposta de entendimento crítico da metáfora construtivista.

Ao se opor, antagonicamente, às concepções transmissionista e construtivista, parece natural opor à atuação privilegiada do professor na primeira delas, a total eliminação da sua atuação na segunda – implicando a não diretividade do processo educativo.

Dessa forma, o construtivismo passa a ter um caráter espontâneo; como consequência, para não se cair em uma atitude epistemológica relativística, a alternativa parece ser considerar o conhecimento (e, por extensão, as estruturas cognitivas) como relações fixas e preexistentes na natureza – indiferentes à sociedade, à cultura e à própria práxis humana.

Contudo, a produção do conhecimento é uma prática, tanto social quanto individual, não cabendo nenhum tipo de postura dualista, ou de privilegiamento de uma em detrimento de outra; a elaboração do conhecimento é um processo de aculturação.

A ideia básica do construtivismo, de que o conhecimento é construído pelos alunos, deve ser completada com a visão de que tal construção é uma práxis social. Isso deve ajudar a explicar como (re)construir no ensino significados e práticas historicamente desenvolvidos durante séculos de atividade humana.

Portanto, os alunos devem, necessariamente, construir seus conhecimentos nas diversas áreas do saber, mas esse conhecimento estará sempre vinculado às práticas sociais, particularmente à relação professor-aluno. Em outras palavras, é possível, em princípio, utilizar qualquer estratégia instrucional para propiciar uma aprendizagem construtivista, incluindo as formas mais tradicionais, como as aulas expositivas e o uso de livros-texto.

Segundo Cobb (1988), com relação à interação entre alunos e professores no ensino, o máximo que pode ser dito é que as construções feitas pelos alunos se ajustam *(fit)* às que o professor considera que construíram; ocorre que

> [...] the teacher's actions do not directly determine students cognitive constructions. However, teacher's actions do influence the problems the students attempt to solve and thus the knowledge they construct. (COBB, 1988, p. 92)[4]

[4] [...] as ações do professor não determinam diretamente as construções cognitivas dos alunos. No entanto, as ações do professor influenciam efetivamente os problemas que os alunos tentam resolver e, assim, os conhecimentos que eles constroem.

O autor em questão compara a construção de teorias científicas com construção de estruturas conceituais (cognitivas): ambas são cotejadas com observações e podem ser aceitas temporariamente, rejeitadas, modificadas ou recolocadas, conforme se ajustem ou não a certos aspectos observados. Os obstáculos, as contradições e as surpresas observadas constituem-se em razão para a construção de novas estruturas ou teorias.

Um dos limites da analogia acima reside no fato que o aluno, diferentemente do cientista, interage com o professor, o qual pode contribuir para sua construção do conhecimento.

A nosso ver, esse é um aspecto fundamental para a possibilidade de trabalho pedagógico, a partir da perspectiva construtivista. O conhecimento (científico) construído pelo homem na sua história é resultado de um processo de milhares de anos, que jamais poderia ser reconstruído na escola pelos alunos, considerando a escala humana de tempo de vida.

O paradoxo apresentado é muito interessante. Em outras palavras, é justamente em um dos pontos onde a analogia entre o construtivismo filogenético e o construtivismo ontogenético apresenta uma fratura que se constitui no ponto de maior fecundidade da mesma: a possibilidade de um modelo pedagógico construtivista não contraditório com as evidências práticas da eficácia, dentro de certas condições, das estratégias de ensino tradicionais centradas no professor.

A construção do conhecimento pelo aluno é uma reconstrução constrangida pela atividade do professor e pela própria construção social e historicamente já realizada.

Cobb (1988) a respeito do papel do professor, diz que da mesma forma que os dados empíricos suportam, mas não determinam a construção de teorias científicas, as ações do professor suportam a construção de novas estruturas de conhecimento, pelo estudante.

Tanto em nossa análise quanto na de Cobb, pode-se perceber uma certa reconciliação teórica entre, por um lado, os vínculos sociais e históricos, respectivamente, e o construtivismo por outro.

No tópico seguinte, pretendemos explorar um pouco mais essa articulação, particularmente os vínculos históricos.

A HISTÓRIA COMO FONTE DE HEURÍSTICAS

As dificuldades teóricas e, possivelmente, práticas já apontadas anteriormente desaparecem, ou pelo menos são bastante minimizadas, ao considerarmos a construção do conhecimento uma atividade não apenas individual (o que implicaria o espontaneísmo do ensino, e o relativismo gnosológico, pois as verdades seriam apenas individuais), mas também, e principalmente, para nosso argumento, uma construção social.

Assim, uma teoria construtivista como a que estamos propondo deve levar em consideração, por um lado, os aspectos psicológicos e cognitivos e, por outro, os aspectos sociais e históricos, de forma não polarizada, mas articulada,

Com relação à consideração dos aspectos sociais, e especificamente ao conhecimento matemático, Cobb e outros autores (1992) sugerem uma atitude antropológica do professor.

Nós, por outro lado, mas não exclusivamente, sugerimos uma ênfase na historicidade do conhecimento (construção social do conhecimento na história). Acreditamos que essa maneira de perceber o aspecto social da construção do conhecimento efetivamente completa a premissa básica do construtivismo.

A transmissão impositiva do conhecimento não atende às especificações acima, pois, polarizando no produto formalizado do conhecimento, não torna presente o seu processo de produção (criação de conhecimento, dinâmica da produção, construção do conhecimento); essa forma impositiva e ainda dominante, no cotidiano escolar, é caracteristicamente dicotômica (processo/ produto; invenção/ descoberta; transmissão/ construção etc.).

Assim, a transmissão do conhecimento, tal como foi defendida pelo construtivista autor do texto que estamos comentando, só é ineficaz quando impositiva (no sentido já exposto de segregação entre processo e produto de conhecimento), limitando drasticamente a possibilidade de desenvolvimento de novas estruturas cognitivas.

A ênfase em uma regra, em um algoritmo, em um método, separadamente dos processos heurísticos (cognitivos) e dos processos sociais (históricos), que o engendraram, não contribui para a construção de novas estruturas cognitivas e consolidação de novos conhecimentos.

Na escola, nas atividades tradicionais, parece faltar, em geral, a dimensão histórica da atividade científica. O conhecimento, reduzido a seus aspectos formais, não favorece a dinâmica de reconstrução individual.

Portanto, contemplar a dinâmica da construção do conhecimento (científico e pedagógico) é resgatar aspectos sociais e históricos que são pistas que indicam caminhos possíveis ou alternativos para que o aluno articule velhos e novos significados para a (re)construção do conhecimento, concomitante ao desenvolvimento de suas estruturas cognitivas.

Para contemplar tal processo, é preciso uma interação dialética entre alunos e professores. Se a atitude não pode ser impositiva nem na forma (autoritarismo) como o ensino é efetuado, nem nos conteúdos trabalhados através de estratégias tradicionais (enfatizando unicamente o produto do conhecimento), então o diálogo (ou a negociação) se torna um elemento essencial na relação aluno-professor. A forma de interação didática é deveras importante para propiciar a construção de redes de relações e estruturas de significados.

CONCLUSÃO

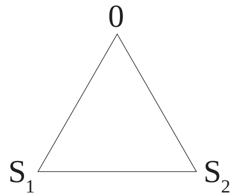
Das análises precedentes, três conclusões parecem brotar.

A primeira, não explorada, dados os objetivos mais imediatos deste pequeno ensaio, é que a educação é o lugar do diálogo, não da discussão (WEIL apud CANIVEZ, 1991, p. 231-234), muito menos da imposição, quer de normas, quer de conteúdos (formalmente segregados do processo de sua produção para a "objetividade" de sua comunicação).

A segunda, presente nas análises de Cobb (1988), é que a prática de discutir as limitações dos métodos utilizados pelos alunos é compatível com o construtivismo, dado que a construção do conhecimento, na ciência e na educação, nas pesquisas e na prática pedagógica, é ao mesmo tempo construção individual e social. No limite, mesmo as estratégias transmissionistas podem ser utilizadas pelo professor, em certas situações.

A terceira, intencionalmente explorada, é que a construção social do conhecimento se desnuda inteiramente na história; a história é a base da compreensão do processo de construção do conhecimento e seus caminhos podem ser tomados como "heurísticas" privilegiadas para o professor discutir as limitações dos métodos correntes dos alunos. As estratégias tradicionais como as aulas expositivas podem valer-se larga e fertilmente das heurísticas ressaltadas na imersão de um certo objeto de conhecimento na história.

Para finalizar, e considerando que, na história, o conhecimento tem significado social, propomos então o seguinte esquema para a relação pedagógica entre aluno e professor, ambos sujeitos ativos na construção e reconstrução do conhecimento (objeto da educação) e das transformações necessárias das estruturas cognitivas (de ambos sujeitos cognoscentes):



O esquema anterior sumariza a relação dialógica entre sujeitos ativos, S1 e S2, alunos e professores, vinculados pelo conhecimento (O, objeto) historicamente produzido e (re)significado. Como a relação é de vinculação, e não de determinação, não há, *a priori* e em abstrato, direção (seta) definida no esquema acima, como havia nos esquemas anteriores.

A objetividade do conhecimento é decorrente de sua construção social; a subjetividade, da interferência necessária do sujeito. Assim como ocorre com o seu objeto – o conhecimento – os sujeitos do processo pedagógico, alunos e professores, são também feixes de relações sociais.

Pedagogicamente falando, o diálogo entre sujeitos é a prática social fundamental, e a tensão entre o sujeito e o objeto do conhecimento, o processo fundamental. Olhar os caminhos trilhados pela produção de conhecimento na história ajuda a entender, avaliar e desenvolver as formas de esses sujeitos, ao mesmo tempo indivíduos e sociedade, construírem conhecimento.

Essa é a história.

Capítulo Três

A GEOMETRIA EUCLIDIANA

O homem, desde suas origens, ao produzir as condições de sua existência, vai também gerando um conhecimento do universo que o circunda – e do qual faz parte – de maneira a torná-lo mais compreensível e sua ação mais eficaz.

Nesse universo, repleto de objetos os mais variados, certos aspectos da realidade relacionam-se à forma (o sol é redondo), ao tamanho (qual árvore é maior?) ou, à posição (dentro ou fora?; esquerda ou direita?; paralelo ou perpendicular?).

Tais questões, relativas à forma, tamanho ou posição dos objetos, levaram historicamente à produção de um conhecimento que foi chamado Geometria.

A própria origem do termo Geometria está associada, e não poderia ser diferente, à maneira como o homem primitivo organizava sua economia: com a agricultura surge a ostensiva necessidade de medir, marcar e dividir terras – geo (terra) e metria (medida); o homem buscando uma mais precisa e sistemática medida da terra, a medida do homem (primitivo).

AS CONDIÇÕES MATERIAIS E O CONHECIMENTO GEOMÉTRICO

A Geometria, enquanto conhecimento associado às formas, não começa somente a ser produzida com o advento da agricultura – no artesanato ainda mais primitivo da cestaria e potaria, motivos geométricos complexos foram observados e registrados por antropólogos em escavações.

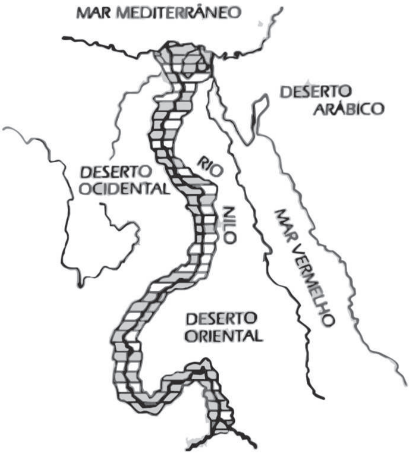
Contudo, é na sedentarização do homem agricultor e criador de animais domesticados, e com as novas necessidades de habitação e a arquitetura daí advinda, que o homem passa não só a contemplar as formas, mas a desenvolver um instrumental técnico baseado em um conhecimento geométrico em construção.

Um exemplo histórico será bem ilustrativo: Os egípcios possuiam um modo de produção calcado, entre outras coisas, na propriedade (estatal) da terra. Toda a terra pertencia ao Estado, que a dividia para o cultivo entre os cidadãos. A terra fértil era encontrada às margens do Rio Nilo, graças ao seu regime de cheias e vazantes anuais.

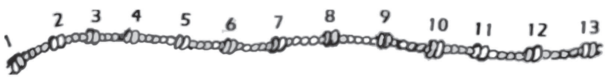
Se por um lado as enchentes regulares do Nilo propiciavam a fecundidade de suas margens, por outro criavam o problema das constantes demarcações da terra, já que a cheia destruía as marcas anteriores, e o Estado Egípcio precisa novamente redistribuir e remarcar as faixas de terra de cada família ou clã.

Observem que a divisão era feita em faixas retangulares aproximadamente equivalentes. Outras maneiras de dividir a terra poderiam levar algumas propriedades a possuir muita terra fértil, enquanto algumas outras quase nenhuma ou nenhuma.

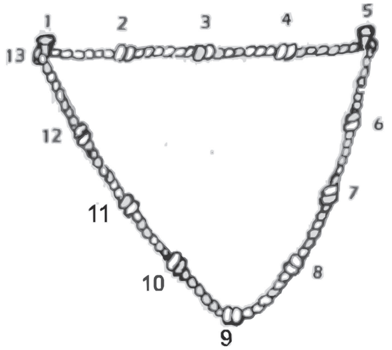
Muito bem. Distribuir equitativamente as faixas férteis de terra para maximizar a produção: este pode ter sido o motivo para o desenvolvimento de uma técnica empírica (ou seja, experimental, prática) de construção de ângulos retos, baseada em uma propriedade que só muito mais tarde viria a ser demonstrada – o teorema de Pitágoras.



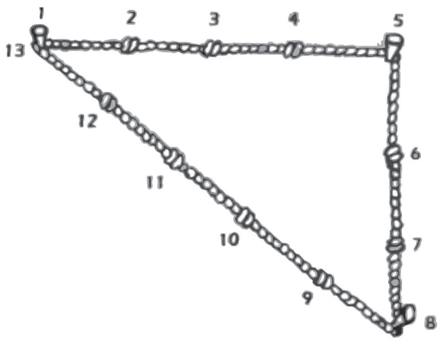
A construção é muito simples: toma-se uma corda com 13 nós equidistantes, como na figura seguinte:



A seguir, constrói-se com a corda um triângulo, fixando-se estacas apropriadamente no primeiro e no quinto nó. O último nó, o décimo-terceiro, deve ser fixado, fechando o triângulo, junto com o primeiro nó, como na figura abaixo:



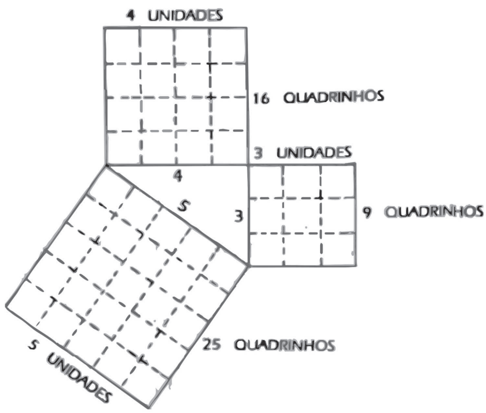
Temos fixos dois vértices do triângulo. O terceiro e último vértice deve ser fixado no oitavo nó, em um ponto apropriado do terreno, de maneira que os lados fiquem convenientemente esticados.



Os egípcios sabiam que o ângulo formado na estaca do quinto nó é reto (como o ângulo da quina da mesa). As terras podiam ser demarcadas rapidamente, e com relativa precisão, com este esquadro egípcio.

Por que tal ângulo é reto? O triângulo de corda confeccionado pelo povo dos faraós possui lados de comprimento 3, 4 e 5 unidades, como o leitor pode verificar na figura anterior.[1]

Se construirmos quadrados sobre os lados deste triângulo, conforme figura a seguir:



Verificaremos que o quadrado construído sobre o lado maior (hipotenusa) tem área igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os outros dois lados (catetos)

Assim, $25 = 16 + 9$, ou seja, $5^2 = 4^2 + 3^2$

[1] Essa questão é controvertida, AABOE (1984, p. 41) diz que "[...] a afirmação frequentemente repetida de que os egípcios conheciam o triângulo retângulo de lados 3, 4, 5 não se baseia nos textos disponíveis, mas foi inventada uns 80 anos atrás". De qualquer forma, a construção é bela e tentadora – inspirando-se em Heródoto, a matemática egípcia é uma dádiva do Nilo.

Vale, portanto, a relação de Pitágoras no triângulo 3, 4 e 5, e por isso ele é retângulo (pois possui um ângulo reto), fato que os egípcios, muito antes de Pitágoras, conheciam empiricamente.

Esse exemplo ilustra bem a construção de um conhecimento geométrico, inicialmente empírico, que vai se tornando cada vez mais abstrato e sistematizado, mas de forma articulada com as questões materiais e produtivas, sintoma de sua concreticidade histórica.[2]

AS PRIMEIRAS FORMAS IDEAIS

Muito bem, cordas esticadas, lanças e espadas, marcas divisórias em propriedades, a linha do horizonte, a interseção de duas paredes de uma pirâmide, templo ou outra construção, todos estes elementos propiciaram a construção de um conceito, uma ideia, uma abstração que procura sintetizá-los e representá-los: a ideia de reta, de linha reta.

Reta, "o comprimento sem largura", como diz Euclides, sem começo nem fim – você pode imaginar algo material, algo que possa ser sentido materialmente e que tenha estas propriedades?

A reta é uma idealização que surge como consequência da existência em profusão de conceitos correlatos empíricos (e "imperfeitos").

O ponto, "o que não tem parte", ainda conforme Euclides, algo sem dimensão, sem massa ou volume, sem comprimento ou largura, é também uma idealização. Qualquer corpo material possui dimensão (um grão de areia ou um pingo no i), mas, em determinados contextos, certos objetos funcionam como marcas ou pontos – como as estacas do triângulo de cordas – que servem apenas para indicar um lugar de dimensões não consideráveis em relação ao problema tratado, sem serem em si mesmos importantes ou significativos. A existência destes objetos "sem parte" levou à construção do conceito ideal de ponto.

Analogamente, a superfície de um lago ou de uma mesa, por exemplo, levaram à abstração chamada plano – "o que tem apenas comprimento e largura" – algo sem espessura, não limitado em qualquer das direções em que se projeta. Não existe objeto sensível assim. Toda superfície plana real, com existência empírica, é limitada, como um lago é limitado por suas margens. Além

[2] Na medida em que se firma matemática e filosoficamente, o enfoque geométrico vai ganhando autonomia relativa e gerando questões intrínsecas, como a dos incomenssuráveis, que alimenta fortemente, como um motor contraditório, o próprio desenvolvimento da teoria.

disso, nada é perfeitamente liso; em alguma escala de observação, existem pequenas rugosidades em qualquer corpo.

Mas essas noções geométricas ideais foram usadas como modelos perfeitos de nosso mundo. Não tem correspondência material perfeita, mas foram usadas como entes primeiros e fundamentais de um modelo explicativo das formas, posições e medidas de nosso mundo.

Veremos nos tópicos seguintes como é este modelo e como foi historicamente criado.

ANTECEDENTES ECONÔMICOS, SOCIAIS E FILOSÓFICOS DO MODELO

A Geometria clássica encontra sua forma mais sistematizada com o grego Euclides (em torno de 300 aC). A obra de Euclides surge em um momento histórico, econômico e filosófico bem marcado, e está impregnada dos caracteres predominantes desse momento. Vejamos.

Até aproximadamente 1.000 aC, na região onde hoje é a Grécia, o conhecimento do mundo pelo homem era predominantemente mágico (mitológico). Os mitos que eram transmitidos oralmente e os deuses, que tinham características antropomórficas, eram utilizados nas explicações sobre o mundo. A sociedade primitiva grega era rural, tribal e indissociavelmente mitológica. O conhecimento mítico funcionava como cimento das estruturas sociais marcadas pela dependência política do parentesco.

Na Ásia Menor, com uma nova classe intermediária que foi se fortalecendo com o comércio, acontece a ruptura com este pensamento mítico, originando a primeira filosofia, calcada na "razão" ou racionalidade[3] – assim, romper com as explicações mitológicas significou também mudar a estrutura de poder centrada na aristocracia rural. Note-se a importância da efervescência comercial insurgente para a mudança da postura mítica para uma postura racional.

Os primeiros filósofos como Tales de Mileto (625-588 aC), também matemático e geômetra, Anaximandro (610-546 aC) e Anaxímenes (588-528 aC) são chamados "físicos" porque procuravam explicar a origem do universo em termos de um princípio constitutivo fundamental *(phynis* em grego), como a água, o *apeiron* (indeterminado) ou o ar, respectivamente. É uma filosofia ma-

[3] É importante ressaltar que este primado do discurso racional vai forjando uma estrutura de pensamento e linguagem que culmina com a lógica formal.

terialista, empírica e contrária às estruturas ideológicas hegemônicas da aristocracia rural.

Após as Guerras Médicas, a Jônia perde sua hegemonia econômica e filosófica; surge em Samos (Jônia) Pitágoras (580-500 aC), filósofo e matemático, como todos sabem, que procurou elaborar uma compreensão eclética do mundo utilizando elementos religiosos e éticos juntamente com a produção científica e matemática de sua Escola (a escola pitagórica).

Para Pitágoras, os números constituem a própria realidade, a harmonia e ordem dos céus. O homem deve libertar-se da maldade do mundo "sublunar" (a terra) e impregnar a harmonia do universo. Pitágoras, contrariamente ao materialismo dos físicos, quer encontrar a substância ideal que dá origem a tudo (os números?). É de certa forma precursor do idealismo platônico, como veremos, que nega a realidade material e afirma a realidade única dos conceitos e ideias.

Já nos séculos VI e V aC, filósofos das camadas abastadas e dominantes da *polis* Eléia, situada na Grécia continental, afirmam que nada muda, tudo é sempre igual, imóvel e uno. Zenon, Xenófanes e Parmênides contribuem para justificar a estabilidade das estruturas vigentes de então. Em contrapartida, Heráclito (540-467 aC), de Samos (Jônia), afirma que "não podemos nos banhar duas vezes no mesmo rio", querendo dizer que tudo muda, nada permanece, o universo está em constante transformação.

PEQUENA DIGRESSÃO POLÍTICO - FILOSÓFICA

Filosoficamente, da época clássica até a modernidade, as concepções idealistas têm predominado sobre o materialismo, a ideia de estabilidade tem predominado sobre a de mudança, as concepções de conservação têm tentado impedir o desenvolvimento das concepções de transformação – sempre como forma de justificar as estruturas de poder hegemônico dos grupos dominantes que se sucedem no tempo.

Mas isso não tem impedido as efetivas transformações decorrentes da materialidade do mundo e da práxis (trabalho) do homem.

PLATÃO E ARISTÓTELES – AS BASES PARA O MUNDO EUCLIDIANO

Já vimos as fases tribal e aristocrática da organização social, política e econômica grega, com os consequentes momentos filosóficos. Agora entramos no apogeu das unidades políticas chamadas *pólis,* cidades-estado autônomas e independentes, projeto grego de civilização.

A organização da *pólis* está ligada à racionalidade do pensamento grego clássico, em contraposição ao período mitológico, este último dominante na Grécia rural, como já vimos.

Com a *pólis, a* filosofia muda de espaço geográfico – da Jônia para o continente – e muda também de objeto – da natureza para o homem.

Como na *pólis* a convivência do homem político precisa ser bem definida, é fácil compreender a mudança do discurso cosmológico e materialista (dos físicos) para o discurso moral e político dos sofistas: é preciso um modelo efetivo de enquadramento na nova estrutura política e social.

A educação tradicional ateniense era voltada para a formação de guerreiros fortes e atletas ágeis, que tivessem excelente desempenho nos jogos e na guerra. Os sofistas (novos filósofos que se faziam pagar pelo seu trabalho educativo) surgem na *pólis* afirmando que a educação deve voltar-se para a formação do cidadão e do político – do cidadão político voltado para o exercício das práticas da democracia ateniense. O poder desloca-se do conhecimento e prática militar e/ou atlética para a persuasão política na defesa das ideias do cidadão na Assembleia da *pólis.* Assim, um falar fluente, a partir de um raciocínio hábil e rápido, é o sustentáculo de uma retórica clara, firme e forte para uso público, fonte principal de preocupação no ensino dos sofistas.

Diminui o poder militar e aristocrático, cresce o poder democrático: a liberdade de opinião (para os cidadãos apenas; os escravos atenienses não eram considerados cidadãos, por exemplo), os debates, a crítica de costumes, o discurso político – há liberdade de pensamento e de palavra.

Os sofistas desenvolvem e ensinam técnicas de pensar, falar e persuadir bem, são os mestres da demagogia. Contudo, ao exacerbarem o relativismo, caem em um individualismo cético, inoperante e desarliculador e, aos poucos, vão sendo objeto de crítica daqueles que procuram um conhecimento absoluto, ou, ao menos, mais ordem e esperança social.

Sócrates (469-399 aC) combate os sofistas; afirma que as ideias já preexistem dentro de cada homem (inatismo), e que conhecer é rememoriar as verdades já embutidas em nosso ser. Exerce forte influência no pensamento grego; é condenado à morte sob a alegação de corrupção da juventude, mas não deixa obra escrita. Seus pensamentos chegam até nós principalmente através dos *Diálogos*, escritos por um dos seus discípulos, Platão.

Chegamos agora no momento filosófico crucial para a compreensão do modelo geométrico euclidiano, no que concerne aos seus fundamentos.

Platão (428-347 aC) dá forma bastante acabada à concepção idealista. Platão afirma um idealismo absoluto: só as ideias existem.

Sobre as causas deste primado absoluto das ideias, Nunes (1986, p. 24) afirma que

> *Platão teria desacreditado da justiça da "Pólis ", que condenara seu mestre à morte, da " Verdade " dos sofistas e da "política " em Siracusa. Portanto, erige um mundo ideal de perfeição, do qual procede nossa "alma "e onde se pode ter a perfeição do conhecimento das ideias. Pregara, na via socrática de onde procede, o ensino da virtude e a prática da contemplação. Platão acaba desqualificando a matéria, como degradação e cópia do mundo das ideias. A matéria é intrinsecamente má e o trabalho manual degradante.*

O idealismo platônico e o idealismo geométrico do modelo euclidiano impregnam-se mutuamente. Platão e Euclides são praticamente contemporâneos, e o mesmo espírito ideal e formal está presente em suas concepções filosóficas e geométricas, respectivamente.

Como ilustração, Platão diria que um objeto sensível, como uma mesa, por exemplo, não passa de uma sombra ou manifestação imperfeita do conceito perfeito (ideal) de mesa, o qual pertence ao mundo das ideias. A geometria euclidiana, de sua parte, fala em ponto ("o que não tem parte"), reta ("o que não tem largura"), ou plano ("o que não tem espessura").

As concepções platônicas e euclidianas se impregnam mutuamente, uma influenciando a outra e ambas sendo condicionadas por um momento histórico. "As formas da geometria clássica são as linhas e os planos, os círculos e as esferas, os triângulos e os cones. Representam uma poderosa abstração da realidade e inspiraram uma vigorosa filosofia da harmonia platônica." (GLEICK, 1990, p. 89)

Por outro lado, Aristóteles (384-322 aC), discípulo de Platão, não só recupera o realismo como método de conhecimento, mas também estrutura a lógica formal, isto é, um sistema de chegar a juízos e raciocínios legítimos a partir de certas afirmações iniciais (premissas).

Os silogismos aristotélicos representam a construção de um método racional de "bem pensar", um método dedutivo ou axiomático.

Além disso, as categorias aristotélicas de matéria e forma são elaboradas: existe uma matéria universal que se distingue apenas pela forma (a realização da matéria, o que dá identidade às coisas).

Assim sendo, a importância dada à forma e ao formalismo, e principalmente ao raciocínio dedutivo da lógica formal, constituem o segundo grande pilar que sustenta o modelo geométrico euclidiano: dadas as entidades fundamentais (ponto, reta, plano) e algumas regras básicas de relação entre elas (postulados ou axiomas) pode-se, por raciocínio lógico dedutivo, mostrar (demonstrar) todas as verdades geométricas, muitas das quais já empírica ou racionalmente constatadas em momentos anteriores. Constrói-se assim o belo, perfeito e ideal edifício geométrico clássico ou euclidiano.

Mesmo um historiador pouco afeito a considerar as determinações sociopolíticas e econômicas da produção do conhecimento matemático, como Boyer (1974, p. 56-57), afirma que:

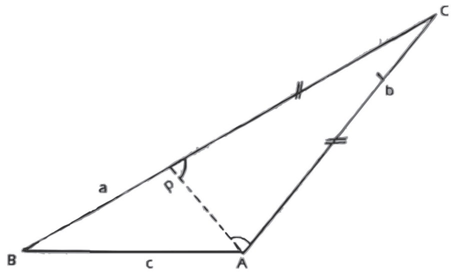
> Pode ser oportuno indicar agora, portanto, que há várias hipóteses quanto às causas que levaram à transformação das receitas matemáticas dos pré-helénicos para a estrutura dedutiva que apareceu na Grécia [...] Uma, por exemplo, vê no desenvolvimento socio-político das cidades-estado da Grécia o surgimento da dialética e a consequente exigência de base racional para a matemática e outros estudos; outra sugestão um tanto semelhante é que a dedução pode ser provinda da lógica, nas tentativas de convencer um oponente de uma conclusão, procurando premissas das quais a conclusão segue necessariamente.

EXEMPLOS DE APRESENTAÇÃO EUCLIDIANA DA GEOMETRIA

Apenas a título de informação, a obra de Euclides – *Os elementos* – que sistematiza a maior parte de conhecimento geométrico clássico, e que tem sido a obra que mais influência exerceu no pensamento científico e matemático nos últimos 2.000 anos, é composta de 13 livros ou capítulos, sendo os seis primeiros de geometria plana elementar, os três seguintes sobre teoria dos números, um sobre incomensuráveis, e os três últimos, finalmente, sobre geometria espacial.

Como curiosidade, no Livro I estão proposições que aparecem na maioria dos cursos e livros de geometria plana da escola de 2º grau. Lá podem ser encontrados teoremas sobre congruência de triângulos, construções simples com régua e compasso, desigualdades de ângulos e lados de triângulos, propriedades de retas paralelas etc. O Livro XI trata de proposições elementares de geometria no espaço.

Vejamos agora dois exemplos de apresentação de teoremas geométricos calcados no modelo euclidiano, tal como costumam aparecer nos nossos livros didáticos.



1) Este primeiro exemplo da geometria plana refere-se a desigualdades no triângulo. Em Dolce (1980, p. 46), encontra-se, aproximadamente, como foi apresentado aqui.

Teorema: Ao maior lado opõe-se o maior ângulo. Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes, e ao maior deles está oposto o maior lado.

HIPÓTESE		TESE
$\overline{BC} > \overline{AC}$	$\rightarrow$	$B\hat{A}C > A\hat{B}C$
ou		ou
a>b		$\hat{A} > \hat{B}$

DEMONSTRAÇÃO

Considere o ponto tal $P \in \overline{BC}$ que $\overline{CP} = \overline{CA}$

$\overline{BC} > \overline{AC}$ (por hipótese) → P é interno a $C\hat{A}B$ → $C\hat{A}B > C\hat{A}P$ (I)

$\triangle\ CAP$ isósceles de base $\overline{AP}$ → $C\hat{A}P = C\hat{P}A$ (II)

De (I) e (II) → $C\hat{A}B > C\hat{P}A$ (III)

$C\hat{P}A$ ângulo externo no $\triangle\ ABP$ → $C\hat{P}A > A\hat{B}P = A\hat{B}C$ (IV)

De (III) e (IV) temos que:

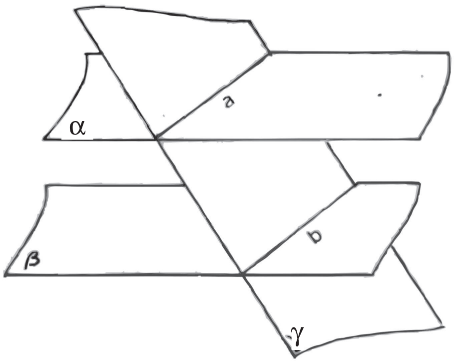
$C\hat{A}B > C\hat{P}A > A\hat{B}P = A\hat{B}C,$

ou seja, $C\hat{A}B > A\hat{B}C$ ou $\hat{A} > \hat{B}$ (tese)

Assim, como queríamos demonstrar, a tese é deduzida a partir da hipótese inicialmente considerada.

2) Este segundo exemplo, da geometria espacial, refere-se a paralelismo entre planos. Encontra-se em Dolce (1978, p. 26).

Teorema: Se dois planos paralelos interceptam um terceiro, então as interseções são paralelas.



HIPÓTESE	TESE
$\alpha \,//\, \beta$; $\alpha \cap \gamma = a$; $\beta \cap \gamma = b$	$a \,//\, b$

DEMONSTRAÇÃO

Primeiro caso: $\alpha = \beta$ (coincidentes)

$\alpha = \beta$ (por hipótese) $\Rightarrow a = b \Rightarrow a \,//\, b$ (tese)

Segundo caso:

$\alpha \neq \beta$ (por hipótese) $\Rightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$

$a \subset \alpha, b \subset \beta \Rightarrow a \cap b = \varnothing$

$a \subset \gamma, b \subset \gamma \Rightarrow a \,//\, b$ (tese)

CONCLUSÃO

A arquitetura, a agricultura, a contabilidade agrícola, a astronomia, entre outras atividades, propiciaram a construção inicial de um conhecimento geométrico que passa a marcar as preocupações matemáticas, estéticas, religiosas, científicas, epistemológicas e filosóficas do mundo clássico. A matemática ganha, com este *boom* de formas, uma feição geométrica bastante desenvolvida, uma autonomia própria que faz surgir uma gama de problemas específicos – uma "linha de investigação".

Todo esse conhecimento geométrico clássico ganha sistematização e acabamento fino nas mãos de Euclides de Alexandria e de *Os elementos* (aproximadamente 300 aC), o qual ergue sua obra sobre duas vigas fortes e básicas do pensamento clássico: o idealismo platônico e a lógica aristotélica, que, reciprocamente, também estão prenhes do modelo dos geômetras.

Percebe-se assim a articulação existente entre idealismo, lógica e geometria euclidiana, em um processo tal que nos é impossível apontar uma causa e um efeito, mas onde se configura um condicionamento mútuo, caracterizando um momento histórico.

Extrair consequências lógicas de hipóteses ideais, independente da preocupação com a autossustentação das próprias hipóteses significa pensar "como geômetra", como diz Platão (1987, p. XV) em *Fédon*.

Já vimos alguns exemplos típicos da apresentação euclidiana da Geometria.

Por um lado, a beleza e concisão deste modelo é inegável; por outro, o afastamento da realidade material (idealismo platônico) e a obtenção de resultados prioritariamente através de processos dedutivos (lógica formal aristotélica) que tornam o percurso extremamente artificial, não o recomendam para a ação pedagógica.

É responsabilidade do educador mostrar, descrever, apresentar o processo efetivo de construção dos conceitos e teorias, e não apenas o produto formalizado, pasteurizado, limpo e acabado, sem contradições.

É preciso apresentar a teoria, não só enquanto instrumento ou meio de produção (e transformação da realidade), mas também como construção surgida no próprio processo de produção, ou seja, como conjunto de relações sociais de produção. Isto é o que significa entender criticamente.

Como fazer isso? Ora, através de formas efetivas de uma *práxis* pedagógica histórico-crítica, voltada para a transmissão do conhecimento geométrico (sistematizado e acumulado pelo homem em sua viagem através dos tempos e sociedades); constituirão, sem sombra de dúvida, se redigidos, interessantes artigos para a prática educativa (que tal o leitor tentar escrevê-los?). Não deixaremos, todavia, de fazer algumas rápidas considerações – talvez bastante esperadas – sobre tal *práxis.*

Para crianças menores, em idade pré-escolar ou em processo de alfabetização, é preciso concretizar efetivamente o processo: comparar tamanhos de objetos; medir com palmos, dedos, pés, o comprimento do próprio corpo; comparar formas de objetos concretos; analisar posições relativas de uma maneira geográfica; gradativamente, para crianças maiores, sulcar a terra, construir instrumentos para medir, traçar e/ou dar forma, medir-abstrair-concretizar, e novamente abstrair e novamente concretizar com desenhos, projetos, construções, etc. Afinal, não foi assim também na infância da história da humanidade? O caminho da história é o caminho mais curto e mais efetivo para a aprendizagem: foi pisado por milhares de homens para sairmos do conhecimento sincrético para um conhecimento cada vez mais sintético, e, permeando a *práxis,* eficaz.

Concretamente, em qualquer idade, nenhum estudo geométrico pode prescindir das ações de perceber (por exemplo, uma forma), conceber (por exemplo, um instrumento ou um projeto), representar (desenhar, talvez, o projeto de uma casa) e construir (um cubo, uma fita de Möebius, ou uma casa!). Como no trabalho de um artesão.

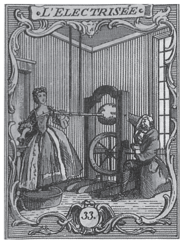
Essas ações não são etapas sequenciais, mas partes de um todo inseparável, onde cada parte antecede todas as demais e vice-versa.

Imaginar, cortar, construir, intuir, pegar, perceber, representar, construir, ligar, esticar, e de novo cortar, imaginar, intuir, costurar... crianças, jovens e adultos – isso não é brincadeira (só) de criança.

O trabalho dividido – alguns planejam, concebem e idealizam; outros executam, constróem, usam as mãos, tornam sensível – leva a uma sociedade dividida, de classes antagônicas, e tristemente aprisionada na incompletude do ser humano.

A história privilegiou o modelo de Euclides – tratemos agora de infletí-la, criando novos caminhos para a matemática na história.

Capítulo Quatro



GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Em coautoria com
André Luís Mattedi Dias

INTRODUÇÃO

Ao iniciarmos um texto sobre Geometrias não-euclidianas, achamos necessárias algumas elucidações iniciais a respeito de Euclides e sua obra, *Os elementos.* Tais considerações nos conduzirão gradativamente ao significado e alcance das Geometrias Não-euclidianas.

Euclides (em tomo de 300 a.C.) foi, juntamente com Arquimedes e Apolônio, um dos principais expoentes do Museu de Alexandria, o mais importante centro de investigação e divulgação do conhecimento após a conquista da Grécia por Alexandre.

Sua obra, *Os elementos,* representou o mais alto grau de desenvolvimento da matemática grega. Neste compêndio de treze volumes foi estruturado e sistematizado todo o conhecimento matemático da época, o que compreendia a matemática egípcia, a mesopotâmica e a matemática grega. O mérito, entretanto, não estava nos conteúdos apresentados, que já eram conhecidos, mas na metodologia empregada na compilação dos mesmos.

Como vimos no texto anterior, Euclides utilizou de maneira rigorosa e continuada a lógica estruturada e desenvolvida por Aristóteles, adequando os conhecimentos matemáticos de então às exigências da perfeição nas ideias e na forma, que impregnavam a filosofia idealista platônica predominante.

Os elementos atinge uma celebridade e uma influência tão grande que somente a *Bíblia* o teria suplantado. De fato, a Geometria plana de Euclides influenciou tão decisivamente a cientistas e filósofos, ao longo dos últimos 20 séculos, que foi considerada o mais perfeito paradigma da ciência. Até os primórdios do século XX, seus escritos ainda faziam parte dos textos obrigatórios no ensino médio.

Tamanha celebridade se deve ao filho da lógica aristotélica, ao método dedutivo ou axiomático empregado por Euclides. Ele fixou dez afirmações primitivas, não demonstradas, pois consideradas autoevidentes, derivando destas, com raciocínios lógico-dedutivos, todos os teoremas, isto é, todas as verdades comprováveis da Geometria plana. Desta forma, e isso constitui-se na essência do método partindo-se da verdade e da consistência (não-contradição) das afirmações primitivas, admitia-se a verdade completa e a consistência de toda Geometria.

Justamente esses ideais, de verdade completa e absoluta e de consistência, aliados ao próprio conhecimento matemático obtido, foram os responsáveis pela grande aceitação e até mitificação da Geometria euclidiana.

Filósofos, como Spinoza (1632-1677) e Kant (1724-1804), assumiram-na como paradigma da ciência ideal e perfeita. A *Ethica more geometrico demonstrata* de Spinoza tem argumentos em forma de teoremas deduzidos de definições e axiomas, enquanto que Kant colocou a Geometria euclidiana plana como a única verdade absoluta e imutável sobre o espaço físico real.

AS AFIRMAÇÕES PRIMITIVAS DE EUCLIDES

As dez afirmações primitivas de Euclides foram divididas em dois grupos de cinco: os postulados, que tratam de temas essencialmente geométricos, e os axiomas, mais gerais que os primeiros. São eles:

Os axiomas de Euclides

1) Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

2) Se parcelas iguais forem adicionadas a quantias iguais, os resultados continuarão sendo iguais.

3) Se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais.

4) Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.

5) O todo é maior que as partes.

Os postulados de Euclides

1) Uma linha reta pode ser traçada de um para outro ponto qualquer.

2) Qualquer segmento de reta finito pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.

3) Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à distância dada.

4) Todos os ângulos retos são iguais entre si.

5) Se uma linha reta corta duas outras linhas retas de forma a que os dois ângulos internos de um mesmo lado sejam (em conjunto, ou soma) menores que dois ângulos retos, então as duas linhas retas, se forem prolongadas suficientemente, encontram-se num ponto no mesmo lado em que os dois ângulos são menores que dois ângulos retos.

DISCUSSÃO DO QUINTO POSTULADO

A simples leitura dos cinco postulados e dos cinco axiomas já recomenda uma atenção especial ao quinto postulado. Por quê?

A sua forma o diferencia dos outros, uma vez que é bem mais complicada e extensa. Além disto, não parece tão óbvio e tão evidente quanto os demais. Foram estas características que, inicialmente, chamaram a atenção dos matemáticos gregos e árabes.

A credibilidade de uma teoria axiomática, isto é, dos teoremas, depende diretamente da credibilidade dos axiomas e postulados que os precedem. Para a Geometria euclidiana plana era uma questão crucial superar todas e quaisquer dúvidas que pairassem sobre a verdade evidente do quinto postulado, pois não sendo autoevidente, tornava-se necessária sua demonstração, derivando-a dos outros quatro postulados. E durante mais de vinte séculos – 2.000 anos!!! – matemáticos da mais renomada estirpe tentaram, em vão, a sua demonstração.

Um dos métodos utilizados na tentativa de mostrar a independência do quinto postulado em relação aos demais – a demonstração direta como teorema – já foi citado acima. Outra técnica consistia em substituí-lo por outro princípio mais simples e evidente, tentando deduzi-lo daí.

As tentativas de demonstração, via de regra, continham erros lógicos ou, de maneira imediata, verdades não demonstradas, tão pouco evidentes quanto o próprio quinto postulado.

Eis aqui três postulados alternativos que poderiam substituir a redação original, sem enfraquecer o sistema, isto é, possibilitando a dedução dos mesmos teoremas:

1) Por um ponto fora de uma reta pode-se passar uma única paralela à reta dada.[1]

2) A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a dois ângulos retos (180°).

3) Três pontos não colineares determinam um círculo.

Desta maneira, a questão relativa ao quinto postulado permanecia.

Outras motivações, distintas da questão da forma e da verdade, surgiram no questionamento do quinto postulado e, com o tempo, a seguinte pergunta se tornou inevitável: "Que questão tão importante e de seguinte pergunta se tornou inevitável": "Que questão tão importante e de tão difícil solução é esta, que tantos e tão renomados matemáticos não conseguiram resolver?"

Uma dessas motivações, como veremos no tópico a seguir, vem da primeira forma alternativa, que balizou indevidamente o quinto postulado de postulado das paralelas, já que o conceito de paralelismo envolve preocupações com o infinito. Como admitir, sem a devida comprovação, que retas paralelas não se encontrarão, nem no infinito? Esta afirmação era muito difícil de ser aceita como autoevidente, como óbvia, principalmente em épocas em que o conceito de infinito, além de não ser inequívoco, envolvia os mais diversos sentimentos e valores.

[1] Ocupou o lugar de quinto postulado numa geometria euclidiana do século XVIII. A forma é bastante difundida e, por este motivo, até hoje chamamos o quinto postulado de postulado das paralelas.

A INDEPENDÊNCIA DO QUINTO POSTULADO

Depois de tantos fracassos, os matemáticos haveriam de pensar uma nova forma de tratar o problema. Foi o jesuíta italiano Girolamo Sacchieri (sec. XVIII) o primeiro a se aproximar da sua resolução. Ele utilizou uma técnica indireta de demonstração, a redução ao absurdo, com o intuito de mostrar a dependência do quinto postulado em relação aos demais. Ele admitiu como verdadeiros os quatro primeiros postulados e negou o quinto. Assim esperava chegar a uma contradição, uma incompatibilidade entre as consequências da negação e os primeiros postulados, o que confirmaria o quinto postulado como uma consequência dos demais.

Sacchieri não foi bem-sucedido no seu objetivo mas, sem perceber, conseguiu resultados importantes, que mais tarde seriam declarados teoremas fundamentais de uma nova Geometria.

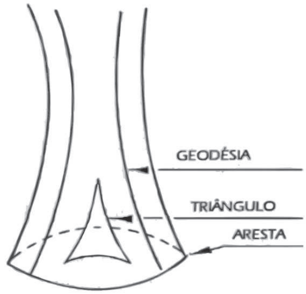
De fato, somente no século XIX os matemáticos se aperceberam de que o quinto postulado é independente dos outros quatro. Sem dúvida, as tentativas de demonstração por absurdo levaram a esta descoberta, pois ao derivar consequências da negação do quinto postulado, os matemáticos, conscientemente ou não, desenvolveram o corpo de uma nova Geometria. Três matemáticos europeus, sem nenhum intercâmbio e, provavelmente, sem conhecimento dos trabalhos de Sacchieri, desenvolveram novas Geometrias.

O alemão Cari Friedrich Gauss (1777-1855) foi o primeiro a escrever algo sobre estas novas ideias, embora não tivesse publicado tais escritos, temeroso das reações pouco receptivas da comunidade científica. Hoje sabemos que Gauss foi quem primeiro conheceu as possibilidades lógicas de uma nova Geometria, à qual chamou Geometria não-euclidiana, pois negava o quinto postulado.

Segundo o professor Manfredo P. do Carmo (1987), Gauss estudou as superfícies de curvatura negativa constante e provou que se considerarmos como reta a curva de menor comprimento (medido na superfície) que liga dois pontos então a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície é menor que dois ângulos retos (180°) e a diferença entre essa soma e dois retos é proporcional à área do triângulo. A constante de proporcionalidade é precisamente o valor absoluto da curvatura e tais curvas são chamadas geodésicas.

As superfícies de curvatura negativa (figura seguinte) tiveram grande importância na discussão e formulação das novas ideias a que nos referimos anteriormente. Simultânea e independentemente, o húngaro Janos Bolyai (1802-

1860) e o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856) desenvolveram um mesmo tipo de Geometria não-Euclidiana.



Ambos, após muitos esforços em vão, chegaram à conclusão da independência do postulado das paralelas e publicaram, respectivamente, *Ciência absoluta do espaço e Pangeometria,* que afirmavam a possibilidade de traçar várias paralelas por um ponto fora de uma reta dada.

É preciso dizer que até então, ao longo de vinte séculos, a geometria euclidiana, apesar das discussões em torno do quinto postulado e de todos os demais desafios, permanecia como suprema conquista da Matemática. Mas no século XIX as discussões que envolviam os fundamentos da Matemática, a Lógica e as Geometrias não-euclidianas, mostraram como subproduto que a Geometria euclidiana, apresentada em *Os elementos,* continha falhas lógicas. Já na demonstração da Proposição l estas falhas começam a aparecer, e quase não há dúvidas de que são devidas aos desenhos ilustrativos que acompanhavam as demonstrações[2]. Tais esboços induziam hipóteses implícitas que levavam a certas conclusões, mas que não eram decorrentes apenas da lógica formal.

Estas descobertas, em hipótese alguma, desmereceram o trabalho de Euclides. Mas este tipo de problema foi total e definitivamente superado por G. F. B. Riemann (1826-1866), matemático alemão, que em célebre conferência de defesa de tese, na Universidade de Göttingen, propunha uma visão global e revolucionária da Geometria, considerando-a como o estudo de variedades de qualquer número de dimensões em qualquer tipo de espaço.

[2] A proposição l do Livro Primeiro trata da construção de um triângulo equilátero dado a um dos lados. Em sua demonstração Euclides constrói duas circunferências de mesmo raio cujos centros são as extremidades do segmento AB, lado conhecido do trângulo. Então, Euclides assume a existência de um ponto C, comum às circunferências e terceiro vértice do triângulo. Mas qual a base lógica para tal afirmação? Em que axioma Euclides se baseia para assumir a existência do ponto C? A conclusão de Euclides é, efetivamente, consequência do desenho ilustrativo por ele usado, já que não segue, mediante uso exclusivo da lógica formal, que existe um e um só ponto como C.

De acordo com esta proposta, a Geometria não precisa obrigatoriamente tratar de pontos, de retas, de planos e de distâncias, no sentido a que nos acostumamos, mas de sequências que são combinadas segundo certas regras, que definem inclusive uma nova ideia de distância, que passou a se chamar métrica. Era a suprema abstração da Geometria que se libertava das limitações da percepção espacial humana e que mergulhava nas abstrações da visão espacial da Lógica. Não era mais possível o traçado de esboços, que induziam às ideias euclidianas.

No próximo tópico analisaremos o contexto em que surgiram os questionamentos acima.

O SUBSTRATO SOCIOPOLÍTICO E ECONÔMICO

A segunda metade do século XIX é marcada por uma nova expansão e pela consolidação da economia capitalista, agora por todo o mundo.

> Foi o triunfo de uma sociedade que acreditou que o crescimento econômico repousava na competição da livre iniciativa privada, no sucesso de comprar tudo no mercado mais barato (inclusive trabalho) e vender no mais caro. Uma economia assim baseada, e portanto repousando naturalmente nas sólidas fundações de uma burguesia composta daqueles cuja energia, mérito e inteligência elevou-os a tal posição, deveria – assim se acreditava – não somente criar um mundo de plena distribuição material, mas também de crescente felicidade, oportunidade humana e razão, de avanço das ciências e das artes, numa palavra, um mundo de contínuo e acelerado progresso material e moral. (HOBSBAWN, 1982, p. 21)

O mundo grandemente expandido e unificado com um progresso técnico-industrial jamais visto, sem precedentes, articulado a uma imensa quantidade de novos resultados científicos, criou condições favoráveis para um grande movimento de sistematização de muitas áreas de saber, destacando-se a Matemática para nossos fins.

Pois bem, com a consequente profusão de resultados científicos vem a necessidade de ordenar também a própria ciência: agregar os conhecimentos afins, estabelecer claramente os princípios fundamentais de cada área, ordenar os resultados já obtidos, preencher as possíveis lacunas existentes e sistematizar racionalmente (raciocínio dedutivo e ordenação formal). Isto se transforma em uma concepção científica largamente dominante.

Tal processo de sistematização de conhecimento dá-se de maneira generalizada em muitas ciências. Apenas para citar alguns exemplos, tivemos: na Biologia, Charles Darwin (1809-1882) com a teoria da evolução das espécies; na Química, Mendeleiev (1834-1907) e a tabela periódica dos elementos; na Física, James Clerk Maxwell (1831-1879) com a teoria eletromagnética da luz; nas Ciências Humanas, Karl Marx (1818-1883) e o materialismo histórico. Os diversos e amplos fragmentos das matemáticas caminhavam no sentido de uma sistematização crescente que culminaria, em um momento posterior, com a grandiosa tentativa de sua unificação.

O estupendo desenvolvimento econômico, como já dissemos, articulado com a fertilidade técnica e científica, impressionaram mesmo os homens cultos, intelectuais e cientistas da última metade do século passado, criando a ideia de que tais conquistas eram definitivas. Contudo, em que pese o desenvolvimento global das ciências, alguns campos pareciam mais adiantados que outros, ou melhor, mais "bem formados", mais ordenados e sistematizados.

Entre outras coisas, ressaltava a invejosa capacidade de produzir tecnologia da física clássica newtoniana. Não havia espaço para criticar os princípios deste modelo, já que sua força criava a ilusão de se ter atingido os limites do conhecimento.

Dessa forma, o paradigma mecanicista newtoniano (universo absoluto, determinista e fácil de medir) impregnou todas as ciências, tendo vida mais duradoura que a própria teoria que o gerou, como sabemos. Na Matemática, as abstrações exuberantes pareciam afastá-la dessa aproximação com a Física. Vejamos as considerações de um historiador sobre a questão:

> O estranho, abstrato e logicamente fantástico mundo das matemáticas permaneceu de certa forma isolado, tanto no público geral como do científico, talvez mais do que antes, já que seu maior contato com a física (através da tecnologia física) parecia, neste estágio, ter menos utilidade para as abstrações avançadas e aventurosas que nos grandes dias da construção da mecânica do espaço. O cálculo, sem o qual as realizações da engenharia e das comunicações do

> período não teriam sido possíveis, estava então bem mais atrás da móvel fronteira da matemática. (HOBSBAWN, 1982, p. 263)[3]

O exemplo por excelência destas realizações “abstratas” da Matemática é justamente a criação das Geometrias não-euclidianas.

Tais realizações extraordinárias e originais não tiveram sua utilização efetiva na compreensão do mundo empírico senão no final do século, com uma nova era revolucionária da Física – a física relativística. Este problema da articulação entre as necessidades econômicas e o conhecimento empírico com as abstrações científicas, em especial as abstrações matemáticas, é bastante importante, mas, muitas vezes, mal compreendido; sendo assim, trataremos da questão mais à frente. Antes, contudo, queremos enfatizar que de maneira geral, do ponto de vista metodológico, as ciências não divergiam significativamente, ou seja, não havia divergências de fundamentos. Um raro exemplo de controvérsias filosóficas nos alicerces das ciências, significativo para nosso estudo, pois se dá na Matemática e relaciona-se com as Geometrias (o velho problema do infinito) pode ser encontrado na querela entre Kronecker (1839-1914) e, do outro lado, Weirstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916) e Cantor (1845-1918).

Em que pese o significado específico do contraexemplo acima, progredir sempre, sem controvérsias, era o lema da ciência. As ciências em geral não pareciam se ocupar de questões acerca da justeza, correção e eficiência dos trilhos usados no seu avanço constante.

Mas nas matemáticas, ao se tentar estabelecer clara e precisamente seus princípios, abriram-se novas portas, até então não imaginadas. Em síntese, a expansão capitalista propiciou o substrato perfeito para a tentativa de ordenação formal do acervo de conhecimentos acumulados naquele período, aparentemente inabaláveis, que nas matemáticas se consubstanciou no início de uma grande tentativa de sistematização, e que tem como resultado inicial e imediato a construção das Geometrias não-euclidianas.

[3] No século anterior ao que estamos estudando (séc. XVIII), Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), independentemente, criaram um poderoso instrumento matemático – o cálculo diferencial e integral, que possibilitou a construção da mecânica clássica, a construção da noção de espaço (de Newton) e as “realizações da engenharia e das comunicações” do século XIX, como afirma Hobsbawn (1982).

AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Podemos dizer que as descobertas e discussões do século XIX puseram por terra a afirmação de que a Geometria euclidiana plana é a única, absoluta e imutável verdade acerca do espaço físico real. Da negação do quinto postulado surgiram as chamadas Geometrias não-euclidianas, como também foram desenvolvidas novas formulações da Geometria euclidiana plana baseadas em novos conjuntos de axiomas, que superavam os erros lógicos descobertos em *Os elementos.*

Veja no apêndice o quadro comparativo onde são destacadas as principais semelhanças e diferenças entre a Geometria euclidiana (também chamada parabólica), a Geometria de Lochevsky-Bolyai (chamada hiperbólica) e a proposta por Gauss-Riemann (chamada esférica ou elíptica).[4] A seguir, analisaremos conceitualmente tais Geometrias.

INTERPRETAÇÕES DAS GEOMETRIAS

Como vimos acima, as falhas lógicas da Geometria euclidiana plana foram, em grande parte, devidas às ilustrações que em *Os elementos* acompanham cada uma das proposições a demonstrar.

Para se escapar das influências dos desenhos, que permitiam conclusões não provenientes dos postulados, portanto alheios ao processo dedutivo lógico formal, a Geometria passou a ser encarada a partir do final do século XIX de uma forma totalmente abstrata. Em que consiste esta forma?

A Geometria euclidiana é um sistema interpretado, já que Euclides atribuia significados definidos aos termos que empregava, permitindo, inclusive, relações explícitas com os objetos do mundo material.[5]

Contudo, a Geometria pode ser encarada como um sistema não interpretado. Esta é a nova forma a qual nos referimos, desprezando-se o significado dos termos primitivos e, consequentemente, a verdade ou falsidade dos axiomas e postulados. Como podemos saber se um axioma é verdadeiro ou falso se seus termos constituintes não possuem significado? Neste caso, o que importa é verificar se as demonstrações dos teoremas são corretas do ponto de vista lógico.

[4] Riemann também propôs a geometria diferencial ou geometria das pequenas vizinhanças.

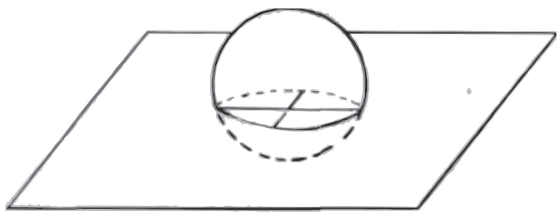
[5] Um ponto euclidiano pode ser visto como uma estrela no céu ou um piquete de madeira cravado no chão. Uma reta pode ser vista como uma corda ou um arame esticado ou ainda como o encontro de duas paredes.

Nessa segunda forma de encarar a Geometria e seus fundamentos, o matemático não tem como preocupação central a vinculação do conhecimento produzido com o mundo material, mas sim a coerência lógica deste conhecimento. Mas, como é possível a Geometria sem a relação com o mundo material?

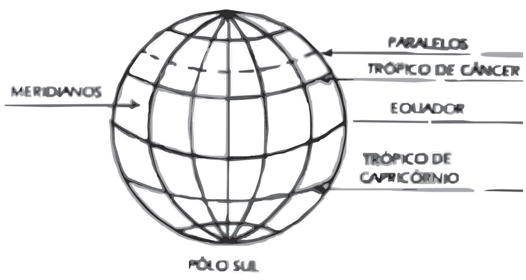
Responderemos a esta pergunta com os exemplos das Geometrias não-euclidianas, a hiperbólica (Lobachevsky-Bolyai) e a elíptica-esférica (Gauss-Riemann). Ambas foram desenvolvidas como teorias não interpretadas. No entanto, em momentos posteriores à elaboração das mesmas, outros matemáticos cuidaram de estabelecer uma correspondência entre essas teorias e o mundo material, apresentando suas interpretações.

INTERPRETAÇÃO DA GEOMETRIA DE RIEMANN-GAUSS

A Geometria de Riemann-Gauss é aplicável a uma superfície esférica. Embora a Terra seja levemente achatada nos polos, para concretizar nossa discussão vamos considerá-la esférica. Assim, chama-se círculo máximo à interseção de um plano que passa pelo centro da Terra com a sua superfície, como na figura a seguir.

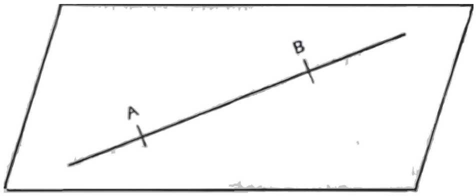


Todos os meridianos que passam pelos Polos Norte e Sul são círculos máximos. O Equador também é um círculo máximo.

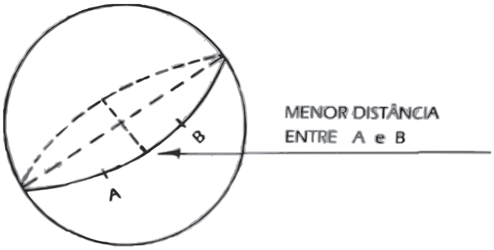


Já os demais paralelos, ou os Trópicos de Capricórnio e Câncer não são círculos máximos. Nesta Geometria esférica temos como elementos primitivos os planos (superfície esférica); as retas (círculos máximos) e os pontos.

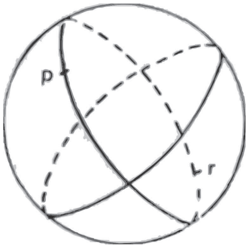
Na Geometria euclidiana plana, a menor distância entre dois pontos é obtida percorrendo-se o segmento de reta que une os dois pontos, ou seja, a distância de A até B, que é dada pela medida do segmento AB.



Analogamente, na Geometria esférica em questão, a menor distância entre dois pontos é dada percorrendo-se o segmento de reta que une os dois pontos. Observe, contudo, que neste caso a reta é o círculo máximo que passa pelos dois pontos A e B.



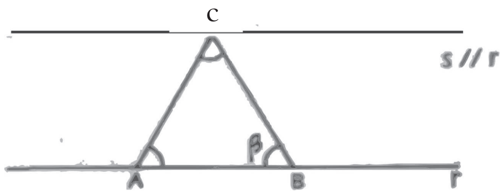
O postulado das paralelas de Euclides não vale na Geometria esférica, já que por um ponto P da superfície esférica fora de uma reta r (círculo máximo) não se pode traçar nenhuma paralela à reta dada.



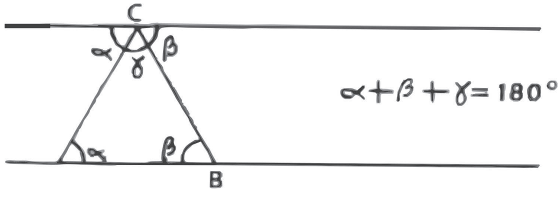
Note que duas retas (círculos máximos) quaisquer sempre possuem dois pontos comuns diametralmente opostos.

Muito bem, construimos uma Geometria em que não vale o postulado das paralelas de Euclides. Uma Geometria não-euclidiana! Algumas consequências são notáveis. Todos nós sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Veja sua demonstração.

Seja o trângulo ABC, traça-se a reta r por AB, traça-se a reta s, paralela a r, por C. Como as retas são paralelas, os ângulos alternos internos são iguais. Portanto, a soma dos ângulos internos é 180°.

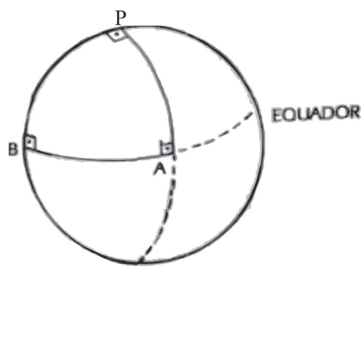


Contudo, este resultado não vale para a Geometria esférica. Você sabe por quê? Justamente porque utilizamos o postulado das paralelas na demonstração do teorema da soma dos ângulos de um triângulo.



Este resultado só vale, desta forma, para a Geometria euclidiana.

Veja um contraexemplo da Geometria esférica. O triângulo PAB tem AB sobre o Equador, PA sobre o Meridiano de Greenhwich e PB sobre o meridiano 90°.



Como os meridianos são perpendiculares ao Equador, os ângulos A e B são retos 90°. Além disso, os meridianos formam também um ângulo de 90°. Então, a soma dos ângulos internos deste trângulo esférico é:

$A + B + C = 90° + 90° + 90° = 270°$

De forma geral, a soma dos ângulos internos dos triângulos da Geometria esférica é sempre maior que 180° e proporcional à área do triângulo.

Para finalizar, vejamos a relação entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro nas duas Geometrias aqui mencionadas.

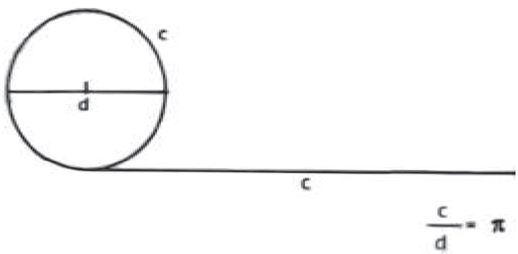
Na Geometria euclidiana, sabemos que a relação entre o comprimento c e o diâmetro d de uma circunferência vale π.

c = comprimento da circunferência

d = diâmetro da circunferência

$c = \pi d$

Tomemos um caso particular da Geometria esférica, representado na figura abaixo:



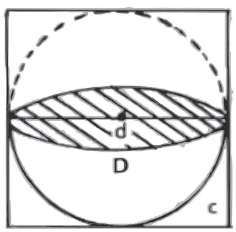
D = diâmetro da circunferência na Geometria esférica

d= diâmetro da circunferência no plano do papel

c= comprimento da circunferência

$$D > d \rightarrow \frac{C}{D} < \frac{C}{d} = \pi$$

$$\text{Logo, } \frac{C}{D} < \pi$$



Assim, a razão entre o comprimento da circunferência dada e o seu diâmetro esférico é menor que π como ocorre na Geometria de Riemann-Gauss.

As Geometrias esférica e euclidiana são casos particulares de uma Geometria curva geral. No caso da Geometria euclidiana, a curvatura do espaço é nula. Em termos de utilização concreta, o espaço curvo de Riemann serve de modelo para a Teoria da Relatividade de Einstein. Nesta teoria, um corpo celestial pode ser considerado como o centro de uma seção do espaço curvo; a massa do corpo provoca uma diferença de espaço (curvatura), que é a causa dos efeitos gravitacionais. As "retas" deste espaço curvo são chamadas geodésicas.

RELATIVA AUTONOMIA DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

O conhecimento científico desenvolve-se de duas maneiras básicas, diferentes mas articuladas.

A primeira maneira de produção do conhecimento científico pode ser compreendida diretamente na determinação imediata das necessidades materiais: o conhecimento geométrico primitivo surge de problemas concretos de medição, especificação de formas e determinação de posições, conforme vimos no texto anterior.

A segunda maneira está associada aos desenvolvimentos internos da própria ciência.

Questões teóricas surgem em decorrência da solução de problemas específicos como, por exemplo, o problema da natureza do quinto postulado, possibilitando a criação de Geometrias não-euclidianas, pelo menos, aparentemente afastadas do mundo físico.

Contudo, uma análise mais acurada dessa problemática mostra-nos que há, de fato, unidade nas maneiras diferentes que o conhecimento encontra para se desenvolver.

Na primeira forma de criação matemática, é evidente que o conhecimento surge enquanto abstração direta do empírico; a relação da dimensão teórica com a dimensão empírica ou prática, isto é, a determinação do conhecimento pela realidade concreta é inquestionável.

Já na segunda forma, a teoria produzida parece completamente desvinculada da instância material, o que é um engano, já que sua autonomia é apenas relativa. Vejamos.

Em primeiro lugar, os desenvolvimentos teóricos oriundos do desenvolvimento intrínseco da própria teoria contém, geneticamente, as características básicas daquela totalidade teórica, que, por sua vez, possuem o caráter da totalidade concreta – e esta inclue o empírico.

Em segundo lugar, a história da ciência tem mostrado que muitas construções matemáticas oriundas de um desdobramento lógico-dedutivo (axiomático) de um certo estágio de conhecimento teórico terminam por ser utilizadas como modelos interpretativos do mundo físico, como algumas Geometrias não-euclidianas, o que significa mais uma vez que sua articulação efetiva com o empírico sempre existiu, apenas não se mostrava evidente.

Assim, enquanto as teorias surgem inicialmente de problemas empíricos, seus desdobramentos teóricos intrínsecos posteriores podem ser chamados de metaempíricos, pois contêm o próprio mundo físico, em uma relação de segundo nível (de possibilidades teóricas), ou em uma relação de primeiro nível (quando surgem as utilizações diretas da teoria).

Dessa forma, as Geometrias não-euclidianas surgem do desenvolvimento teórico matemático relativamente autônomo. Sua articulação com o concreto, no início apenas possível, é hoje uma realidade, por exemplo, com a Teoria da Relatividade.

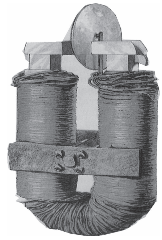
APÊNDICE

QUADRO COMPARATIVO ENTRE GEOMETRIA PARABÓLICA, HIPERBÓLICA E ELÍPTICA

Geometria Parabólica (Euclidiana)	Geometria Hiperbólica (Lobarchevsky-Bolyai)	Geometria Elíptica ou Esférica (Gauss-Rieman)
1º Postulado: Dois pontos determinam uma ou mais de uma reta.	Idem	Dois pontos determinam uma ou mais de uma reta. (ex: polos de uma esfera)
2º Postulado: Toda reta é infinita.	Idem	As retas são finitas.
3º Postulado: Um ponto (centro) e uma distância (raio) determinam um círculo.	Idem	Idem
4º Postulado: Todos os ângulos retos são iguais entre si.	Idem	Idem
5º Postulado: Um ponto não pertencente a uma reta determina uma única paralela reta dada.	Um ponto não pertencente a uma reta determina mais de uma paralela, à reta dada.	Um ponto não pertencente a uma reta dada não determina paralelas à reta dada.
1ª Consequência: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos (180º).	A soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que dois retos (180º) e a diferença é proporcional à área do triângulo.	A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois retos (180º) e a diferença é proporcional à área do triângulo.
2ª Consequência: a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência igual a π.	A razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência é maior que π e aumenta com a área da circunferência.	A razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência é menor que π e diminui com o aumento da área da circunferência.

Fonte: Adaptado pelos autores.

Capítulo Cinco



COM O OLHO NA QUARTA DIMENSÃO

A Geometria euclidiana é uma boa aproximação do nosso mundo físico, em certos campos bem determinados. Por exemplo, para fazer um mapa da cidade de Salvador, pode-se usar projeção plana, mas não para o mapa das Américas; precisamos, neste caso, usar projeção esférica, pois as deformações seriam monstruosas se usássemos projeção plana. Para medir distâncias atômicas ou siderais, não podemos utilizar a Geometria euclidiana, pois não o permite o comportamento do espaço nestes limites. As proposições dessa Geometria têm validade lógica, se corretamente deduzidas dos postulados ou axiomas, mas sua validade empírica depende do contexto em que é utilizada.

Do ponto de vista da validade lógica, podem-se reunir alguns entes e algumas relações, declarando-as indefiníveis, e verificar que não são contraditórias entre si, e, não importa que entes ou relações sejam esses, se têm os pilares de um novo edifício geométrico formal.

Se é utilizável ou não, não importa a este ponto de vista; basta que sejam válidos logicamente. Assim, este novo corpo pode ser útil para utilizações técnicas ou não. Se não o for, certamente não passa de um jogo lógico. Por exemplo, a Geometria euclidiana lida com pontos sem dimensão, limites sem largura e planos sem espessura: idealizações que não representam, de maneira precisa, nada que possamos perceber empiricamente. Dessa forma, não trata do espaço acessível aos nossos sentidos – por que seria, então, mais verdadeira que uma geometria de quatro dimensões?

Historicamente, a Geometria de Euclides, tanto pelo método que empregou, quanto pelos resultados alcançados, tornou-se uma escritura sagrada, de tal forma que novas propostas não eram nada mais que heresias. Essa Geometria tornou-se ainda mais forte com as noções de espaço apresentadas por Kant, que passa a exercer forte influência no cenário filosófico de modernidade. Por exemplo, a ideia de um espaço de três dimensões é completamente incompatível com a Geometria de quatro dimensões, ou com Geometrias não-euclidianas.

Quando então apareceram as primeiras utilizações diretas da Geometria de quatro dimensões na física matemática e, por tabela, no mundo físico representado pelos novos modelos físico-matemáticos, a heresia tornou-se milagre – batiza-se o tempo como a quarta dimensão! A quarta dimensão passa a ser uma realidade física, como um novo elemento químico, um novo híbrido fértil ou um recém-inventado dispositivo eletrônico.

A construção e aceitação do conceito de quarta dimensão se configura assim em um importante elemento para o surgimento de novas geometrias.

Uma outra questão importante para a concretização das novas ideias de espaço é colocada com o conceito de infinito em geometria.

Fala-se usualmente em espaço infinito, tanto na geometria quanto intuitivamente com o significado de espaço sem fim ou sem limites. Contudo, como os limites espaciais de um homem comum não têm se expandido além de alguns metros em seu entorno, o conhecimento da infinidade do espaço vem das teorias geométricas e não do que vemos efetivamente. As estrelas estão infinitamente longe, mas, em uma noite sem lua, um pirilampo pode provocar a mesma impressão de distância ou proximidade que uma estrela.

Atualmente, distingue-se espaço infinito de espaço ilimitado: O espaço representado por uma superfície esférica é finito, mas, já que não possui limites, ilimitado.

O espaço geométrico euclidiano difere radicalmente do espaço percebido por cada indivíduo comum. Nós nos movimentamos em pequenas distâncias e não percebemos a diferença de tamanho de gigantescas estrelas e pequenos insetos, e ainda temos pontos cegos na nossa visão. Assim, nosso universo individualmente percebido não é nem infinito, nem homogêneo, nem isotrópico; não é, portanto, um 'bom' espaço euclidiano.

Contudo, esta análise das propriedades do 'nosso espaço' são muito significativas, constituindo-se em reflexões que muito auxiliam a compreensão das geometrias não-euclidianas, cujo desenvolvimento na história das ciências foi um dos mais arrebatadores, abalando os alicerces da teoria geométrica que Euclides construiu e que parecia a única possível, eterna e absoluta.

Assim, o surgimento das geometrias não-euclidianas abala diversas crenças milenares, em especial a de que o Espaço obedece às relações de Euclides, e a de que as relações de Euclides são leis do Espaço.

O ponto central da construção das geometrias não-euclidianas está na elementar e acertada suposição de que o postulado das paralelas (quinto postulado de Euclides) não podia ser deduzido dos demais, justamente porque era apenas um postulado (como o próprio Euclides acertadamente havia *postulado).*

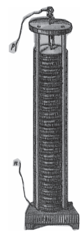
Assim, as geometrias não-euclidianas puderam surgir pela simples substituição do quinto postulado por outros 'aparentemente' absurdos, mas, na verdade, tão válidos quanto aquele. Os novos axiomas que substituíram o postulado de Euclides foram de dois tipos:

a) Por um ponto qualquer do plano não é possível traçar nenhuma paralela à reta dada;

b) Por um ponto qualquer do plano é possível traçar mais de uma paralela à reta dada.

A quarta dimensão parecia absurda. Seriam estes novos postulados tão absurdos quanto a ideia de quarta dimensão?

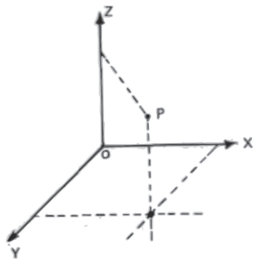
Capítulo Seis



ESPAÇOS: O EU(CLIDIANO) E O(S) OUTRO(S)

O objetivo deste trabalho é evidenciar a importância de uma "boa intuição geométrica" para uma introdução a alguns elementos de Topologia.

Embora a Topologia tenha se desenvolvido de forma algébrica, os passos iniciais deste ramo da matemática – sob o ponto de vista histórico, técnico e principalmente didático – sustentam-se em base geométrica. Além disso, as abstrações nascem do empírico; os algebrismos matemáticos, em nível avançado de abstração, têm raiz empírica, mesmo que remota e, como no velho ditado, conhecimento se adquire pela raiz. As suposições geométricas que faremos logo mais à frente são sugestivas a este respeito.



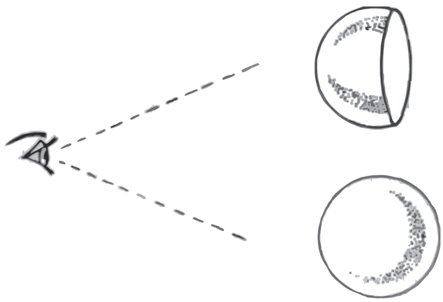
Usualmente fazemos referência a um ponto P do espaço E em que estamos mergulhados, associando-lhe três coordenadas (x, y, z).

As coordenadas (x, y, z) são projeções perpendiculares do ponto P aos eixos cartesianos ortogonais Ox, Oy, Oz. São números encontrados por um processo de medida. Em tal representação, o nosso espaço é considerado euclidiano tridimensional.[1]

A teoria da relatividade não considera este modelo de espaço E um bom modelo para grandes distâncias; da mesma forma, a teoria da mecânica quântica não considera R^3 um bom modelo de E para distâncias muito pequenas. Para grandezas compatíveis com a escala humana usual de medidas, parece ser um bom modelo, não só pela sua eficácia, mas também por ser o modelo mais simples, o que tem interesse prático.

Faremos agora algumas idealizações de interesse didático, primeiramente com os espaços euclidianos de três e duas dimensões, e a seguir, com outros espaços.

No espaço em que vivemos, os corpos têm três dimensões, mas a nossa visão dos mesmos nem sempre é tridimensional. Por exemplo, a nossa visão da lua é bidimensional. Também não é possível distinguir entre uma esfera e uma hemiesfera na situação esquematizada a seguir.



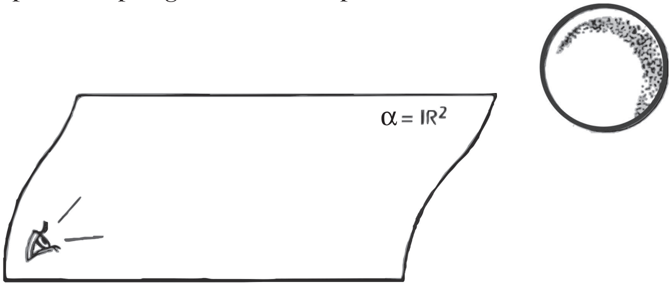
Somente movimentando-se o observador constrói a visão tridimensional do objeto. Não se pode ver atrás do objeto, a não ser que o circundemos.

Em síntese, um observador em R^3 "vê" apenas imagens planas, ou seja, de duas dimensões. A ideia de volume tridimensional é construída ou por movimento em torno do objeto, ou por memória deste movimento anteriormente efetuado.

[1] Espaço euclidiano tridimensional $R^3 = RxRxR$. Assim, P (x,y,z) é uma equivalência $E \sim R^3$. Como a reta R tem uma certa estrutura algébrica, esta estrutura é parcialmente herdada por R^3. Os espaços euclidianos têm uma definição calcada em uma estrutura vetorial, em um conjunto de operações (adição de vetores, produto escalar de vetores, multiplicação de um vetor por um escalar) e uma métrica precisa, que dá a distância entre vetores (ou entre pontos) do espaço. Como não é objetivo deste trabalho, não nos alongaremos mais nesta discussão.

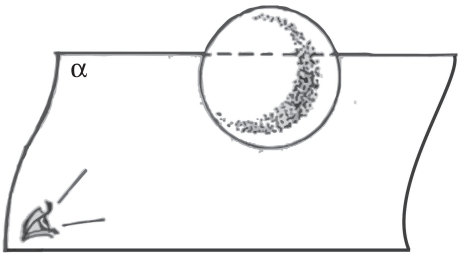
Imaginemos agora uma situação análoga em um espaço de duas dimensões, um mundo plano ($\alpha \sim R^2$), subespaço de R^3 (figura a seguir). Um observador que vive neste mundo plano tem no máximo duas dimensões – é um observador chato, achatado ou plano. Evidentemente, qualquer observador contido em R^2 não pode "ver" nenhum ponto fora de seu espaço; em outras palavras, tal observador só "vê" objetos de duas dimensões situados no plano de R^2.

Agora, suponha que uma bola de futebol chutada em R^3 por um desportista distraído se aproxime perigosamente do plano.

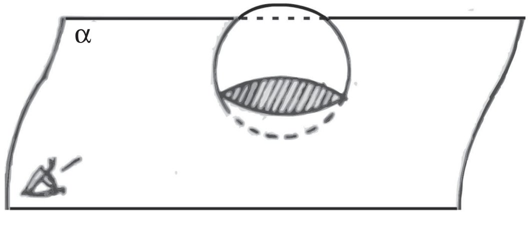


O chato observador nada percebe, até que a referida bola "atravesse" seu mundo. O que vê então?

No momento em que a bola tocar (tangenciar), apenas um ponto pode ser visto.



Mas o bólido tridimensional continua sua arrepiante trajetória e em um certo momento a interseção da esfera com o plano é um pequeno círculo.

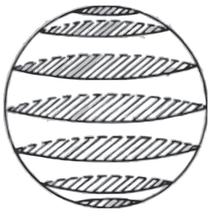


Contudo, o observador, chato que é, não pode efetivamente ver o círculo de forma análoga ao observador em R^3 em relação à esfera.

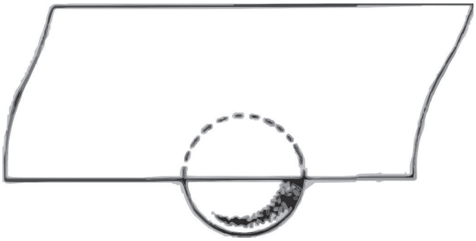
Para o observador da figura, o círculo e o hemicírculo são percebidos da mesma forma, como um segmento de reta do comprimento do diâmetro.

Apenas movimentando-se em torno dos objetos, o observador tem condição de decidir qual é qual. Assim, um observador chato só "vê" mesmo uma dimensão (objetos unidimensionais como segmentos de reta).

Na sua sanha avassaladora, a bola-bala[2] continua atravessando o até então pacato mundo plano. O que no ponto de tangência era apenas e obviamente um ponto transforma-se em um círculo de diâmetro crescente, até atingir o maior tamanho possível, referente ao círculo máximo da esfera.



A partir daí, a interseção da esfera com o plano vai se constituindo em círculos cada vez menores, até novamente se transformar em um ponto (de tangência).



[2] Bola-bala ou bola-bólido, como me sugeriu um dos primeiros leitores deste texto, Nildon Pitombo.

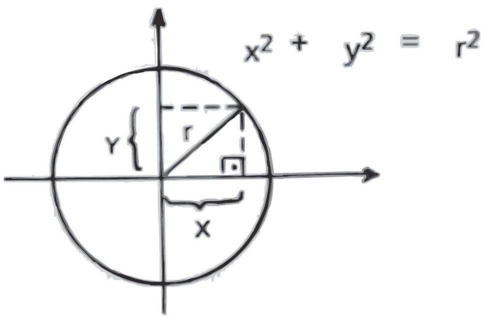
Como o observador chato tem uma visão unidimensional, sua percepção da travessia da bola através do plano se reduzirá à ideia do surgimento inexplicável de um ponto que cresce na forma de um segmento de reta, até alcançar um tamanho máximo, e então vai diminuindo até se transformar novamente em um ponto e desaparecer misteriosamente.

Talvez os jornais deste hipotético mundo plano anunciem, no dia seguinte à travessia da bola, a passagem de "círculos voadores", objetos não identificados, que surgem e desaparecem misteriosamente.

Vale enfatizar que, efetivamente, o observador "vê" segmentos de reta; contudo, por movimento em torno do objeto, ou memória deste movimento, ou condicionamento cultural, pode construir imagens mentais de círculos, da mesma maneira como nós construímos uma imagem tridimensional da esfera a partir da visão plana que temos dela.

Em síntese, um observador em R^2 tem visão unidimensional (R), mas pode construir imagens mentais bidimensionais (R^2) e não tem ideia do que seja um objeto em R^3 .

Analogamente, um observador em R^3, como um de nós, "vê" imagens bidimensionais (R^2), mas pode construir imagens mentais tridimensionais, e não tem ideia do que seja um objeto de quatro dimensões, em R^4.[3]



Retornando ao velho R^3, subespaço de R^4, se uma hiperesfera[4] de R^4 atravessa R^3, inicialmente a interseção é um ponto, a seguir uma pequena esfera que

[3] R* = RxRxRxR; P pertence a R4 se, e somente se, P tem coordenadas (x, y, z, w) em relação aos quatro eixos ortogonais entre si, Ox, OY, OZ e OW (tente imaginar).

[4] Costuma-se chamar de hiperobjeto uma construção em dimensão 4 ou mais, cuja interseção com R^3 é o objeto.
Exemplo: $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 < r^2$ é a equação de uma hiperesfera de raio r; em R^3 a equação da esfera "correspondente" é $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$ em R^2 a equação do círculo "corresponde" a $x^2 + y^2 < r^2$.

vai crescendo até atingir um tamanho máximo, com um diâmetro correspondente ao diâmetro da hiperesfera, a partir do que começa a diminuir, transformando-se em um ponto antes de desaparecer. Um observador em R^3 "vê", efetivamente, apenas imagens planas – um ponto, um pequeno círculo crescente, o círculo máximo, círculos decrescentes, novamente um ponto. Contudo, nas gazetas do dia seguinte anunciariam a passagem de discos ou esferas voadoras, imagem tridimensional que construímos a partir dos círculos.

Desses primeiros exercícios imaginativos podemos tirar como recomendação a importância, em muitas situações, de se partir de imagens geométricas mais simples, tais como a do mundo plano, para facilitar a construção de imagens de situações mais complexas como, por exemplo, a viagem da hiperesfera.

A Topologia aparece com identidade própria apenas no século passado, constituindo-se em um grau de abstração e generalização maior que outras partes da Matemática e da Geometria.

O caminho mais curto entre esses dois pontos – o conhecimento que se tem e aquele que se quer ter – é certamente o tortuoso caminho da história: milhões de homens e mulheres já o trilharam. Como as águas de um rio cavam o leito onde a rocha é mais erodível, assim o fluxo da história cava a rocha do não saber, com linha torta, mas líquida e firme, produzindo sempre novo saber.

Daí a importância de se entender conceitualmente as geometrias euclidianas, e as geometrias não-euclidianas, a geometria afim e a projetiva, para se criar uma base conceitual e histórica para o aprendizado da Topologia.

Façamos agora um novo e hipotético exercício de reflexão geométrica. Vamos agora analisar objetos assimétricos como o par de luvas. O inverno soteropolitano não é tão intenso que permita calçar luvas ou fazer bonecos de neves, mas certamente o leitor já teve a oportunidade de perceber a impossibilidade de calçar a luva esquerda na mão direita e vice-versa, da mesma forma como é impossível calçar o sapato esquerdo no pé direito.

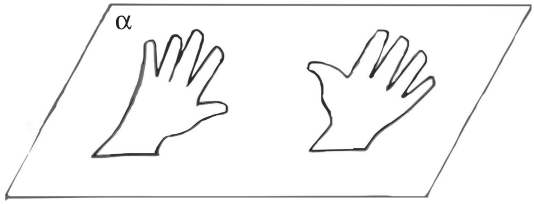
Você pode, incrédulo leitor, modificar a posição da luva ou torcê-la de qualquer maneira que a impossibilidade permanece. Haverá sempre uma luva esquerda e uma direita.

Tais objetos não são incomuns; mesmo na natureza aparecem em profusão: caracóis que diferem pelo modo de construir a concha apenas, um tipo fazendo espirais no sentido horário, o outro fazendo espirais no sentido anti-horário; moléculas de certas substâncias que tomam formas com sentido direito ou esquerdo, evidenciado na formação de cristais e nas propriedades óticas das substâncias – há, por exemplo, dois tipos de cristais de açúcar, o do lado esquerdo e o do lado direito.

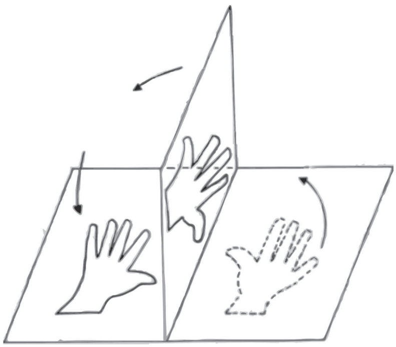
Veremos agora um artifício para transformar um objeto esquerdo no seu correspondente direito. Começaremos, como de hábito, com uma situação plana.

Tomando como nosso mundo de trabalho um espaço plano euclidiano, movimentando-se exclusivamente dentro deste espaço é totalmente impossível fazer coincidir as figuras das mão direita e esquerda.

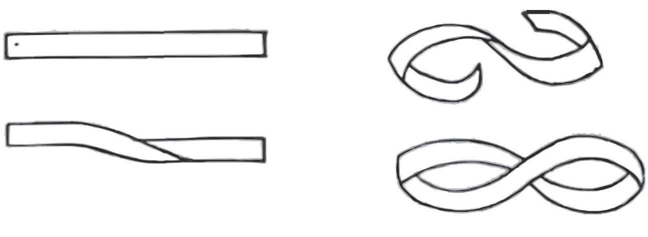
Contudo, podemos, por exemplo, levantar a figura da mão direita do plano α, virá-la no espaço tridimensional R^3, e a seguir fazê-la coincidir, novamente em α com a figura da mão esquerda.



Com o mesmo artifício, podemos pegar uma luva direita de nosso mundo tridimensional, "levantá-la" para fora deste espaço, girá-la convenientemente em R^4, devolvendo-a ao R^3 como uma luva esquerda.



Analisemos agora um outro espaço, a superfície de Möebius, criada, pelo matemático alemão que lhe empresta o nome, há quase um século. A figura abaixo mostra como construir a referida superfície.



Esta superfície é difícil de imaginar, mas é fácil de construir. Por isso recomendamos ao leitor que a construa. E observe que a fita de papel construída tem apenas uma face, não possui o "outro-lado". Pode-se colorir as faces de uma anel construído em papel com cores distintas, uma cor para a face interior, outra cor para a face exterior. Mas, nem mesmo Van Gogh pode fazer isso com uma fita de Möebius.

Vejamos agora o que acontece com a figura de uma luva esquerda movimentando-se no espaço curvo de uma superfície de Möebius. À medida que caminha pelo anel, vai passando por várias posições até se aproximar do ponto de partida. Faça-o, interessado leitor, e observará que, ao voltar ao ponto de partida, a luva (que poderá estar de cabeça para baixo, o que não é problema, basta girá-la para cima) se transformou em uma luva direita!

No espaço bidimensional plano, apenas saindo do plano é possível mudar a posição esquerda ou direita do objeto. Da mesma forma no espaço tridimensional euclidiano.

Já em um espaço bidimensional curvo como a superfície de Möebius, um objeto direito pode ser transformado em um objeto esquerdo, e vice-versa, sem sair do próprio espaço, simplesmente passando pelo ponto encurvado.

Da mesma forma, no espaço tridimensional, adequadamente torcido, é possível tal façanha. Assim, temos duas maneiras de calçar a luva esquerda na mão direita. Se o nosso espaço for euclidiano, pegando a porta da quarta dimensão; se o nosso espaço for curvo moebiniano, ou a solução anterior, ou uma viagem com a luva esquerda até os confins do universo, passando pela região encurvada do mesmo.

Nem Alice Carroll faria melhor!

A superfície de Möebius, de certa forma, simboliza a Topologia. É um dos "objetos" topológicos. Como se vê, para lidar com tais objetos é preciso alguma dose de "imaginação geométrica", que se adquire manuseando papel, tesoura, cola, formas e volumes, figuras e objetos – com as mãos e com a mente. Mãos à obra!

Capítulo Sete

INTRODUÇÃO À TOPOLOGIA

O termo topologia é etimologicamente originado do grego *tópos* (lugar); o ramo da Matemática, Topologia, nascido por volta de meados do século XIX, foi também chamado *analisis situs.*

A Topologia se ocupa das propriedades das figuras geométricas que permanecem invariantes mesmo que as figuras sofram deformações extremamente fortes que destruam suas propriedades métricas e projetivas.[1]

Observamos que as transformações métricas preservam o tamanho e a forma, e que as transformações projetivas preservam apenas a forma. Existem ainda propriedades que não se relacionam com o tamanho ou com a forma, e que se mantêm firmes e fortes mesmo com transformações bastante radicais (nem métricas nem projetivas).

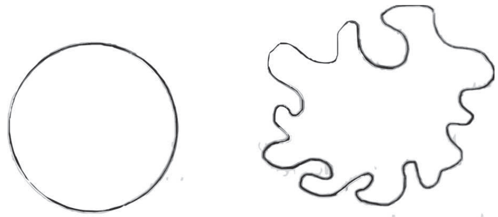
Que propriedades são essas?

[1] O leitor interessado encontrará maiores esclarecimentos sobre tais propriedades no Apêndice, no final deste texto.

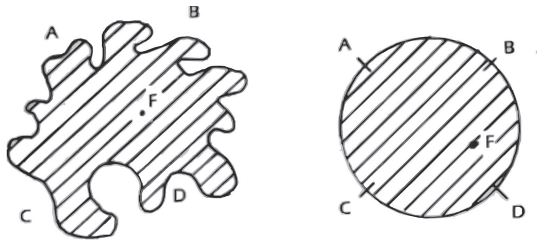
Se, por exemplo, amassamos uma folha de papel pautado, tanto as linhas da folha quanto a forma da folha são modificadas – amassar não é, portanto, transformação métrica, nem projetiva. Contudo, o interior da folha continua interior da folha amassada e linhas vizinhas ou letras impressas contíguas, se mantêm vizinhos na folha amassada[2]; assim, interior e exterior e vizinhança são invariantes mesmo com transformações não métricas e não projetivas. São noções topológicas; e amassar sem romper e nem coincidir é uma transformação topológica.

Também são transformações topológicas aquelas ocorridas na superfície exterior do corpo da mulher durante a gravidez e a sofrida por um balão quando inflado. Preservam-se propriedades (invariantes topológicos) tais como: ser adjacente, interior e exterior, estar fora e estar dentro, ser aberto e ser fechado, ser contínuo ou ser descontínuo, ser vizinho, etc.

Vejam as figuras seguintes:



São topologicamente equivalentes, pois podemos transformar uma na outra por uma deformação adequada. Não há preservação de propriedades métricas (distâncias) ou projetivas (formas), mas certas propriedades permanecem.



[2] Rigorosamente falando, se ao amassarmos uma folha de papel ocorrer coincidência de um ou mais pontos (tal como quando colamos ou fundimos uma parte de um papel em outra), então a transformação não é topológica já que não preserva as propriedades de vizinhança. Contudo, de fato, não ocorre efetivamente a colagem dos pontos (coincidência) quando apenas amassamos uma folha, pois sempre haverá uma distância, mesmo que muito pequena, entre pontos muito próximos, após o amassamento.

Por exemplo, na figura original à esquerda, o ponto B está entre A ⊂ D; na figura transformada, à direita, o ponto B também está entre A e D. Estar entre é um invariante topológico.

Outro exemplo: o ponto F é interior em ambas as figuras. Interior/ exterior é uma noção topológica.

Como contraexemplos, consideremos as duas transformações seguintes:

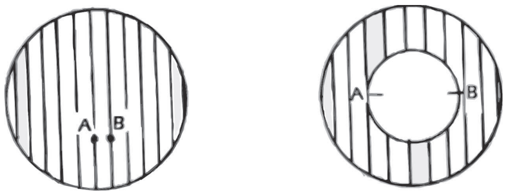
a) transformar uma circunferência em um oito

b) transformar um disco em uma rosca.

No primeiro caso pode ocorrer o seguinte:

Dois pontos distintos no círculo coincidem no oito. A transformação não leva sempre pontos distintos em pontos distintos; além disso, para confirmar que não é uma transformação topológica, o ponto D está entre A e B no círculo, o que não ocorre no oito (já que A e B são coincidentes).

No segundo caso pode ocorrer o seguinte:



Não há conservação de vizinhança. Também esta não é uma transformação topológica.

Portanto, uma transformação topológica não admite fusões nem reagrupamentos que destruam propriedades, tais como vizinhança, estar entre, interioridade/ exterioridade.

Em suma, para definirmos mais precisamente nosso objeto de estudo, uma transformação de f em g é topológica quando:

a) A cada ponto F de f corresponde um só ponto G de g, e reciprocamente. Ou seja, há uma relação biunívoca entre os pontos da figura f e da figura g.

b) A transformação de f em g é contínua nos dois sentidos, ou seja, não há fusões ou rompimentos.

As noções que se mantêm invariantes por uma transformação topológica são chamadas propriedades topológicas. Estas propriedades se constituem no objeto de estudo da Topologia.

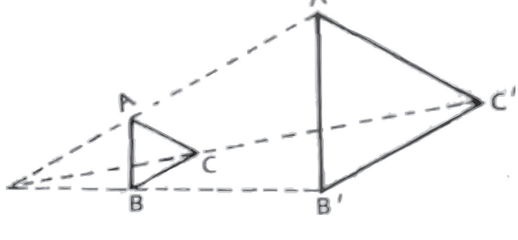
APÊNDICE: PROPRIEDADES MÉTRICAS E PROPRIEDADES PROJETIVAS

Propriedades métricas são distâncias, ou melhor, medidas de distâncias, tais como comprimento, ângulo, área, entre outras. Propriedades projetivas são aquelas relacionadas com proporção (se uma Figura A tem uma projeção A', A e A' mantém uma certa proporcionalidade entre si).

As propriedades métricas se mantêm invariantes através de transformações de movimento para corpos rígidos. Em outras palavras, um corpo rígido é aquele que não sofre nenhuma transformação na sua forma ou tamanho quando em movimento. Assim, forma e tamanho são invariantes sob a transformação de movimento – isto é, propriedades métricas são invariantes sob a transformação de movimento. Exemplos concretos de transformações que mantêm as propriedades métricas são o movimento dos ponteiros do relógio ou a rotação da Terra em tomo de si mesma.

Na Geometria euclidiana estudam-se as propriedades métricas dos corpos rígidos quando submetidos a deslocamentos (translação, rotação ou ambos).

Já a transformação projetiva de um corpo geométrico, como o exemplificado na figura abaixo preserva apenas a forma, não mantendo o tamanho do corpo, mas mantendo certas proporções.

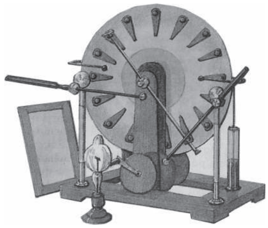


Observe que os segmentos: AB, AC e BC não têm as mesmas medidas dos segmentos A'B', A'C' e B'C' respectivamente; contudo o "jeito" do triângulo ABC é o mesmo "jeito" do triângulo A'B'C' – são triângulos semelhantes ou proporcionais, e pode-se encontrar a razão de proporção entre eles.

Podemos exemplificar, de forma prática, uma transformação projetiva através da projeção de sombras efetivada pela luz solar.

Existe um ramo de Matemática chamado Geometria projetiva, que trata das transformações projetivas e suas propriedades (invariantes).

Capítulo Oito



INTIMIDADE ENTRE FÍSICA E GEOMETRIA

Em coautoria com
Nildon C. S. Pitombo

> *[...] em física tem que se compreender a ligação entre as palavras e o mundo real.*
>
> *Feynman (1989, p. 72)*

A relação entre a Física e a Matemática tem sido muito íntima desde a Antiguidade. O próprio objeto da Física e a impregnação matemática crescente da realidade, aliadas à origem empírica comum de ambas, são elementos que estão na base desta intimidade.

De fato, em primeiro lugar, o objeto da Física, em sua manifestação mais cotidiana, é o próprio mundo empírico no qual nos movimentamos. Em segundo lugar, na produção de conhecimento busca-se estabelecer relações entre o objeto de estudo e o contexto. Mais ainda, um determinado objeto de estudo se define por um conjunto de relações – e a Matemática trata especialmente de relações. Em terceiro lugar, o universo se constitui de uma totalidade a partir da qual construímos o conhecimento físico e o conhecimento matemático.

Desde os gregos que a Física procura descrever quantitativamente os fenômenos da natureza. Assim, de um outro ponto de vista, a Geometria é o ramo mais antigo da Física, pois as primeiras descrições quantitativas estão associadas à Geometria – comprimentos, áreas, volumes, ângulos etc. A Física nasce com a Geometria que, nos povos da Antiguidade (Egito, Mesopotâmia) estava bastante relacionada com a agrimensura. E a agrimensura é também uma atividade que gera um conhecimento necessário para a transformação da realidade física (lavrar a terra, por exemplo).

A contagem de objetos, atividade empírica, inicia o desenvolvimento da aritmética; esta, por sua vez, contribui para o desenvolvimento da Geometria, pois fornece elementos para medir comprimentos, áreas e volumes.

A Geometria é uma das partes da Matemática mais salientemente próxima da Física. Neste trabalho vamos nos deter nesta profunda e fértil articulação do período da história usualmente denominado Antiguidade.

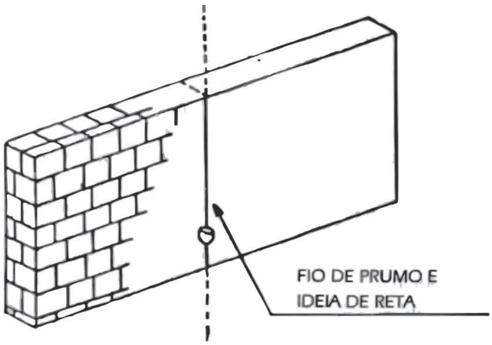
AS RELAÇÕES COM A NATUREZA E A SOCIEDADE

Para os gregos, a Geometria jamais foi separada do mundo exterior; ela era uma espécie de "cordão umbilical" entre o mundo das ideias e o mundo palpável e visível, no qual as figuras geométricas representavam as imagens perfeitas ou quase perfeitas das suas formas concretas.

Cada vez mais, a Geometria significava o ideal da perfeição das formas manipuladas pelo ser humano nas suas relações com a natureza e com a sociedade; cada vez mais, a Geometria significava uma representação daquilo que o homem manipulava nas suas relações – uma representação que buscava a comodidade entre o sentido, o visto, o percebido e aquilo que poderia ser a sua forma mais perfeita, invariável e, por isso mesmo, a forma padrão.

Num período bem antes dos gregos, as civilizações dos grandes rios no Egito, na Mesopotâmia, na Índia e na China viram-se obrigadas a abandonar a caça como meio básico de sobrevivência para procurar novas formas de busca de alimento; dentre essas se destaca a planificação do cultivo do solo e o uso do ciclo das plantas do nascimento à colheita.

Daí surgiram novos modos de vida e novas formas de representação das relações entre a natureza, os homens e suas organizações sociais: da marcação e medição das terras bem como das formas de tecelagem de cestos surgiram as bases da Geometria; do movimento rotativo da fiação se pode ter chegado ao uso da roda; do uso constante dos rios como meio de transporte evoluem as embarcações primitivas para a embarcação à vela; a navegação por si só possibilita a necessidade de elaboração de mapas e calendários, base de uma futura astronomia prática; a alavanca e o plano inclinado, em uso na construção dos templos, se caracterizam como os alicerces da futura ciência que viria a ser denominada de mecânica; da técnica de se construírem habitações verticais e de abertura de canais junto aos rios (nova estruturação urbana) surge a fabricação de tijolos relangulares e do uso do fio de prumo, a ideia de ângulo reto e linha reta, respectivamente.



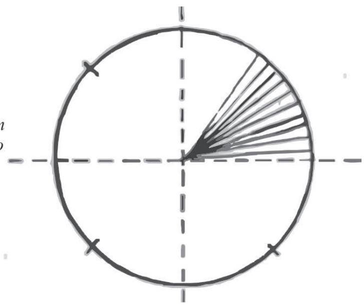
Esses fatores não se distanciam da organização da vida social. Por exemplo, o movimento cíclico da roda transforma-se numa imagem de vida humana, onde a sucessão do ritmo do plantio (semear, crescer, colher) estava associada à rotação regular dos céus e dos corpos celestes. É que o fenômeno da rotação trazia consigo as estações e com elas as modificações nos comportamentos dos homens.[1] É a instalação das analogias como processo de raciocínio e isso permitia ao conjunto da humanidade a superação do estágio, onde tão-somente se faziam descrições de atividades como mecanismo de registro das suas realizações para um estágio posterior, onde o homem passa a abstrair para além do que faz. Aí, o ato de fazer jamais deveria estar separado do ato de criar e, se isso ocorre, cabe a responsabilidade aos modos de organização das relações sociais entre os homens.

[1] Com algumas diferenças entre as culturas babilônica e chinesa. (BERNAL, 1976, v. l, p. 128-129).

Na perspectiva humana de se efetuarem analogias entre a natureza e suas relações cotidianas, a aproximação entre a Física e a Geometria se impõe; o ato de esticar a corda se relaciona com a palavra “reta” que, por sua vez, nas civilizações dos grandes rios, está ligada aos homens que se ocupam dos levantamentos topográficos das margens dos mesmos. O corte dos metais do homem neolítico[2] conduz à noção de plano e à manifestação das relações espaciais. Se no primeiro exemplo está implícita a necessidade do homem, de medir, do segundo retira-se a possibilidade de se construir relações numéricas entre as formas. Aliás, vale a pena sublinhar que desde os períodos pré-históricos essa possibilidade já era tangível, a julgar pelas pinturas encontradas nas cavernas da França e da Espanha com mais de 15.000 anos.

O registro do tempo, desde os períodos dos povos primitivos tem sido relacionado aos movimentos do Sol, da Lua e das estrelas. Isso se constituiu nos primórdios da astronomia e dela resultaram conhecimentos sobre as propriedades da esfera, das direções angulares e dos círculos. Os povos egípcios construíram um calendário com base nos registros do movimento do Sol, enquanto que os povos sumérios intermediavam as observações do tempo através dos movimentos do Sol e da lua. É desse período a invenção do sistema sexagesimal e a circuitação do círculo de 360° – número suficientemente aproximado ao de dias do ano.

Circuitação do círculo em 360 partes: número muito próximo ao número de dias do ciclo anual



Como já se afirmou, os registros do tempo buscavam a elaboração de calendários. Entretanto, devido à dependência extrema entre o calendário e as organizações sociais, os estudos astronômicos quais sejam, os dos registros do tempo, foram se ampliando em uso e significado: tais registros passam a incorporar elementos religiosos vinculados às cheias e às colheitas; as divisões do céu em quadrantes passam a sugerir a doutrina dos quatro elementos, cuja origem

[2] Neolítico = idade da pedra polida, período imediatamente anterior às civilizações dos grandes rios.

está na organização social totêmica[3], sendo que, mais tarde, os gregos a incorporam (época de Empédocles: 492-432 aC), quando se propõem compreender a natureza a partir dos quatro elementos: água, ar, fogo e terra[4]. Esses elementos, articulados entre si, implicariam na estrutura do universo, do cosmos, da physis[5].

Na China, essa proposta de explicação já tinha associação com as quatro estações do ano, já na época das civilizações dos grandes rios, portanto, muito anterior aos gregos. E, desse modo, o projeto de explicação da estrutura do universo para as civilizações dos grandes rios se dá com a mesma perspectiva assinalada pelos gregos através do conceito de *physis.* Assim, para os egípcios a terra era plana e o céu, paralelo à terra, apoiado nos picos dos montes; à imagem do Rio Nilo havia um "Nilo" celeste: a Via Láctea. Para os povos babilônicos, o céu era o lado interno de uma gigantesca tenda cúbica da qual pendiam as estrelas como se fossem lâmpadas.

É desse contexto que surgem os rudimentos da Física na forma como ela é conhecida hoje. No começo, fortemente associada com os dados do mundo real, não poderia ser chamada de Física no modo como hoje nos acostumamos a chamá-la. Percebe-se, no entanto, um elo diáfano e frágil com os fatos geométricos, desde as medidas até as explicações sobre a estrutura do universo.

Não obstante o impressionante desenvolvimento dessas civilizações, a sustentação de inovações técnicas é incipiente e não tarda a chegar um período de estagnação acompanhado de fortes convulsões sociais. Nessa época, a necessidade militar de construir catapultas e torres de assalto empurra o conhecimento científico disponível para a direção do fortalecimento da mecânica dos equipamentos de guerra; por outro lado, a manutenção dos exércitos conduz à abertura de estradas, de canais e à construção das fortalezas. Daí surge a engenharia como mecanismo de sustentação do conhecimento técnico-científico, em meio a uma atmosfera turbulenta de guerras e migrações, tendo como pano de fundo a consolidada estrutura da sociedade de classes do que restou das civilizações dos grandes rios, à esta altura desfrutando de decadente poder imperial perante outros povos.

[3] Totêmica = conjunto de atos ou ritos em que se exprime a crença no totem (organização em que todos creem num padrão único de comportamento e respeitam as mesmas coisas).

[4] Empédocles escreveu um livro denominado *Sobre a natureza*, onde se articulam tais ideias.

[5] Physis = origem de tudo, a totalidade de tudo; motriz e matriz de todo e qualquer processo real.

Desponta, assim, a soberania de novos povos: os hebreus, os fenícios, os assírios. Estes povos, eminentemente bélicos, rapidamente forjaram a derrocada dos antigos impérios das civilizações dos grandes rios, à exceção da China, que permaneceu praticamente inalterada. Os assírios conservaram a velha cultura babilônica, mantendo as observações astronômicas; os hebreus cristalizaram o culto às explicações sobre a origem do mundo e do homem dos babilônios num livro célebre: o *Velho Testamento*. Os fenícios, na junção da sua cultura com a babilônica, se especializaram na construção de navios de madeira e se dedicaram à exploração dos transportes marítimos. Divulgaram fortemente o alfabeto e mantiveram quase que inalterada a astronomia dos povos das civilizações dos grandes rios.

Um outro povo que se destacou nesse processo de desmoronamento dessas civilizações foi o povo grego.[6]

A GEOMETRIA E OS GREGOS

Entre os gregos que se dedicaram à produção de um conhecimento físico e matemático podemos citar: Arquimedes de Siracusa (aproximadamente 287-212 aC), Apolônio de Perga (aproximadamente 262-190 aC), Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 aC), Aristarco de Samos (por volta de 310-230 aC) e Ptolomeu (século II dC).

Antes deles, contudo, Aristóteles publicou o livro *Física,* provavelmente o primeiro texto sobre o que hoje chamamos Física.

A título de ilustração, vejamos o que Boyer (1974, p. 91) afirma sobre o engenhoso Arquimedes, quando trata de derivação matemática do princípio da flutuação dos corpos:

> Arquimedes pode bem ser chamado o pai da Física Matemática, não só por seu 'Sobre o equilíbrio de planos' como também por outro tratado, em dois livros, 'Sobre corpos flutuantes'. De novo, começando com um simples postulado sobre a natureza da pressão dos fluidos, ele obtém resultados muito profundos.

[6] O povo grego descende da civilização micênica, estabelecida na cidade de Micenas, no mar Egeu. Oriundo de um império marítimo, tornou-se imune aos sucessivos ataques dos povos medas e persas. Não era guerreiro e tinha uma sólida cultura, muito embora tenha sofrido forte influência do alfabeto fenício. Era dotado de uma organização econômica e estatal complexa e tem raízes culturais na civilização cretense.

Mas talvez a maior contribuição de Arquimedes seja o seu *O método,* livro só reencontrado em 1906, até então de conteúdo desconhecido pela civilização moderna.

Em *O método,* Arquimedes descreve as investigações "mecânicas" preliminares que o conduziram às suas principais descobertas matemáticas.

Nele, Arquimedes considera uma área como a soma de uma infinidade de segmentos de retas, antecipando-se ao Cálculo Integral da era moderna.

Por que *O método* era considerado mecânico? Como diz ainda Boyer (1974, p. 100):

> O primeiro teorema que ele descobriu desse modo foi o teorema sobre a área de um segmento parabólico; na Proposição l de 'O Método' o autor descreve como chegar a esse teorema, equilibrando retas como se faz com pesos em mecânica.

Apolônio, matemático e astrônomo, criou um modelo bastante difundido para as órbitas dos corpos celestes na, então em vigor, teoria geocêntrica. As grandes imprecisões de medidas decorrentes da suposição da órbita circular foram melhor apreendidas com a hipótese dos movimentos em ciclos e epiciclos difundida posteriormente por Ptolomeu.

Contudo, mais significativo ainda para notarmos a estreita relação entre Física e Geometria é a sua teoria das cônicas (elipse, hipérbole, parábola), assim chamadas por serem secções obtidas através de cortes adequados de um cone.

Os teoremas sobre cônicas, elaborados na Antiguidade, tornaram-se fundamentais na dinâmica terrestre, na mecânica celeste, na engenharia e em outros campos do conhecimento físico da Era Moderna.

Isso ilustra a dialética da relação entre Física e Matemática e, particularmente, Geometria. Um conceito matemático pode surgir ao mesmo tempo, antes ou depois, cronologicamente falando, que o seu correlato físico oriundo de um mesmo objeto ou utilizável sobre um mesmo objeto. Isso porque ambos estão articulados com a realidade, tendo, inclusive, bases empíricas nas origens.

Com relação a Aristarco, Eratóstenes e Ptolomeu, suas preocupações astronômicas contribuiram sobremaneira para o aparecimento de rudimentos de trigonometria.

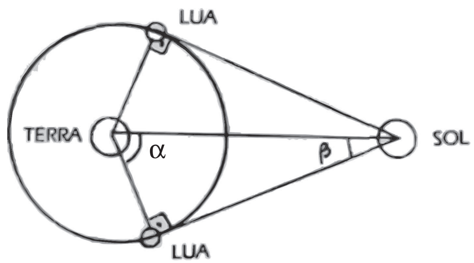
Na obra de Ptolomeu, em particular, encontramos traços significativos da articulação entre a Física e a Geometria: a obra *Geografia,* de Ptolomeu, introduziu o sistema de latitudes e longitudes; na sua *Ótica,* a Física e a Psicologia da visão são tratadas com a geometria dos espelhos.

A TERRA, A LUA, O SOL E A GEOMETRIA

> As abelhas [...] em virtude de uma certa intuição geométrica [..] sabem que o hexágono é maior que o quadrado e o triângulo, e conterá mais mel com o mesmo gasto de material. (Papus de Alexandria apud BOYER, 1974, p. 129)

Para dar significado técnico ao tratamento conceitual e histórico que demos até agora, vamos apresentar um exemplo de geometria associada à Física. Para tanto, abaixo descrevemos a análise geométrica de Aristarco para avaliar a distância relativa da Terra ao Sol e à Lua. Observe que a análise geométrica é utilizada para a obtenção de um conhecimento físico (distância) essencial para a Astronomia.

Como Aristarco, pode-se facilmente observar, principalmente no nascer ou pôr do sol, que há uma posição em que o disco lunar aparece como quarto crescente ou quarto minguante, e o triângulo formado pela Lua (L), Terra (T) e Sol (S) tem um ângulo reto. Veja a figura que se segue.



Isto já mostra que o Sol está muito mais distante da Terra que da Lua, já que a distância entre a Terra e o Sol é a hipotenusa do triângulo LTS, e a hipotenusa é o maior lado do triângulo retângulo.

Aristarco mediu o ângulo α, representado na figura anterior, através de instrumentos obviamente rudimentares (o leitor pode fazer observações empíricas com o auxílio de um transferidor).

Aristarco encontrou para α o valor 87°; assim o ângulo β seria 3°.

Usando as ideias de semelhança de triângulos, pode-se rapidamente ver que para encontrar a razão entre as distâncias da Terra ao Sol (TS) e a da Terra à Lua (TL) basta construir um triângulo retângulo com ângulos agudos de 3° e 87°.

Sabemos que triângulos semelhantes têm lados correspondentes proporcionais: podemos então construir no papel um triângulo retângulo com ângulos agudos de 87° e 3° e, medindo seus lados, é muito mais simples calcular TS/TL.

Em outras palavras, é muito simples saber quantas vezes o sol está mais distante da Terra que a Lua.

Devemos observar, contudo, que o resultado de Aristarco (α= 87° TS/TL = 18,8) é muito menor que o correto. A distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes maior que a distância da Terra à Lua. Isso se deve à imprecisão na medida do ângulo α, que na verdade está próximo de 89,9°. De qualquer forma, a imprecisão não desmerece o método, o qual ilustra muito bem a relação entre a Geometria e a Física por nós discutida.

CONCLUSÃO

É fundamental perceber-se que a base material é o ponto de partida tanto do conhecimento matemático como do físico. Acrescente-se que o conhecimento produzido, a partir de uma base material, vai se agregando à própria realidade, não só porque produz tecnologia que transforma o mundo, mas também porque cria explicações ou visões de mundo que vão transformando a realidade desconhecida em uma realidade inteligível.

Em especial a partir da *physis* ou realidade física, o homem cria explicações que constituem a ciência física de cada povo em um dado momento da história. Este conhecimento, em uma primeira instância, é descritivo de formas, tamanhos, posições e distâncias, entre outras coisas, e origina o conhecimento geométrico básico.

A Física também procura dar explicações causais aos fenômenos e por isso propicia o conhecimento matemático, se articula com ele e também passa a depender dele, permitindo estabelecer relações de dependência entre valores de grandezas medidas.

Em uma segunda instância, todo o conhecimento matemático.

Em síntese, a realidade material e social estão maravilhosamente associadas e condicionam tanto a Física quanto a Geometria (e a Matemática). Portanto, Física e Geometria são filhas do casamento histórico entre a materialidade do mundo e atividade dos homens em sociedade, e assim crescem genética e umbilicalmente irmanadas. Física e Matemática não são só íntimas: são inseparáveis.

Contudo, o conhecimento moderno é extremamente fragmentado, em decorrência das características que a produção do conhecimento ganha com a divisão social do trabalho na modernidade. Desta forma, Ciências como a Matemática e a Física são vistas como totalmente independentes uma da outra, o que não é verdade já que ambas são produzidas a partir de uma mesma base comum: a realidade concreta do nosso mundo (material e simbólica).

Em especial, a Geometria e a Física têm muitas áreas de intimidade. Para se entender suas relações mutuamente dependentes temos que entender o processo que engendra estas relações; assim podemos ver os pontos comuns e captar o especial movimento que gera a referida intimidade entre elas.

O processo que gera tais relações é justamente o processo histórico; é na história que se relacionam todas as instâncias da produção e do saber.

Geometria e Física, ambas tratam de um mesmo espaço: nos primórdios, o espaço original da construção do conhecimento, o empírico; no limiar do século XXI, com níveis de abstração cada vez mais fantásticos, o simbólico.

Observe, porém, que o simbólico, em última instância surge do empírico; e, neste sentido, Matemática e Física, operando símbolos, não deixam de ser ciências empíricas.

Mas não bata a cabeça, não quebre a cuca (no empírico); sinta o prazer dessa intimidade entre a Matemática, a Geometria e a Física (no simbólico).

Capítulo Nove

CONTRADIÇÃO EM QUATRO ESTAÇÕES

INTRODUÇÃO

Neste pequeno ensaio discutiremos a questão da contradição tal como foi posta em quatro diferentes teorias: a lógica clássica, a teoria dos tipos, a lógica paraconsistente e a lógica dos magmas.

No nosso percurso, inicialmente pararemos na primeira estação, a lógica clássica, com o objetivo de avaliar a relação entre os princípios da identidade, do terceiro-excluído e da não-contradição – a cumplicidade entre eles não evita a presença de contradições mesmo nos sistemas formais abrangentes.

Seguiremos então até a próxima estação, a teoria dos tipos, onde, com o objetivo de evitar as contradições, é construída uma hierarquia de tipos, esforço construtivo que se repete ao infinito.

Passaremos então para a lógica paraconsistente (COSTA, 1977, 1980, 1990) no percurso incluída como a terceira estação, onde a contradição é pragmaticamente tolerada, tomando-se os cuidados para que as contradições aceitas não sejam fortes demais para trivializar o sistema.

Finalmente aportaremos na estação dos magmas – a partir da qual se pode identificar o núcleo lógico comum às três anteriores, caracteristicamente identitário e conjuntista.

As estruturas conjuntistas-identitárias não esgotam os magmas – haveria espaço aqui para as contradições? Iniciemos o percurso prometido.

LÓGICA CLÁSSICA : UM PROBLEMA DE IDENTIDADE

A lógica é tão empírica quanto a geometria.

H. Putnam

O princípio lógico fundamental é o **princípio da identidade**: tudo é idêntico a si mesmo. Em fórmula, A é A. Por exemplo, podemos dizer que uma árvore é uma árvore. Este princípio é por demais evidente por sua elementaridade tautológica e assusta que tenha que ser formulado.

Contudo, a ele se articulam dois outros princípios tidos como a base da lógica clássica e, por extensão, do "bom raciocínio": **o princípio da não-contradição** e o **princípio do terceiro-excluído**. O primeiro deles, como o nome indica, afirma que não deve existir contradição no raciocínio: A não é não – a, e a árvore não é não-árvore. O princípio da não-contradição é, de certa maneira, a forma negativa do princípio da identidade, ou seja, afirma que algo não pode ser e não ser ele mesmo. O segundo deles, o princípio do terceiro-excluído, pode ser visto como a forma disjuntiva do princípio da identidade: uma coisa é **ou** não é. Entre estas duas possibilidades contraditórias não há possibilidade de uma terceira que, assim, fica excluída. Formalmente, é assim o exemplo seguinte:

- Se ela me telefonar, sairemos juntos.

Esta é uma sentença condicional que pode ser expressa da seguinte forma:

se p então q

onde p e q são as sentenças atômicas seguintes:

p: ela me telefona

q: sairemos juntos

Se hoje um ansioso amigo nos diz:

- **Se** ela me telefonar, **então** sairemos juntos.

E amanhã, ao nos encontrarmos novamente com o ainda enebriado amigo ouvimos:

- Saímos juntos, eu e ela.

O que se pode concluir?

Além das diversas conjecturas que um imaginativo leitor poderia fazer, relativamente à afirmação condicional de nosso amigo, o que nos interessa mais particularmente, pode-se concluir que ela lhe telefonou?

Isto não é necessariamente verdade. A proposição condicional afirma apenas que se a hipotética personagem feminina telefonar, nosso saltitante amigo com ela sairá; nada afirma no caso da feminina personagem não telefonar. Assim, se ela telefonar, eles certamente sairão juntos; mas, se ela não telefonar, ainda poderão sair juntos (nosso amigo, por exemplo, pode não conter sua ansiedade e telefonar antes para ela), ou não.

De outra forma, não ocorre ela telefonar e eles não saírem juntos. Vejamos o exposto em símbolos:

se p **então** q

pode ser escrita $p \rightarrow q$

Assim, $p \rightarrow q$ significa que não ocorre p e não-q ao mesmo tempo. Ou ainda, substituindo "não" e "e" pelos símbolos lógicos $\neg$ e $\wedge$, respectivamente, temos: $\neg (p \wedge \neg q)$.

Há ainda outra maneira de se considerar a proposição condicional que estamos analisando:

Ela pode telefonar ou não telefonar; se ela telefonar, eles sairão juntos; se ela não telefonar, eles poderão sair juntos ou não; assim, eles sairão juntos ou não sairão juntos; no segundo caso, necessariamente ela não telefonou. Em síntese, eles sairão juntos ou ela não telefonará.

Em linguagem simbólica, onde $\vee$ significa "ou", temos:

$$\neg q \vee p$$

Estabelecemos, portanto, a partir da afirmação condicional e de forma intuitiva, tendo em vista nosso propósito de discutir logo mais a frente a articulação dos princípios da identidade, da não-contradição e do terceiro-excluído, as seguintes equivalências lógicas:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \leftrightarrow q \vee \neg p$$

onde $\leftrightarrow$ é o símbolo para a equivalência.

Damos por encerrada essa teledigressão. Oportunamente voltaremos a usar os resultados obtidos.

O princípio da identidade afirma que uma árvore é uma árvore, um homem é um homem, um divã é um divã.

Simbolicamente, na lógica das proposições, a fórmula b é b toma a seguinte

$b \leftrightarrow b$ (lê-se "b equivale a b")

A forma apresentada acima faz uso do operador lógico de equivalência ou dupla implicação:

$p \leftrightarrow q$ significa que $p \rightarrow q$ e $q \leftarrow p$, ou ainda que p e q são equivalentes.

Assim, $b \leftrightarrow b$ significa que $b \rightarrow b$ e $b \leftarrow b$, o que é redundante.

Em outros campos do conhecimento matemático, o princípio da identidade assume outras representações.[1]

[1] Em campos distintos da matemática, o princípio da identidade assume formas específicas: equivalência ou dupla implicação, classes de equivalência, igualdade, etc. Além disso, dependendo da axiomática utilizada, o princípio b é b, em qualquer de suas expressões simbólicas, pode ser

Aqui neste texto estamos utilizando a forma implicativa do princípio da identidade, forma na qual este princípio é mais imediatamente evidente na lógica das proposições.

Assim, a partir das equivalências (identificações) que já obtivemos na digressão acima para a implicação:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg p \vee q$$

podemos obter que

$$b \rightarrow b \leftrightarrow \neg(b \wedge \neg b) \leftrightarrow \neg b \vee b$$

O princípio da identidade aparece claramente articulado aos princípios da não-contradição e do terceiro-excluído. Há uma forte interdependência entre eles.[2]

A forma negativa (na qual aparece também a conjunção "e", simbolicamente representada por $\wedge$, e por isso podemos chamá-la forma conjuntiva) do princípio da identidade

$$\neg (b \wedge \neg b)$$

é o princípio da não contradição, que diz: não ocorre b e não $\neg$b.

A forma disjuntiva (com a disjunção "ou", simbolicamente representada por $\vee$) do mesmo princípio

tomado como princípio mesmo (na forma de postulado ou axioma) ou como teorema derivado de outros axiomas através de deduções; de qualquer forma, o princípio da identidade impregna a expressão, tanto no seu sentido quanto na sua estrutura, pois já está presente nos outros axiomas utilizados. Por exemplo, em teoria dos conjuntos, a igualdade $A = B$ significa que $A \subset B$ e $B \subset A$, de forma que $A = A$ é o mesmo que $A \subset A$.

Em suma, as expressões $B \leftrightarrow B$, $B = B$, $B \subset B$ e $B \equiv B$, ainda que aplicáveis em contextos usualmente diferentes, contém de alguma forma o princípio da identidade.

[2] Dentro do escopo da lógica clássica essa interdependência não significa necessariamente, até onde podemos vislumbrar, a possibilidade de derivação estrita e completa de algum dos princípios de algum outro entre os restantes, nem de ambos restantes. Mas nega a independência dos princípios no mesmo sentido da independência do V Postulado de Euclides dos outros quatro postulados. Os três princípios que estamos considerando estão de tal forma articulados na lógica clássica, que uma entre outras escolhas possíveis de axiomas para sua construção formal completa e usual, pode conter, por exemplo, uma das leis de De Morgan e o princípio da não-contradição, dos quais derivamos o princípio do terceiro-excluído.

$\neg b \vee b$

é o princípio do terceiro-excluído, que diz: ocorre b ou ocorre não b, a terceira possibilidade está excluída – três é demais.

Por trás da obviedade aparente do princípio da identidade, e no âmbito da lógica clássica, jazem dois outros princípios cuja universalidade está longe de ser unanimemente considerada.

A crise de identidade desses princípios tem recrudescido assustadoramente, até mesmo dentro da própria lógica, com os teoremas de Gödel, e a busca de novos caminhos axiomáticos diferentes da axiomatização da lógica clássica, como, por exemplo, as lógicas paraconsistentes.

Fora do âmbito axiomático, a crise é antiga e remonta pelo menos a Hegel e depois Marx, com a dialética e o materialismo dialético; mais recentemente, Castoriadis (1982) cria a lógica dos magmas e faz considerações importantes sobre a questão, como veremos mais à frente. Na física, na psicanálise, na história, na arte e na poesia, tempestades de contradições têm solapado incessantemente os pilares plantados por Aristóteles.

A questão tautológica hamletiana "ser ou não ser" já não reina só e absoluta nos píncaros (ou nos abismos) da reflexão filosófica tornada arte ou senso comum. Cada vez mais se insinua sua negação "ser e não ser". Não é rima, é contradição.

TEORIA DOS TIPOS: METALINGUAGEM *AD NAUSEUM*

A teoria dos tipos foi criada por Russell para eliminar os paradoxos surgidos na formalização da teoria dos conjuntos. Segundo a análise de Russell e Whitehead, tais paradoxos surgiam devido ao uso de totalidades ilegítimas (como ao considerar o conjunto das regras e afirmarmos sobre a sua totalidade a seguinte regra: "toda regra tem exceção" – o leitor pode constatar que isso encerra um paradoxo.

Russell então estipula o princípio de que tudo o que contém uma coleção não pode ser membro dessa coleção, o que eliminaria as totalidades ilegítimas como a colocada acima.

Pela teoria dos tipos, as entidades lógicas são dispostas numa hierarquia de tipos distintos: os objetos da lógica fazem parte do tipo 0, as propriedades desses objetos, do tipo 1, as propriedades das propriedades, do tipo 2, e assim sucessivamente. No caso dos conjuntos, os objetos estão no tipo 0, as classes no tipo 1, classes de classes no tipo 2 etc.

Como nessa estrutura proposta por Russell um conjunto não pode ser elemento dele mesmo (pois são tipos diferentes), eliminam-se alguns paradoxos, como o paradoxo de Cantor ou Russell (relacionado com as noções de número cardinal e conjunto universo), ou ainda o paradoxo de Burali-Forti (relacionado com a noção de número ordinal).

A teoria dos tipos é estruturada através de uma hierarquia de conjuntos e classes, onde cada nível hierárquico é fechado em relação ao nível superior, implicando, por exemplo, a necessidade de construção de uma nova aritmética para cada novo tipo construído. Objetos, classes, propriedades, proposições etc, não transitam de um nível para outro, pois nessa segregação está justamente a força da teoria dos tipos em eliminar os paradoxos.

Mas existem três dificuldades: a primeira refere-se ao fato que a própria matemática faz uso de definições que burlam o princípio estipulado por Russell; a segunda que os tipos são fechados para seus objetos e propriedades; a terceira que os paradoxos não são exatamente eliminados, mas remetidos para um tipo superior, *ad infinitum*.

Evidentemente, a teoria dos tipos foi catalisadora de novas reações teóricas e metodológicas, e seu mérito histórico é indiscutível; mas, feito o balanço dos problemas lógicos a serem enfrentados, substitui-se um problema por três – com a agravante de, talvez, entre estes, estar ainda o primeiro.

A LÓGICA PARACONSISTENTE : UMA NOVA NEGAÇÃO

Existem diversas estruturas formais distintas da lógica clássica no que se refere ao conjunto de axiomas de base, o que inclui, de certa forma, a validade em geral, ou não, dos princípios da não-contradição, do terceiro-excluído, ou até mesmo do princípio da identidade.

As lógicas paraconsistentes (COSTA, 1977,1980, 1990; D'OTTOVIANO, 1990; SANTOS, G., 1992) são aquelas em que não vale em geral o princípio da não-contradição.

> Em sentido amplo, uma lógica é paraconsistente se pode ser utilizada como lógica subjacente a teorias inconsistentes, mas não triviais. Isso implica, dentre outras coisas, que o princípio da contradição deve ser de alguma forma restringido, afim de que possam aparecer contradições, mas deve-se evitar que de duas premissas contraditórias possa-se deduzir uma fórmula qualquer. (KRAUSE, 1991, p. 5)

Com o objetivo de tornar mais palpáveis as considerações críticas que pretendemos tecer, vamos descrever aqui, de forma sucinta, uma família de cálculos preposicionais paraconsistentes denominada cálculo Cn (C_0, C_1, C_2, ...)

A família de cálculos Cn foi formulada para satisfazer as seguintes condições:

a) O princípio da contradição não é válido em geral;

b) Partindo-se de duas proposições contraditórias, não se pode deduzir alguma outra proposição que se queira;

c) Todas as regras de inferência e esquemas do cálculo proposicional clássico que forem compatíveis com as duas condições acima são mantidos no cálculo Cn.

Nesse cálculo, se uma fórmula B é tal que para B vale o princípio da não-contradição – $\neg(B \vee \neg B)$ – a fórmula B se comporta classsicamente; a expressão do princípio da não-contradição para B é representada em C_n como B^0. Então:

(a) se de uma fórmula F qualquer for possível inferir B e também for possível inferir $\neg$ B, então não vale F (vale $\neg$ F)

$$B^0 = [\neg(B \wedge \neg B)] \rightarrow ((F \rightarrow B) \rightarrow ((F \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg F))$$

A expressão acima é um dos principais axiomas da lógica paraconsistente considerada; por esse axioma, uma dada contradição é enclausurada, ou seja, a contradição de F não afeta o comportamento das proposições que se comportam de maneira clássica, não trivializando o sistema.

Observe-se que o axioma acima é a usual "redução por absurdo" (se F implica B e F também implica a negação de B, isso é um absurdo, portanto devemos ter necessariamente a negação de F) válida apenas para as fórmulas bem comportadas de C_n (aquelas para as quais vale o princípio da não-contradição).

(b) se uma outra fórmula A tem comportamento clássico como B, então a implicação, a conjunção e a disjunção entre elas também se comportam classicamente.

$$A^0 \wedge B^0 \rightarrow ((A\ (B)^0 \wedge (A \wedge B)^0 \wedge (A \vee B)\ ^0)$$

A expressão acima afirma que o conjunto das fórmulas clássicas é operado classicamente pelos operadores implicação, conjunção e disjunção; as contradições, permitidas, mas devidamentre enclausuradas, não afetam o funcionamento do conjunto.

Esse axioma assegura a propagação do bom comportamento das fórmulas bem comportadas.

Para nós, o que essencialmente diferencia a estrutura dessa lógica paraconsistente da lógica clássica é a introdução de um novo operador, uma negação não usual, de forma que essa lógica paraconsistente contém, em certo sentido, a lógica clássica. De fato, a negação usual ou clássica de uma proposição é tal que deve ser compatível com a não-contradição dessa proposição (como vimos ao discutir a lógica clássica); escrevendo a negação clássica como (*), da maneira como é na formalização do cálculo C_n, deve-se ter:

$$\neg^* B = \neg B \wedge b^0$$

Evidentemente, a negação representada pelo símbolo ¬ na lógica paraconsistente do cálculo C_n, é um outro operador tal que, em certos casos, pode-se ter:

$$B \wedge \neg B$$

Pode-se, expandindo a ideia de uma negação "fraca", associar a cada um dos cálculos C_n uma negação índice n, cada uma delas progressivamente mais fraca, à medida que n cresce, o que significa que se vai ampliando progressivamente o conjunto de proposições contraditórias que são aceitas sem trivializar o sistema.

Assim, a família de cálculos C_n é uma estrutura de subconjuntos próprios, cujo núcleo básico é a lógica clássica, onde se enfraquecem progressivamente as restrições à existência de contradições de certas proposições, através da introdução de uma família de operadores, cada um deles ambiguamente chamado negação (não usual).

A estrutura formal do cálculo C_n é bastante interessante, e representa sem dúvida um grande avanço incorporando um tipo rico, complexo e "inquieto" de relação, mas ainda busca modelos também "bem" interessantes, como os modelos das geometrias não-euclidianas (COSTA; SUBRAHMANIAN, 1989). Na esfera social, o aparecimento de uma contradição transforma a configuração de relações previamente existentes, inclusive as relações predominantemente formais; assim, neste âmbito, antes que enclausurá-la, um sistema que considere a contradição deve compreender sua propagação, que talvez trivialize e mate a configuração anterior, mas que neste processo ajuda a criar uma nova e diferente configuração.

Apresentaremos a seguir, de forma sintética, as considerações de Castoriadis a respeito da lógica (chamada por ele de conjuntista-identitária ou, por contração, conídica) e a respeito da lógica dos magmas – que transcende a lógica conídica, como veremos.

As Categorias ou operadores lógico-ontológicos que são necessariamente postos em ação pela lógica conjuntista-identitária são: identidade, não-contradição, terceiro-excluído, a existência de relações de equivalência e de boa ordem, a determinidade e a particular equivalência propriedade = classe.

Observemos que o sentido mais forte da relação de equivalência é a identidade absoluta e que a própria construção da lógica conjuntista-identitária pressupõe a lógica conjuntista-identitária.

Discutamos brevemente os operadores da lógica conídica.

Com relação ao terceiro-excluído, poder-se-ia falar no enésimo excluído, não há diferença essencial. Já a equivalência propriedade = classe, foi contestada por Russell e isso levou à teoria dos tipos, como vimos anteriormente; mas, como afirma Castoriadis (1988, p. 399),

> [...] de fato, não poderíamos atuar nem por um segundo, na matemática como na vida cotidiana, sem admitir constantemente que uma propriedade define uma classe e que uma classe define uma propriedade de seus elementos (pertencer àquela classe).

A relação de equivalência comporta questões bastante complexas (antes tratamos de algumas dessas questões ao discutir o problema da identidade – o que, aproveitando o trocadilho, lhe é equivalente). Formalmente, na matemática a definição do conceito aparece bastante tarde na construção teórica formalizada; contudo, é necessariamente pressuposta desde os primeiros passos seja do pensamento ordinário, seja da construção histórica da matemática, seja da construção axiomática da matemática.

Se se postula, mesmo na matemática, a identidade absoluta, então a identidade não existe, porque até para se postular a identidade é preciso antes discernir o que vai ser identificado; devemos ficar então com a identidade considerada uma equivalência "módulo" (relativa a) uma certa relação, uma identidade relativa, uma identidade local; assim as relações de equivalência estão imbricadas no processo de separação e construção de conjuntos.

A relação de boa ordem, formalizada em etapas avançadas do desenvolvimento matemático, também opera e é utilizada desde sempre no pensamento ordinário e na matemática.

Já a determinidade é uma hipercategoria que funciona como um esquema primordial da lógica conídica – exigência suprema e mais ou menos implícita da história da filosofia:

> [...] a fixação da corrente dominante da filosofia pela determinidade e pelo determinado traduz-se no fato de que, mesmo quando se reconhece um lugar ao indeterminado, ao apeiron, este é apresentado como hierarquicamente "inferior": aquilo que realmente existe é o que é determinado, e o que não é determinado não é, ou é menos, ou tem uma qualidade inferior de ser. (CASTORIADIS, 1988, p. 401)

Nessas categorias não existe apenas uma "lógica", mas também um decisão ontológica: pretende-se que essas categorias esgotem o ser (pois são sua região essencial), ou que representem o paradigma do verdadeiramente existente. Tudo o que existe ficaria assim completamente determinado pelas categorias da lógica conídica.

Passemos agora aos magmas. Como devemos utilizar essa nossa linguagem natural para falar de magmas, necessariamente utilizaremos a dimensão conídica. Na busca de rigor, tal situação é, de forma evidente, ainda mais incisiva.

Os conjuntos estão mergulhados em magmas. Um magma

> [...] é aquilo de que se pode extrair (ou: em que se pode construir) organizações conjuntistas em número indefinido, mas que não pode jamais ser reconstituído (idealmente) em uma composição conjuntista (finita ou infinita) dessas organizações. (CASTORIADIS, 1982, p. 388)

Por exemplo, a totalidade de significações de uma língua é um magma.

Outros aspectos da ideia de magma são explorados por Castoriadis, aproveitando-se ambiguamente de uma linguagem mais formal, através das seguintes propriedades "definidoras":

Ml: Se M é um magma, pode-se identificar em M um número infinito de conjuntos.

M2: Se M é um magma, pode-se identificar em M outros magmas diferentes de M.

M3: Se M é magma, não existe partição de M em magmas.

M4: Se M é um magma, toda decomposição de M em conjuntos deixa como resíduo um magma.

M5: O que não é magma ou é um conjunto ou não é nada.

Assim, as duas primeiras propriedades conectam magma e conjuntos (Ml) e exprimem a inexauribilidade dos magmas (M2), já que:

> Os magmas excedem os conjuntos, não do ponto de vista da "riqueza da cardinalidade" (sob este aspecto, nada pode exceder a escala cantoriana dos infinitos), mas do ponto de vista da "natureza de sua constituição. (CASTORIADIS, 1988, p. 406)

A propriedade M3 exprime a impossibilidade de aplicar a operação de separação no domínio dos magmas, pois um magma é tudo o que o próprio magma arrasta consigo.

A propriedade M4 afirma, de forma complementar, que se algo pode ser decomposto de maneira exaustiva em conjuntos, então esse algo é um conjunto, não um magma.

A última propriedade (M5) afirma que tudo o que não for organizado de forma conídica é magmático. O universo é um supermagma.

A verdade, a falsidade e mesmo a indecidibilidade no sentido gödeliano, são sempre referidas a um enunciado conídico. Dessa forma, se um certo domínio é um magma, devem existir enunciados significativos referentes ao domínio que não são significativos no sentido conídico (de verdade, falsidade ou indecidibilidade).

Dessa forma, toda teoria determinista (e aqui se incluem as teoria determinísticas e também as probabilísticas, pois atribuem probabilidades determinadas) é formada por cadeias de enunciados significativos no sentido conídico, e por isso só podem ter valor local (e não valor universal, que é magmático).

AS SIGNIFICAÇÕES

Quanto às significações constuídas a partir da lógica identitária,

> "Os enunciados significativos no sentido conjuntista-identitário são construtiveis por meio de classes, propriedades e relações." (CASTORIADIS, 1988, p. 412)

Mas existem significações que não são construídas como na forma acima. As significações imaginárias sociais são dessa segunda espécie.

A constituição das significações "primitivas" da matemática também é dessa segunda espécie, pois pressupõe sempre a língua natural, a qual, por sua vez, veicula significações imaginárias sociais.

Ademais, é impossível falar sem utilizar os operadores conídicos (classe, relação, propriedade), de forma que "[...] a "parcela" conjuntista é "ubiquamente densa" na linguagem natural ". (CASTORIADIS, 1988, p. 413)

Por outro lado, é através das significações imaginárias sociais que se introduzem classes, propriedades e relações no mundo criado pelo homem. Certamente, prossegue Castoriadis (1988, p. 414),

> [...] um dos campos a explorar aqui seria a maneira pela qual "equivalência" e relação se transformam quando funcionam, não mais no domínio conjuntista-identitário, mas no domínio imaginário no sentido próprio e forte do termo.

Essa entranhamento conídico-magmático pode ser posto metaforicamente dizendo-se que não há mito sem aritmética, nem aritmética sem mito.

Pode-se enunciar agora as seguintes teses ontológicas:

a) O que existe não é conjunto nem sistemas de conjuntos; o que existe não é plenamente determinado.

b) O que existe é Caos, ou Abismo, ou Sem-Fundo; o que existe é Caos irregularmente estratificado.

c) O que existe comporta uma dimensão conjuntista-identitária ubiquamente densa.

Por fim, a lógica dos magmas se relaciona à questão da autonomia:

> Se a lógica conjuntista-identitária esgotasse por completo tudo o que existe, não poderia jamais haver qualquer tipo de "ruptura ", mas tampouco autonomia. (CASTORIADIS, 1988, p. 412)

A contradição tem um papel importante para a ruptura e a autonomia. À guisa de conclusão, discutiremos este ponto a seguir.

A CONTRADIÇÃO : CONSIDERAÇÕES PRECÁRIAS FINAIS

> Quando depararares com uma contradição,
> faze uma distinção.
>
> *Adágio escolástico*

> Se uma contradição fosse agora efetivamente descoberta na aritmética – isso provaria apenas que uma aritmética com essa contradição, poderia prestar serviços muito bons.
>
> *L. Wittgenstein*

Inicialmente, comparemos a teoria dos tipos e a lógica paraconsistente. Enquanto a pretensa solução russelliana para a questão dos paradoxos é a transferência progressiva do problema a um outro nível de discurso, a solução paraconsitente é a incorporação progressiva dos paradoxos a um nível ampliado do discurso. A primeira via é a da metalinguagem , a segunda, do pragmatismo. A primeira vai empurrando as aporias para frente, a segunda, as enclausurando. Nenhuma enfrenta diretamente a questão.

Para enfrentarmos diretamente o problema, de passagem fazendo talvez a crítica das teorias acima comparadas, e principalmente do núcleo lógico comum, somos obrigados a contar com os próprios recursos que estamos questionando. Como condená-la? Parece não ser essa exatamente a questão.

No seu *Tractatus logico-philosophicus*, Wittgenstein (1993), com o propósito de discutir a verifícabilidade, analisa as noções de tautologia e contradição. Uma contradição consiste na negação de uma tautologia – talvez para uma análise da contradição tenhamos de examinar a natureza da negação e da tautologia.

Para Wittgenstein (1993) é absurdo afirmar algum significado para tautologias ou contradições:

> A proposição mostra o que diz; a tautologia e a contradição, não dizem nada. A tautologia não tem condições de verdade, pois é verdadeira incondicionalmente; a contradição, sob nenhuma condição. Tautologia e a contradição não têm sentido. [...]
>
> (Nada sei, por exemplo, a respeito do tempo quando sei que chove ou não chove.). (4.461)

Prossegue ainda o primeiro Wittgenstein (1993) dizendo que a tautologia e a contradição "[...] não são figurações da realidade. Não representam nenhuma situação possível. Pois aquela admite toda situação possível, esta não admite nenhuma". (4.462)

Então, para que servem? Segundo Wittgenstein, as tautologias são semelhantes ao zero, em relação ao simbolismo da aritmética (pois não encerram qualquer absurdo e possuem uma fantástica capacidade operacional).

E a contradição? Na obra aqui considerada, poucas palavras do filósofo. Somos tentados a prosseguir, de forma perigosamente ousada e talvez equivocada, sua comparação analógica apresentada no parágrafo acima (mas nos sentimos até "autorizados" pelo exemplo de Wittgenstein a utilizar esse recurso), dizendo que talvez a contradição se assemelhe a uma divisão por zero! Não tem nenhum valor de verdade na aritmética, e se utilizada operacionalmente pode levar à "demonstração" de qualquer disparate aritmético. Mas o limite de uma razão, quando o denominador tende a zero, pode ser bastante significativo para o obtenção de taxas de variação – ou seja, a compreensão de um determinado movimento (como a contradição parece útil para analisarmos o movimento dos conjuntos no interior dos magmas, ou ainda, o movimento das significações sociais).

A importância de uma contradição ou de uma tautologia não pode ser decidida em geral: não há nenhum enunciado cujo contexto discursivo não cuide da eficácia da sua enunciação.

Assim, as contradições parecem necessitar de um outro tratamento que o formal (axiomas, deduções, completude), algo que escapa à formalização, seja ela débito da lógica clássica, seja ela débito das lógicas paraconsistentes. No primeiro caso, elas "nascem espontaneamente" a despeito do princípio da não-contradição; no segundo caso, não parece haver situações interessantes em que os novos axiomas introduzidos conduzam ou a um tratamento completo da questão, ou a uma (re)significação da contradição no escopo do sistema formalmente construído – em outras palavras, não parece haver modelos relevantes para estes sistemas, já que a negação que leva à contradição é enfraquecida e a contradição enclausurada.

Em certas lógicas paraconsistentes, como por exemplo o cálculo C_n, o princípio da não-contradição não é válido em geral, ou seja, podem existir contradições sem contudo o sistema se tornar trivial; mas a negação utilizada nesse cálculo, e que permite ocorrência do tipo de contradição acima, não é a negação usual (clássica), mas um outro operador (mais fraco) que também é nomeado negação.

É preciso analisar então a negação forte (usual) e a negação fraca (introduzida pelo cálculo C_n); ressalte-se que a maneira como é apresentado o cálculo C_n propicia uma certa confusão entre o que é chamado negação (que poderíamos chamar nova negação ou negação fraca, para evitar ambiguidade), inclusive com a utilização do símbolo tradicionalmente utilizado pela negação clássica, e o que é "definido" como negação forte (que na verdade é a negação usual), com a introdução de um novo símbolo, já que seu símbolo tradicional foi dado para o novo operador de "negação" (negação fraca) acima referido.

E preciso também analisar as contradições "fracas" e "fortes", que aparecem em decorrência do uso de uma negação fraca ou forte.

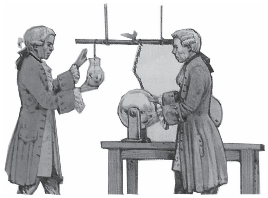
Temos ainda de considerar as contradições de fato (contradições reais ou ontológicas) – essas contradições utilizam a negação usual, "forte". Um exemplo historicamente relevante foi propiciado pela questão do duplo caráter da luz – a luz é onda e a luz é partícula, e como, em geral, onda não é partícula, podemos dizer que a luz é onda e não é onda. Considerando que a dimensão conídica é densa, é claro que o surgimento dessa contradição possibilitou a produção de novos conjuntos ou novas estruturas explicativas, mas extraídos de um magma de significações imaginárias indicado pela contradição.

Finalmente, é preciso também discutir a questão da identidade, particularmente da identidade absoluta; sua existência parece negada pela ideia do ser diferenciando-se constantemente; nem mesmo a identidade formal seria absoluta, já que para estabelecer que a = a é preciso primeiro diferenciar a; ou ainda, a identidade absoluta deve ser identidade total, identidade sob todos os aspectos, e a simples escritura a = a destrói a pretensão de identidade total, pois não há, certamente, pelo menos a identidade gráfica entre o primeiro a e o segundo a.

Em suma, as contradições exalam um cheiro de magma. Ao extraírem-se conjuntos de um magma, pelo menos nos casos não triviais, afigura-se praticamente impossível depurar-se toda a "lama"; pelo menos uma mancha do lodo acaba impregnando os conjuntos produzidos : a contradição.

Obviamente, estamos ainda em uma escala de análise muito grosseira, precisamos olhar esta lama no microscópio (aliás, talvez seja preciso primeiro construir tal instrumento para analisar este lodo semântico). Não podemos esconder, no entanto, que a contradição parece se entranhar nas significações imaginárias sociais. Se entranhar até no avesso do avesso do avesso.

Capítulo Dez



OS ARQUÉTIPOS COMPUTACIONAIS DE TURING E POST

Rápidas transformações estão ocorrendo em decorrência do advento e presença cada vez mais acentuada dos computadores; assim, o crescimento da sua esfera de influência parece tornar imprescindível que todos compreendam suas capacidades e limitações.

O computador no ensino pode ser objeto de estudo basicamente a partir de três perspectivas: (1) como instrumento técnico que pode servir como **ferramenta de trabalho** prático na produção ou no ensino; (2) como **veículo didático** para a transmissão de conteúdos; e (3) como **objeto de ensino** enquanto corpo teórico elaborado no processo de produção moderna.

As duas primeiras formas constituem o usualmente chamado "ensino por computadores", em contraste com o uso do computador enquanto conteúdo, chamado "ensino sobre computadores".

É importante enfatizar o último enfoque, pouco considerado na literatura disponível, já que a compreensão sintética, sistematizada e crítica do computador depende não só de seu uso técnico, mas principalmente de sua concepção e estrutura teórica, o que é necessário para a correta compreensão de suas potencialidades e limitações.

Para considerarmos o computador como conhecimento em si mesmo é preciso analisar suas características: o computador é um sistema quantificado, discreto, admitindo apenas um número finito de configurações diferentes; o funcionamento do computador pode ser descrito por matemática algorítmica; o computador é um sistema determinista; qualquer linguagem de programação é estritamente formal e, por fim, qualquer comando de qualquer linguagem representa uma sequência bem definida de passos bem definidos.

A compreensão dessas características, que constituem elementos do aspecto teórico da questão, não é de menor importância, pois é só a partir delas que se pode entender as possibilidades e limitações do computador enquanto instrumento técnico. Estas limitações estão estreitamente relacionadas com as limitações da própria lógica formal e da matemática (NAGEL, NEWMAN, 1973), e constituem questão que pretendemos tratar, pois estruturam, segundo cremos, um conhecimento que deve ser dominado para desmistificar as noções ideológicas que acompanham o desenvolvimento de tal tecnologia, como, por exemplo, de que o computador vai dominar o homem ou de que vai desumanizar as relações sociais.

O que pode ou não o computador fazer por si só enquanto potencialidade lógica pode ser visto nas "máquinas" abstratas de Post ou de Turing, modelos estruturais do moderno computador eletrônico (USPENSKY, 1985), e o que pode ou não ser feito dele na prática social depende dos objetivos que definirmos socialmente para tanto. Avançarmos nestas questões, contrariamente à ênfase dada pela literatura às tecnicidades, significa privilegiar os aspectos conceituais, sociais e históricos.

Para isso, tomaremos como referência dois artigos publicados independentemente em 1936: em *The Journal of Sjmbolic logic,* número 3, de setembro de 1936, foi publicado o artigo *Finte combinatory processes - formulation I*, de Emil L. Post (1897-1954); nos *Proceedings of The London Mathematical Society,* volume 42, no mesmo ano de 1936, Alan M. Turing (1912-1954) publicou o artigo *On computable numbers, with an application to the Entscbeidungsproblem.* Ambos tratam do conceito de computabilidade. Os processos chamados computáveis são aqueles passíveis de mecanização. Esses processos podem ser descritos algoritmicamente, ou seja, passo a passo, de forma sequencial e precisa.

Para analisar essa questão, cada um dos artigos descreve um dispositivo único, passível de construção apenas com lápis e papel, de estrutura lógico-operacional similar à dos computadores atuais.

As regras de funcionamento dos dispositivos estruturalmente semelhantes são equivalentes do ponto de vista lógico, apesar de não serem coincidentes. O desenho global do dispositivo de Turing é mais complexo.

O excepcional nesses artigos é que ambos, independentemente, antecipam, através desses arquétipos (as máquinas abstratas), o funcionamento dos modernos computadores digitais eletrônicos, antes mesmo do aparecimento destes. Por se constituírem em arquétipos, podemos encontrar nestas máquinas abstratas os elementos representativos da capacidade e dos limites dos computadores reais.

Assim, estes dispositivos se constituem em privilegiados instrumentos para a avaliação pedagógica crítica do computador. Isto porque são produtos históricos, ou seja, foram engendrados naquele momento histórico particular, porque estavam reunidas as condições para sua elaboração, e assim contêm as características desse momento histórico.

Dessa forma, este artigo trata das implicações epistemológicas, pedagógicas e históricas do uso das máquinas abstratas no ensino sobre computadores.

ABORDAGEM

Com relação aos aspectos metodológicos, partimos da premissa de que a análise histórica é indispensável – e isto significa enfatizar o processo histórico, a historicidade. Contudo, existe uma maneira de se analisar a história da ciência que é considerá-la como uma parte isolada do processo, estando aí implícita a ideia de que o processo todo – a totalidade – é a soma das partes. Desse modo não se considera o contexto histórico e sua dinâmica, apesar de todo o movimento de produção do conhecimento estar mergulhado neste contexto. Muitos dos trabalhos em história da ciência são assim, inclusive algumas fontes secundárias usadas por nós, como Goldstine (1972).

Uma outra maneira de se fazer história da ciência é privilegiar a totalidade; esta maneira também polariza, não na parte, como a abordagem anterior, mas no todo, na medida em que considera a história da ciência como consequência de um processo global, roubando a autonomia de cada processo particular. Neste caso, a totalidade determinaria a parte. Exemplo clássico é a obra de Bernal (1976) onde todo e qualquer evento da historia da ciência é considerado como resultante de um contexto autônomo e imutável. Quando se privilegia um aspecto particular em história da ciência, as ideias parecem estar completamente desvinculadas do contexto. Quando se privilegia o todo, todas as ideias parecem estar teleologicamente embutidas na totalidade, sem autonomia.

Adotaremos uma compreensão de história distinta das duas anteriores. As ideias nascem da prática humana, são reflexo ativo da realidade, mas possuem relativa autonomia. Isto é, as ideias podem gerar novas ideias, novos raciocínios, podem gerar a criação de novos instrumentos, que servirão para superar novas necessidades. Assim, buscamos na parte em estudo (as máquinas abstratas) as principais características do contexto geral de sua criação (o processo de produção material e de conhecimento da modernidade).

COMPUTADOR, MODO DE PRODUÇÃO E CONHECIMENTO MODERNO

O surgimento do computador como instrumento técnico indispensável ao desenvolvimento do modo de produção moderno pode ser claramente percebido na história. Sempre houve a preocupação de desenvolver aparatos tecnológicos que pudessem resolver certos problemas de cálculo e controle de dados e informações; obviamente que esses problemas de cálculo e controle de informação, ou eram exigências diretas da produção, como no caso das máquinas de tecelagem controladas por cartões perfurados, ou eram exigências do desenvolvimento da ciência (astronomia, física, matemática) que, por sua vez, se constituíam em exigências da produção moderna, calcada na substituição da "rotina empírica pela ciência" (MARX, 1968, p. 439). Não podemos deixar de lembrar também que esta necessidade do uso do computador torna-se uma urgência inadiável com o advento de uma nova indústria no século XX: a indústria da guerra. O primeiro computador eletrônico foi construído nos Estados Unidos para elaborar cálculos de balística na segunda grande guerra.

Em suma, nosso argumento é que a necessidade de controlar toda a produção, não só para automatizar a linha de produção, mas também para as atividades de gestão e controle na empresa, além do tratamento de dados e informações para o desenvolvimento da própria ciência, é um fator importante para o surgimento do computador eletrônico moderno. Ao mesmo tempo que as necessidades geradas pela produção material impulsionam a produção científica, esta cria teorias e técnica que transcendem as exigências iniciais de forma a interferir na própria produção material. Este é justamente o ponto crucial para se compreender sua gênese e constante aprimoramento.

Vejamos, então, que forma as questões produtivas tomaram na ciência teórica, em especial na matemática, onde surgiram os conceitos fundamentais da estrutura lógica do moderno computador eletrônico digital.

No fim do século passado e início deste século estávamos passando por um período bastante fértil no desenvolvimento da lógica simbólica e esta era considerada, muito além de qualquer base física ou moral, a sólida sustentação das "leis do pensamento".

A questão do pensamento ser redutível a métodos lógicos, o que em última instância significa a possibilidade de apreensão do conhecimento da realidade apenas através da razão clássica, é bastante antiga, remontando aos gregos na filosofia ocidental. (DREYFUS, 1975, p. 17)

Contudo, a crença na formalização do conhecimento passa a dominar o pensamento ocidental a partir da revolução burguesa, de seus ideais de universalização e da base de produção mecanizada e mecanizável, tornada possível com a divisão social do trabalho.

Por outro lado, porém, só no início do século, precisamente em 1900, este problema da obtenção de um método único e geral de decidibilidade, baseado na Lógica, ganha formulação explícita do matemático germânico David Hilbert (1862-1943), como veremos à frente; tão importante quanto a própria colocação do problema, estavam colocadas as condições históricas para a sua solução. Assim, a questão é resolvida de forma completamente inesperada por Gödel (1906-1978) em 1931, e por Alan Turing (1912-1954) e Emil Post (1897-1954) em 1936, trabalhando independentemente, mas de maneira análoga, prática e de importantes desdobramentos operacionais e técnicos.

Estes trabalhos não só definem os limites da mecanização, mas também estabelecem as bases necessárias para a exploração cada vez mais fantástica dos processos algorítmicos através do computador eletrônico moderno, então ainda inexistente.

Em função do espaço disponível para um artigo não percorremos os principais antecedentes históricos da tentativa moderna de redução do pensamento à lógica, mas nos deteremos no principal deles, o projeto formalista de Hilbert. Na matemática, o processo de redefinição epistemológica de suas bases começa justamente a partir da clara formulação do problema de fundamentar o conhecimento na lógica formal. Esta questão é colocada por Hilbert da seguinte forma: a descoberta de um método para estabelecer a verdade ou falsidade de qualquer sentença na linguagem da lógica formal chamada *cálculo de predicado* (HILBERT apud HOPCROFT, 1984, p. 70). Este problema marca um momento culminante da tentativa de fazer afirmada a identificação entre lógica e realidade mas, ao mesmo tempo, significa o marco inicial de sua própria negação.

Para mostrar a inviabilidade dessa redução, usaremos o seguinte argumento: se a matemática (ou o conhecimento matemático) não puder ser reduzido à lógica, então o pensamento (ou a razão) também não pode ser reduzido a ela.

Em outras palavras, nossa tarefa se resume em mostrar a inviabilidade do projeto (hilbertiano) de redução da matemática à lógica. Nossa tarefa é simples. A História já se incumbiu dela.

Em 1931, Kurt Gödel, em um pequeno artigo *Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, estabeleceu dois resultados fulminantes para a proposta hilbertiana:

> 1) Resultado relativo ao problema da consistência: uma prova absoluta de consistência para sistemas abrangentes (por exemplo, que contenham a aritmética) é altamente improvável e, seguramente, dentro do próprio sistema, impossível;
>
> 2) Resultado relativo ao problema da completude: é sempre possível construir enunciados, partindo das regras de uma teoria formal, que não são redutíveis ao conjunto de axiomas de tal teoria e, mais ainda, com qualquer conjunto aumentado finito de axiomas, é sempre possível construir, dentro desta teoria formal, uma nova proposição indecidível.

O segundo resultado, sempre considerado mais importante por matemáticos, joga por terra, em última instância, o princípio do terceiro-excluído; o primeiro deles põe em xeque o princípio da não-contradição. Gödel usa os recursos da lógica para demonstrar a impossibilidade do programa formalista: é das entranhas da lógica formal que nasce a contradição que a nega, filha rebelde que promete novos passos na dança do conhecimento.

O grande significado dos teoremas de Gödel, em nossa opinião, é de caráter epistemológico: não podemos identificar os raciocínios rigorosos, matemáticos, com o raciocínio formal. A natureza, que inclui o homem, tem a contradição como qualidade, a contradição que origina seu movimento e produz a história. Por conseguinte, os apropriados recursos do pensamento do homem, que é natureza e história, não se limitam aos recursos formais.

Podemos dizer que os resultados de Gödel constituem mais um indicador da intimidade entre matemática e realidade: é porque a matemática não se reduz à lógica formal que ela se aproxima mais da realidade. É a realidade da contradição na matemática que permite perceber a natureza matemática da realidade contraditória. As relações na natureza são matemáticas, e vice-versa, porque ambas constituem uma só totalidade, na qual está mergulhada a contradição.

Mas o que estes resultados têm a ver com os computadores, centro de nossas atenções nesse trabalho? Vejamos: se a matemática fosse redutível à lógica e se se pudesse encontrar o tal método para determinar a verdade ou falsidade de qualquer sentença da lógica formal, então qualquer sentença matemática, ou, mais forte ainda, qualquer afirmação de conteúdo sobre a realidade formulada em linguagem matemática, poderia ser provada verdadeira ou falsa.

Assim, uma resposta afirmativa para o programa e o problema de Hilbert reduziria todas as afirmações sobre a realidade, que pudessem ser transcritas em linguagem matemática, a mera computação mecânica (segundo regras bem determinadas).

Ora, as formulações de Gödel destruíram tais pretensões. Mas as atenções se deslocaram, então, do conceito de verdade para o conceito de demonstrabilidade (provabilidade). O problema que ainda restava solucionar era: haveria um método único com o qual todas as sentenças matemáticas demonstráveis poderiam ser demonstradas de um conjunto de axiomas lógicos?

É exatamente neste ponto, lógica, cronológica e historicamente falando, que entram os trabalhos de Turing e Post.

AS MÁQUINAS DE TURING E POST

A máquina de Post – e também a máquina de Turing – são estruturas conceituais, e, por isso, podemos chamá-las máquinas computadoras abstratas. Poderiam ser construídas com algum material apropriado, mas, não o sendo necessariamente, são máquinas virtuais e não reais; ressalte-se, contudo, a existência destas estruturas conceituais asseguram sua concretude, ou seja, a possibilidade de serem operadas simbolicamente. Para a descrição da estrutura e funcionamente destes dispositivos. (TENÓRIO, 2003)

A criação das máquinas abstratas liquidou definitivamente as pretensões hilbertianas, já que:

1) Não existe método comum para decidir a verdade ou falsidade de todas as sentenças lógicas formuladas. Isto porque Gödel mostrou a incompletude de sistemas formais abrangentes.

2) Mesmo as sentenças matemáticas demonstráveis não podem ser provadas a partir de um conjunto de axiomas da lógica formal. Church, Post e Turing mostraram a existência de funções não calculáveis em seus sistemas lógicos.

Mas, tais dispositivos lógicos abstratos não só definem as limitações dos procedimentos mecânicos, mas também suas possibilidades – que se corporificam no computador eletrônico digital que nós conhecemos.

Como afirma Hodges (1984, p. 109):

> Havia uma ambiguidade profunda no desfecho final do programa de Hilbert, não obstante ele certamente acabou com a esperança de um racionalismo tão ingênuo, ou seja, a pretensão de resolver todo problema por uma forma de cálculo. Para alguns, incluindo o próprio Gödel, a falha em provar a consistência e a completude indicaria uma nova demonstração da superioridade da mente em relação a mecanismos. Mas, por outro lado, a máquina de Turing abriu a porta para um novo ramo de ciência determinística. A máquina era um modelo no qual os procedimentos mais complexos poderiam ser construídos a partir de tijolos elementares: estados e posições, leitura e gravação. Isto sugeriu um jogo matemático maravilhoso, o de expressar qualquer método bem definido em uma forma padrão.

Uma máquina capaz de resolver todos os problemas (matemáticos) é pura ficção. Mas quase como em ficção, a invenção das máquinas abstratas possibilitou o crescimento (e materialização) da ideia de máquina universal – aquela que pode executar o trabalho de qualquer outra máquina, ou seja, executar qualquer processo mecanizável.

Os limites estavam postos claramente. As possibilidades também. Vieram juntos, inseparáveis, historicamente afirmando e negando o pensamento lógico-formal, caracterizando o contraditório movimento do real.

IMPLICAÇÕES

De que maneira os trabalhos de Turing e Post, assim como sua materialização no computador eletrônico, influenciam ou podem influenciar as relações de produção de conhecimento, em especial as relações dos sujeitos com o conhecimento a ser (re)produzido na instituição escolar?

Através de alguns indicadores observáveis com o uso dos computadores, e através da análise de seus arquétipos, vamos apontar algumas implicações ou possíveis implicações nos âmbitos epistemológico, histórico e pedagógico.

IMPLICAÇÕES EPISTEMOLÓGICAS

Inicialmente os resultados de Gödel, Kleene, Church, Post e Turing evidenciam as grandes limitações a que está sujeito o formalismo lógico e axiomático. Desta forma, no próprio âmbito da lógica e da matemática assegura-se a impossibilidade de fundamentação do conhecimento matemático simplesmente com base no racionalismo lógico.

Se, em outras áreas do conhecimento, tal tentativa já encontrava críticas, é na própria esfera da lógica que o golpe mortal é desfechado: não é possível construir o corpo do conhecimento matemático sobre o pantanoso terreno da lógica. As pretensões afundaram e sucumbiram nos movediços paradoxos que minaram pela contradição o outrora firme campo da lógica.

Portanto, temos que considerar agora a possibilidade de uma nova categoria – a contradição – no campo das ciências ditas exatas, tanto quanto em outras áreas do conhecimento em que esta categoria já aparecia. Isto, sem dúvida, aproxima a matemática da realidade, já que a contradição está presente em ambas.

Em segundo lugar, a análise de problemas e equações matemáticas em computadores tem aberto novos caminhos para a demonstração, análise e invenção desta ciência, o que implica em uma redefinição dos métodos e, até mesmo, do objeto desta ciência.

O último indicador, que passaremos agora a discutir, tem um alcance científico e filosófico de dimensões históricas, e refere-se à relação entre totalidade e parte – categorias fundamentais para a produção do conhecimento.

A partir da utilização de computadores e programas, Mandelbrot (1977) criou a geometria fractal. Esta nova geometria tem a característica de produzir imagens "autossimilares", ou seja, cada e qualquer trecho de um fractal, quando ampliado, mostra variações de um tema global.

A questão da autossimilaridade pode ser melhor compreendida a partir de alguns exemplos: uma árvore se parece com um galho, e este com um pequeno ramo. O sistema circulatório humano é autossimilar – os capilares reproduzem as formas das grandes artérias; um grão de areia e uma rocha se assemelham nas rugosidades; e assim por diante.

O traçado de figuras fractais e o tratamento das grandes massas de dados necessários para se verificar as hipóteses e testar os modelos construídos com base na concepção fractal da natureza não seriam possíveis sem os computadores.

A construção ponto a ponto, a fragmentação, a digitalidade do computador, dividindo os procedimentos nos passos mais elementares, *bit* a *bit*, permitiu vislumbrar-se que a totalidade também se manifesta na parte. Fragmentando ao extremo, nas partes atômicas, deparamo-nos com o todo.

IMPLICAÇÕES HISTÓRICAS

O processo de produção de conhecimento está mergulhado na história. Tratar do produto do conhecimento enquanto um momento do processo de produção em constante movimento é tratar da questão histórica.

Contudo, queremos aqui enfatizar alguns pontos relativos às raízes e implicações históricas associadas às máquinas abstratas. Como vimos, as raízes históricas do computador podem ser buscadas no expansionismo europeu, na divisão social do trabalho, no desenvolvimento e utilização crescente da tecnologia, e na hegemonia da razão clássica.

Assim, nas máquinas abstratas está contido o caráter do modo de produção que se gestou. Por outro lado, atingindo seus limites lógicos e históricos, também contidos nas máquinas computadoras, podemos vislumbrar uma mudança de direção neste movimento.

Existem muitos indicadores de que estamos vivendo um momento de mudança no processo civilizatório. Com os computadores e a automação, podemos divisar, em primeiro lugar, a possibilidade concreta de substituição da maioria do trabalho mecânico executado pelo homem por trabalho automático executado por máquinas.

Em segundo lugar, a redefinição epistemológica do próprio campo da matemática, da lógica e, em última instância, da razão clássica.

Em especial, toda a produção de conhecimento contemporâneo é altamente matematizada, relacional, e, considerando os resultados de Gödel, Post e Turing, os laços entre matemática e realidade transcendem os do formalismo clássico. Isto não significa rejeitar o pensamento formal, mas dimensioná-lo adequadamente.

Assim, a grande consequência desta afinidade da matemática com o modo de produção de conhecimento contemporâneo

> [...] poderia ser a de romper a aliança histórica da matemática com as ciências exatas, deixando às tecnologias informáticas o cuidado de assegurar tal função, e inflectir a sua finalidade com vista a uma refundição das relações com a realidade. (PETITOT, 1985, p.19)

A exatidão está confinada nos dispositivos de Turing e Post – e é absolutamente necessária. A matemática e a realidade são muito mais ricas, no entanto.

IMPLICAÇÕES PEDAGÓGICAS

A educação é a instância de formação científica básica. Sendo o computador resultado de um momento histórico singular, inserido em um processo de produção cada vez mais complexo, possui em sua constituição aspectos deste momento civilizatório. Daí a importância do computador que em seus aspectos mais íntimos representa o conhecimento deste momento de inflexão epistemológica na história, na ciência, na produção do homem.

O reducionismo formalista, presente na afirmação do modo de produção capitalista moderno, pode ser evitado com a ênfase na análise filosófica desse processo histórico.

Pode-se, assim, impedir que o uso intenso de computadores, ou a assunção da ótica presente no próprio caráter do processo fragmentário, conduzam à disseminação da crença de que também no mundo real, na sociedade e na história, tudo é redutível a sim-ou-não e a causa-e-efeito. O conhecimento computacional desvinculado do contexto histórico induz e reforça uma mentalidade mecanicista e cientificista.

Deve-se notar que, ao constituir-se no ponto culminante de um modo de produção específico, o computador passa a negar este próprio processo. Seus limites, como sua força, estão postos na história. Não se trata nunca de negá-los, ou mitificá-los. A questão é de situar criticamente as possibilidades de tais meios: o computador e sua forma de operar estão intimamente arraigados na nossa civilização; não se pode prescindir de considerá-los, mesmo levando em conta que os procedimentos mecânicos não esgotam a realidade.

Por outro lado, os dispositivos de Post e Turing foram criados originalmente em um momento singular do nosso processo de produção. Portanto, se prestam especialmente para a análise dos fundamentos deste processo, que aparecem neles de forma proeminente.

Se dos pontos de vista lógico e histórico as máquinas de Post e Turing são equivalentes, do ponto de vista especificamente didático, contudo, a máquina de Post leva vantagens. As vantagens da utilização do dispositivo de Post na educação de primeiro e segundo graus reside principalmente na simplicidade das operações e estrutura da máquina. (TENÓRIO, 2003).

Mesmo sem equipamentos, pode-se e deve-se cuidar das questões aqui levantadas, que definem o caráter fundamental dos computadores na sociedade e na história. Além disso, o uso desses dispositivos tem como vantagem um custo baixo em comparação com o custo atual de compra e manutenção de equipamentos.

Assim, o uso das máquinas abstratas, em especial a máquina de Post, contextualizadas devidamente no contexto histórico que as originou, pode propiciar as seguintes vantagens e implicações:

1) baixo custo;

2) simplicidade das operações;

3) exige apenas conhecimentos matemáticos elementares;

4) desenvolve pensamento formal, limitado, mas de importância indiscutível;

5) não necessita da linguagem do especialista em informática;

6) desenvolve compreensão de conceitos lógicos e historicamente fundamentais como: algoritmo, computador universal, programação, computabilidade;

7) possibilita conhecer-se, na escola, o computador, mesmo sem tê-lo (o que não tira a importância de tê-lo);

8) ilustra o conceito de concreto: o concreto não é apenas o palpável, mas o que tem significado; tudo aquilo que pode ser manipulado pelo pensamento, não só pelas mãos, é concreto, como o são as máquinas abstratas;

9) prescinde de conhecimentos de detalhes físicos ou técnicos para a compreensão da estrutura básica (lógica) dos computadores;

10) mostra a importância da abstração, sem a qual não há possibilidade de conhecer na ciência moderna – a abstração, no sentido de transcendência do empírico, é a passagem necessária para o concreto;

11) possibilita uma maior visão do todo, pois desenvolve a capacidade de análise, de solução de problemas relevantes e historicamente situados;

12) possibilita maior articulação com a realidade histórica.

CONCLUSÃO

O problema formulado por Hilbert, encontrar um método único calcado na lógica, para a solução dos problemas matemáticos, foi respondido de forma negativa na história, e para isso as máquinas abstratas foram fundamentais.

A importância dos dispositivos de Turing e Post reside justamente na definição clara dos limites do formalismo lógico, exaltando a importância e a eficiência dos procedimentos mecânicos, em especial através do uso de computadores, mas também indicando seu raio de alcance, que não abarca toda a matemática, nem toda a realidade.

Nosso argumento é contra erigir-se a lógica ou o formalismo como critério único de enfrentamento da realidade, e a favor da utilização, mesmo no ensino básico, devidamente informada pela análise histórica e filosófica, dos dispositivos de Turing e Post, como profundamente esclarecedores dos limites entre lógica, informática, matemática e a existência concreta.

Capítulo Onze

A ANALOGIA E A RELAÇÃO ANALÓGICO-DIGITAL

INTRODUÇÃO

Com o surgimento contemporâneo do computador eletrônico digital, o termo analógico tem sido vulgarmente utilizado como sinônimo de contínuo, e em oposição a digital, por sua vez utilizado como sinônimo de discreto, pois o computador analógico opera com grandezas contínuas, enquanto o digital com valores discretos. Contudo, esta caracterização não é completa, nem faz jus à razão do nome computador analógico para uma certa classe de dispositivos artificiais.

Computadores eletrônicos podem ser divididos de forma ampla em duas classes, computadores analógicos e computadores digitais. No primeiro, uma quantidade variável a ser estudada ou manipulada é representada por uma quantidade elétrica, usualmente um potencial elétrico. **Diz-se que as quantidades**

da máquina são análogas às quantidades reais – daí o nome 'analógico". No computador digital, as quantidades variáveis são representadas por códigos numéricos, usualmente no sistema de numeração binário[1]. (COMPUTING..., 1996, p. 245, grifo nosso)

Quando se conhece a equação diferencial (ordinária e linear) que representa um certo processo físico, pode-se construir um circuito elétrico representado pela mesma equação diferencial; observando-se o comportamento do circuito montado em condições análogas às do processo em estudo, pode-se encontrar soluções relativas à situação concreta dada. Este é o princípio de funcionamento dos computadores analógicos clássicos[2].

Ora, o par contínuo-discreto constitui-se em uma dimensão associada ao par analógio-digital; mas as relações entre sistemas analógicos e digitais não se resumem simplesmente às relações existentes entre contínuo e discreto.

De imediato temos que, sem dúvida, o termo analógico está sempre associado à ideia de analogia, mesmo quando se refere a dispositivos técnicos. É isso que expressa a seguinte definição de analógico:

1) raciocínio **relativo a ou baseado em** analogia;

2) que expressa ou implica analogia. (WEBSTER'S..., 1966, p. 76-77)

Será apenas um acaso de homonímia que analógico designe ao mesmo tempo um tipo de cálculo, a computação analógica, e uma forma de raciocínio, o raciocínio analógico?

A mesma condição operatória básica parece caracterizar ambos os processos: a analogia, isto é, a transferência de significados entre dois domínios, seja através de dispositivos materiais que incorporam certas leis físicas no primeiro caso, seja através da construção de modelos que incorporam certas relações relevantes no segundo caso.

Assim, antes de centrarmos nossa atenção no par analógico-digital, vamos vagar nas suas redondezas, como forma de mapear melhor o contexto em que se insere nosso objeto de conhecimento.

[1] Esses códigos numéricos do computador digital também são potenciais elétricos; mas não há analogia (proporcionalidade) às grandezas reais representadas.

[2] O leitor interessado poderá encontrar a descrição desse funcionamento em detalhes em Crank (1947), Gleitz (1968), Dodd (1969), Goldstine (1972) ou Santos (1974).

NOÇÃO DE ANALOGIA

Etimologicamente, o termo analogia origina-se do grego αυαλογια, formado de αυα (segundo) e λογοσ (razão).

O termo analogia foi primeiramente utilizado pelos gregos significando similaridade em relações proporcionais, Nos livros V e VI da obra *Elementos,* de Euclides, o termo é utilizado para se referir à semelhança proporcionada entre duas ou mais quantidades, como a semelhança entre dois triângulos (que diferem apenas na escala) ou uma proporção do tipo a:b :: c:d (2:4::6:x, x = 12).

Também os gregos utilizaram o termo analogia significando a similaridade de funções desempenhadas por duas coisas distintas em seus respectivos ambientes. Aristóteles (1987), pai do silogismo, e consequentemente da lógica moderna, base do digital, é também, por outro lado, um dos primeiros pensadores a discutir a relevância do pensamento por analogias; é esse filósofo quem explicita o tipo de inferência que estamos discutindo.

Segundo o estagirita, a semelhança deve ser estudada, em primeiro lugar, nas coisas que pertencem a gêneros diferentes, segundo a fórmula A:B = C:D (por exemplo, o conhecimento relaciona-se com o objeto de conhecimento assim como a sensação se relaciona com o objeto da sensação), e "assim como A está em B, do mesmo modo C está em D" (por exemplo, assim como a visão está no olho, a razão está na alma, e assim como a calma está no mar, está a falta de vento no ar). A prática se faz especialmente necessária quando os termos estão muito afastados entre si, pois nos outros casos poderemos ver mais facilmente, de um relance, os pontos de semelhança. Devemos também examinar as coisas que pertencem a um mesmo gênero para ver se todas elas possuem um atributo idêntico – por exemplo, um homem, um cavalo e um cão –, pois na medida em que possuem algum atributo idêntico, são semelhantes entre si. (ARISTÓTELES, 1987, cap. 17, p. 20)

Aristóteles afirma que as analogias (similaridades) são úteis tanto para a construção de argumentos indutivos quanto para a construção de raciocínios hipotéticos, e até mesmo para definições. Mas o raciocínio por analogia difere tanto da dedução quanto da indução.

Claramente, então, argumentar através de exemplos não é nem como raciocinar da parte para o todo, nem como raciocinar do todo para a parte, mas antes raciocinar da parte para a parte, quando ambos particulares são subordinados ao mesmo termo, e um deles é conhecido. (ARISTÓTELES, 1952, p. 90-91)

Na filosofia clássica, Platão (1990) também se utilizou de analogias em suas argumentações. Com o intuito de tornar uma relação ainda não conhecida acessível ao entendimento a partir de uma relação análoga conhecida, é muito famosa sua comparação, no livro VI de *A república*, entre a ideia de deus, que torna o conhecimento possível no mundo inteligível, e o sol, que torna possível a visão no mundo das percepções. (PLATÃO,1990, p. 309-312)

Na Idade Média, período histórico em que a Igreja detinha a hegemonia política, econômica e cultural, o metaparadigma consubstanciado pela ideia que Deus fez o homem à sua imagem e semelhança tem como consequência a crença em um universo estático e hierarquizado, no qual todas as coisas possuem uma essência; a analogia entre as leis divinas (concepção jurídica de lei) e as leis naturais (concepção física de lei) tornou os argumentos por analogia bastante frequentes nesse período.

Na modernidade, uma das primeiras considerações sobre a analogia é a de Locke (1978, p. 328-329), que a considera uma das categorias do assentimento; a analogia é a única ajuda que o homem dispõe para o conhecimento das operações que se coloquem fora da experiência humana direta.

É também conhecida a identificação que faz Hobbes (1979, p. 27-31) do pensamento com o cálculo, especialmente no que se refere ao pensamento racional e à ciência. Mesmo assim, este autor faz uma pequena concessão à analogia, que pertenceria à esfera da imaginação, em oposição ao juízo, lugar do cálculo racional.

Na demonstração, no conselho e em toda busca rigorosa da verdade, o juízo faz tudo. A não ser que por vezes o entendimento tenha que ser ajudado por uma semelhança adequada, havendo nesse caso um uso da imaginação. (HOBBES, 1979, p. 44).

Ao justificar a dificuldade de seu intento de contrapor ao *Organon* aristotélico um *Novo Organon*, Bacon (1988, p. 19-20) afirma que é sempre através de analogias com as coisas antigas que compreendemos as coisas novas.

Esta característica do aprendizado que, segundo Bacon, tornava árdua a sua tarefa, pois pretendia romper com a antiga filosofia aristotélica é, inversamente para nós, aquela que acreditamos tornar possível, através da transferência de significados entre diferentes domínios, a tarefa de ensinar.

Aliás, o próprio Bacon (1988), na esfera da produção do conhecimento, assim se refere à analogia:

Finalmente deve ser lembrado que todas as investigações diligentes e toda coleta de fatos empreendidas pela história natural devem mudar de direção e voltarem-se para um fim contrário àqueles para os quais ora são dirigidas. Até agora os homens tiveram grande curiosidade por conhecer a verdade das coisas e por explicar de modo apurado as diferenças existentes entre os animais, entre as ervas e entre os fósseis. Tais diferenças, na maior parte, são como que caprichos da natureza e não coisas de alguma utilidade para a ciência. Prestam-se, certamente, ao divertimento, às vezes servem à prática, mas muito pouco ou nada para a prospecção da natureza. Por isso toda obra deve voltar-se inteiramente para a investigação e a observação das semelhanças e das analogias, seja no todo ou nas partes. Estas são, com efeito, as que conferem unidade à natureza e dão início à constituição da ciência. (BACON, 1988, Livro II, Aforismo XXVII, p. 146).

Assim como Bacon, Hume (l952, p. 487) também destaca a força e importância do raciocínio por analogia. Até mesmo Kant (1952, p. 547-548) utilizou e considerou os raciocínios por analogia: na discussão do belo como símbolo da moralidade temos um exemplo, não o mais famoso – que é sem dúvida o utilizado na prova teleológica da existência de Deus – mas certamente um dos mais interessantes para propósitos didáticos.

Queremos destacar ainda William James (1952, p. 678), que, em *The principles of psychology*, considera a associação por similaridade, ou seja, a analogia, um elemento de genialidade: "[...]a mente na qual este modo de associação mais prevalece será, da sua melhor oportunidade de esclarecer qualidades, a mais inclinada ao pensamento racional".

No pensamento científico, analogias frequentemente sugerem hipóteses de trabalho (como exemplificado na Figura 1), e até mesmo fomentam linhas de investigação.

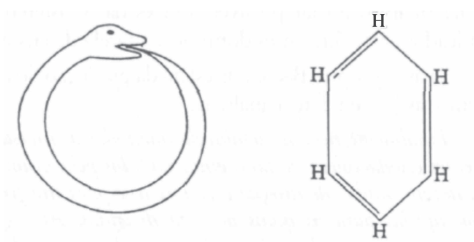


fig. 1

Nesta figura, a analogia visual de uma cobra mordendo o próprio rabo contribuiu para Kekulé construir o modelo molecular de estrutura circular para o benzeno. (HOLYOAK; THAGARD, 1996, p. 13)

Muitas vezes uma relação observada em um certo contexto sugere pistas para o entendimento de fenômenos em outros contextos. Como exemplo, podemos citar a observação das luas de Júpiter, que sugeriu a concepção moderna de sistema solar. A seleção artificial de animais de espécies domésticas, feita por criadores, sugeriu a Darwin, por analogia, a ideia de seleção natural. Ainda relativamente à teoria da evolução, a célebre ideia malthusiana do crescimento exponencial da população mundial em contraste com o crescimento apenas linear da produção possibilitou a construção, por analogia, da hipótese que a seleção natural é um mecanismo de evolução da espécie humana.

As muitas consequências extraídas destas e de outras analogias em ciência mostram que este tipo de construção tem sido muito fértil na criação científica.

O raciocínio analógico, mesmo quando é competente do ponto de vista operacional, ou seja, é um instrumento heurístico profícuo, exige atenção quanto aos limites do seu domínio, e também quanto aos subprodutos ideológicos de sua assunção, para se tornar epistemologicamente pertinente. Mas a capacidade criativa do raciocínio por analogia é sempre surpreendente.

Bramly (1989), em sua biografia de Leonardo da Vinci, diz que este genial homem das artes e da ciência registrou, no verso de uma página repleta de anotações sobre o vôo dos pássaros, uma de suas recordações de infância, na qual, ainda quando era criança de berço, um certo pássaro denominado milhafre se aproximava e abria sua boca (de Leonardo) com a cauda, batendo com a cauda em seus lábios diversas vezes. Na sua interpretação, Freud (1970), que troca o milhafre por um abutre, diz que a cauda desse pássaro seria um substituto do seio materno.

Na mitologia egípcia, a mãe era representada por um abutre – símbolo da maternidade – pois se pensava que os abutres eram sempre fêmeas; sem machos, a fecundação dessas fêmeas ocorria durante o voo, quando estas abriam seus órgãos sexuais e eram penetradas pelo vento,

Ora, o mito egípcio, segundo Freud, foi utilizado pela Igreja com o intuito de refutar, por analogia, os argumentos contrários à virgindade da mãe de Jesus, Maria. Assim, Freud concluiu que Leonardo da Vinci também era filho de abutre: tinha mãe, mas não tinha pai – traço considerado importante para a compreensão psicanalítica de Da Vinci. Freud se tornou posteriormente ciente de seu engano em considerar o milhafre de Leonardo como o abutre da mitologia; contudo, como afirma Gay (1991), aquele autor, sempre disposto a corrigir seus erros, como fizera em muitas outras ocasiões, nunca revisou sua análise de Da Vinci.

As explicações causais não possuem privilégio especial nas interpretações psicanalíticas – que como uma forma interpretativa se ocupa em obter ou atribuir significados – de forma que a solidariedade analógica criada *a posteriori* no caso citado, apesar de elaborada a partir de um erro, ou como diz Bramly, apesar de utilizar premissas falsas, tem bastante valor para a psicanálise.

Assim, é através de raciocínio analógico que se operam as extensões ou reduções de conceitos científicos (ex.: luta pela sobrevivência e luta de classes). Também como instrumento retórico, a analogia tem grande força persuasiva, pois possibilita tornar algo desconhecido mais familiar. Feyerabend (1977), em *Contra o método*, analisa a importância e a capacidade persuasiva da retórica galileana, que faz largo uso de analogias, para a constituição da ciência moderna. A analogia é, assim, um privilegiado instrumento heurístico e pedagógico (para uso científico e educacional.)

Uma analogia, todavia, não é uma associação absoluta e universal entre domínios. Mas que tipo de argumento é absoluto e universal? Nenhum, certamente; nem mesmo uma inferência lógica, como se poderia eventual e erroneamente supor, pois está situada apenas no nível sintático.

Nos casos em que o raciocínio analógico foi fértil para a ciência, as semelhanças de relações entre os análogos se mostraram relevantes e se fortaleceram com o próprio uso da analogia; as diferenças entre os domínios colocados em correspondência, ao contrário, ou eram ou se tornaram irrelevantes com a valorização da construção analógica.

Contudo, em nome de uma pretensa objetividade, a virtude iria desconfiar da analogia:

> Uma ciência que aceita as imagens é, mais do que qualquer outra, vítima das metáforas. Assim o espírito científico deve lutar sem cessar contra as imagens, contra as analogias, contra as metáforas... O perigo das metáforas imediatas para a formação do espírito científico é que elas não são sempre passageiras; desenvolvem um pensamento autônomo; tendem a completar-se e a aperfeiçoar-se no seio da imagem. (BACHELARD apud SANTOS, B., 1989, p. 112)

Mas o crítico impiedoso, ele próprio, sucumbe aos encantos e pratica a analogia. Como mostra Boaventura Santos(1989, p. 113), através dos exemplos da analogia astronômica, na distinção entre filosofia diurna e noturna, e da analogia eclesiástica, na distinção entre espírito regular e secular, "[...] é fácil verificar que sua obra epistemológica está saturada de imagens, analogias e metáforas". E na filosofia noturna do próprio Bachelard (1989), voltado para a investigação do processo de criação artística, como, por exemplo, em *A chama de uma vela*, pululam as analogias e as metáforas.

A ciência moderna privilegiou o lógico em detrimento do analógico, realçou os antagonismos entre o lógico e o analógico, e menosprezou suas conexões, em favor do primeiro. Contudo, "[...] se as ciências desconfiaram oficialmente da analogia, também a praticaram clandestinamente". (MORIN, 1987, p. 133)

A analogia intervém como um processo exploratório e unificador de domínios diferentes, e é capaz de evidenciar novas perspectivas, articulações insuspeitas, harmonias etc, que a lógica digital não é capaz de propiciar.

É preciso, todavia, estar alerta para a diferença entre analogia e semelhança. Na Idade Média, acreditava-se que semelhanças na forma acarretavam semelhanças de função.

Para Wieser (1972, p. 18) a analogia é a representação da mesma função por materiais ou princípios diferentes; por exemplo, a asa de colibri é análoga à asa da borboleta dado que a mesma função de voo é desempenhada nos dois casos. Por outro lado, ainda afirma o autor, no caso de uma formação rochosa que nos fazer lembrar um camelo não temos uma analogia, mas uma simples semelhança de forma.

Outra distinção importante, agora entre analogia e proporção, é explicada por Perelman (1970). Partindo do esquema típico da analogia (A está para B, assim como C está para D), a proporção "3 está para 4 como 9 está para 12" se constitui em uma igualdade de relação, na qual os termos da igualdade são intercambiáveis, diferentemente da **analogia.**

> É essencial para que a analogia preencha um papel argumentativo, que o primeiro par (A-B) seja menos conhecido, sob algum aspecto, que o segundo (C-D) o qual deve estruturar o primeiro graças à analogia. (PERELMAN, 1970, p. 272)

Segundo Morin (1987, p. 132), o conhecimento por analogia percebe, faz uso e produz similitudes que podem ser encontradas:

a) nas proposições ou nas relações;

b) nas formas ou configurações, podendo estabelecer isomorfismos ou homeomorfismos;

c) na organização ou função;

d) em jogos livres, espontâneos, apenas sugestivos ou afetivos.

Assim, o (re)conhecimento por analogia estaria presente em toda atividade cognitiva, como na produção de conhecimento e no ensino.

Através da analogia, o sujeito cognoscente supõe e explora relações. Alternativa à binária escolha entre o significado único e a falta de significado (entre o unívoco e o equívoco), a analogia possibilita a construção e a exploração de múltiplos significados, em uma cadeia de transferências de significados sempre transformados entre os análogos. Por ser tautológica, a lógica digital é estéril, no sentido de que através dela não se pode extrair *novos* significados. A analogia, por outro lado, caracterizada pela interação dinâmica entre os análogos, transforma continuamente esses análogos: cria um excedente de significado. A analogia não prova, é bem sabido, assim como a lógica prova as proposições apenas em si mesmas, tautologicamente. Ambas são igualmente insuficientes e necessárias na produção e reprodução do conhecimento. Tendo como critério o desempenho e a eficácia, o processo digital é certamente mais adequado; mas, se o critério é a capacidade de criar novos significados e de estimular a produção de conhecimento, então a analogia é mais pertinente.

O processo analógico apresenta, com efeito, o interesse de estimular a pesquisa, de lhe orientar as perspectivas e de transferir uma ordem descoberta num sistema para outro sistema. (ALLEAU, 1982, p. 86)

A analogia estimula a produção de conhecimento, desenvolve a capacidade e a necessidade de observações, provoca antecipações (adivinhações), unifica domínios. A analogia pode enganar, e como não engana sempre, é perigosa, traiçoeira; contudo, mesmo que uma analogia leve a uma construção nova cujo valor brevemente será questionado, esse conhecimento tem valor exploratório e didático.

A situação acima pode ser exemplificada na história da ciência com a criação, a exploração e o abandono do modelo planetário do átomo, que mesmo superado e esquecido na teoria atômica atualmente em voga (a teoria quântica), possui inestimável valor didático para uma primeira aproximação teórica da estrutura do átomo na escola básica.

Contrariamente às semelhanças formais, as semelhanças conceituais, dadas pela analogia e por sua forma reduzida – a metáfora, que ocorrem no conhecimento científico, permitindo estender conceitos de um campo a outro, possibilitam a compreensão de novos conceitos e a generalização de resultados. Por exemplo, as propriedades da eletricidade em certos meios condutores foram historicamente colocadas em correspondência com propriedades da água em canais: a eletricidade flui por fios condutores como a água flui por canais; ou, ainda, a eletricidade nos fios é como uma corrente de água; e, por fim, reduzidamente, a corrente elétrica.

A analogia acima se incorporou tão intimamente ao "idioma" da ciência que praticamente não a notamos enquanto analogia. A comparação entre circuitos elétricos e hidráulicos se constitui, pela semelhança de relações entre eles, em um útil recurso didático.

O termo analógico, derivado de analogia, é empregado de forma bastante extensa e diversificada. Pode designar a forma do sinal de informação, e nesse caso se confunde com contínuo, pode designar um tipo de argumentação, e nesse caso se aparenta com a metáfora, pode designar uma forma de conhecimento, uma lógica, e nesse caso se fala em pensamento ou raciocínio analógico.

Todas as considerações, exemplos e definições acima se integram em uma família, e constituem um campo fértil a partir do qual, como pretendemos, a própria noção de analogia surge analogicamente. De posse da noção de analogia, que permite melhor compreender o termo analógico, podemos agora passar ao par analógico-digital, iniciando pela análise da importância dos pares de opostos conceituais na filosofia ocidental, e preparando o terreno para a ideia de tensão analógico-digital.

OPOSTOS EM INFORMÁTICA

Um dos problemas teóricos fundamentais, amplo e complexo, presente em todas as áreas do saber filosófico e científico, é elucidar as relações presentes em pares de oposições que impregnam tais saberes. Por exemplo, a relação entre o particular e o universal, entre o concreto e o abstrato, entre a análise e a síntese, apenas para citar algumas entre muitas outras.

Assim, as oposiçõcs conceituais, que produzem um pensamento construtivo do conhecimento, colocam-se como questão lógica, categorial e cognitiva.

O pensamento por opostos, se por um lado, não pode ser reduzido à organização social, por outro não constitui arquétipos ideais e transhistóricos. Os opostos ao mesmo tempo se alimentam e informam os complexos cognitivos mais amplos.

Feita a ressalva, contudo, é interessante notar que o número dois é o par, o duplo, o dual etc, o primeiro número inteiro diferente de um (a unidade, o "indiferenciável"); daí a importância dos pares de opostos na epistemologia: a construção do conhecimento requer o estabelecimento de diferenças.

O pensamento por opostos é a forma mais básica para o estabelecimento de diferenças, mas não a única forma epistemologicamente relevante. Às relações do tipo dual podemos acrescentar pelo menos duas outras:

1) As relações triádicas, como na dialética hegeliana e marxista, nas quais os termos da relação são a tese, a antítese e a síntese; ou ainda a semiótica peirciana, com a tríade dos conceitos de índice, ícone e símbolo.

2) As relações quaternas ou tetraédricas, presentes na obra de Jung (1988), que considerava tal organização do pensamento arquetípica. Por exemplo, o tetraedro pitagórico formado pela aritmética, geometria, música e astronomia, quatro ramos da matemática; ou ainda o tetraedro da alquimia formado pelos assim considerados quatro elementos fundamentais, o fogo, a ar, a terra e a água.

Pelo menos tais formas são recorrentes na história do pensamento humano e têm destacada posição epistemológica.

Fixemos agora nossa atenção na ideia geral de oposição, de pares de opostos. Qualquer classificação é arbitrária, no sentido que devem ser arbitrados os critérios para sua elaboração. Isso se aplica também, evidentemente, aos pares de opostos. Além do mais, a relação entre um par de opostos em diferentes áreas do saber guarda semelhanças, mas também pode, em cada área, ter particularidades que não nos permitiriam identificá-las senão parcialmente.

Vejamos, então, tendo em mente as ressalvas do parágrafo anterior, uma classificação das figuras ou categorias de oposição entre pares de conceitos. Utilizamos dois macrocritérios de organização, a saber, a forma (contínua ou discreta) e a amplitude da negação (antagônica ou não-antagônica).

O Quadro 1, a seguir, sumariza nossa análise. (GIL, 1978)

QUADRO 1: Figuras de Oposição

negação \ forma	Contínua	Discreta
Não antagônica	Dualidade	(simetria) complementariedade
Antagônica	Contrariedade	contradição (dilema/paradoxo)

Para maior clareza de exposição, vejamos alguns exemplos de pares de opostos, além de certas características das figuras apresentadas na tabela. Começaremos pelas figuras contínuas.

a) Dualidades

Exemplos: seco-úmido; claro-escuro; quente-frio.

Os pares acima representam extremidades de uma escala contínua; um termo significa privação em relação ao outro. A escala comporta variações para mais e para menos, podendo-se perceber uma estrutura de ordem (relações transitivas). Pontos diferentes na escala são disjuntos, mas não exclusivos.

b) Contrariedades

Exemplos: branco-preto; dor-prazer.

As contrariedades também se dispõem em um contínuo cujos limites são os pares em oposição; são mutuamente exclusivas (a presença de um fato significa a eliminação dos demais), mas não exaustivas do domínio em que estão inseridas. Dois contrários podem ser falsos.

Passemos agora para as figuras discretas ou dicotômicas:

a) Simetria

Exemplos: qualquer automorfismo (rotação, translação)

Os termos simétricos podem ser considerados como possuindo grau zero de oposição; a simetria representa o equilíbrio.

b) Complementaridade

Exemplos: par-ímpar; macho-fêmea; vertebrado-invertebrado.

Os termos complementares são disjunções exclusivas e exaustivas de um domínio; a oposição é decorrente de um operador externo, geralmente desconhecido; os termos complementares são duas faces heterogêneas de um mesmo domínio, a relação entre eles é circular; a complementaridade está a meio caminho entre a simetria e a contradição.

c) Contradição

Exemplos: falso-verdadeiro; repouso-movimento.

Os termos opostos na contradição possuem uma incompatibilidade exclusiva e exaustiva do ponto de vista da lógica clássica. A negação é o operador (externo ao domínio considerado) da contradição.

d) Dilemas e paradoxos

Exemplos: se correr o bicho pega, se ficar o bicho come (dilema); eu minto (paradoxo). São figuras aparentadas à contradição.

E preciso destacar que as figuras de oposição estão na base da construção de diversos pares de conceitos de grande importância epistemológica como discreto-contínuo, concreto-abstrato, sintético-analítico, todo-parte, identidade-diferença, e analógico-digital – este último par de grande importância para a informática, na qual proliferam outros pares de opostos de significado ainda apenas operacional.

Apesar da já descrita preocupação filosófica com a questão da analogia e do raciocínio analógico – principalmente na filosofia clássica e escolástica – o par analógico-digital só chegou a constituir-se com a contemporânea emergência do digital. Conforme Ceboleiro (1978, p. 224), em um dos raros trabalhos que versam sobre a relação analógico-digital,

> O que é de algum modo surpreendente neste par de conceitos, cuja elaboração filosófica é extremamente recente, é sua origem técnica, a linguagem dos computadores – e haveria aqui decerto um tema de reflexão dada a prática inexistência de conceitos filosóficos de matriz técnica.

A Informática se constitui na matriz técnica, em cujo núcleo estão os computadores e suas linguagens, a que Ceboleiro se refere. Assim, elaboramos o quadro a seguir (Quadro 2), em que apresentamos pares de opostos que frequentemente organizam o discurso da informática.

QUADRO 2: Opostos em Informática

HARDWARE	SOFTWARE
MÁQUINA	HOMEM
MANUAL	AUTOMÁTICO
SERIAL	PARALELO
CÉREBRO	MENTE
DETERMINÍSTICO	PROBABILÍSTICO
COMPUTÁVEL	NÃO COMPUTÁVEL
ARTIFICIAL	NATURAL
ALGORÍTMICO	HEURÍSTICO
RECURSIVO	INFERENCIAL
INSOLÚVEL	SOLÚVEL
FORMA	CONTEÚDO
PROGRAMA FONTE	PROGRAMA OBJETO
ON-LINE	OFF-LINE
REAL	VIRTUAL
BATCH	INTERATIVO
MAINFRAME	MICROCOMPUTADOR
CENTRALIZADO	DISTRIBUÍDO
MONOUSUÁRIO	MULTIUSUÁR1O
MONOTAREFA	MULTITAREFA
EMULAR	SIMULAR
SISTEMA FECHADO	SISTEMA ABERTO
SIMBOLISMO	ESTRUTURALISMO
PREVISÍVEL	IMPREVISÍVEL
CÓPIA / REPETIÇÃO	CRIAÇÃO
DADO	INFORMAÇÃO
DIGITAL	ANALÓGICO

Note-se que alguns desses pares permeiam o discurso da Informática, mas sua origem é anterior e exterior ao domínio das tecnologias da informação. Por exemplo, o conhecido dualismo cartesiano mente-corpo, que no quadro acima aparece na forma mente-cérebro; ou ainda os opostos clássicos forma-sentido e discreto-contínuo.

Outros pares, recorrentes no domínio da Informática e domínios afins como a Inteligência Artificial e a Cibernética, parecem estar, contudo, confinados nesses domínios, não exercendo aparentemente, até esse momento, nenhuma influência no pensamento filosófico. É o caso, por exemplo, dos pares *hardware-software*, serial-paralelo, programa fonte – programa objeto, *on-line/off-line*, *batch*-interativo, etc.

Mesmo o impacto, ainda vibrante nos meios de comunicação, do tema da realidade virtual, só muito recentemente tem catalisado a reação crítica necessária para se ultrapassar o mero fascínio pela técnica e seus resultados, tomando o cada vez mais presente par real-virtual para a reflexão conceitual (LÉVY, 1996).

O par analógico-digital se associa, por seu turno, de forma complexa e fértil, aos pares contínuo-discreto, concreto-abstrato, sintático-semântico e parte-todo. Agora, contudo, estamos compelidos a percorrer alguns meandros da matriz técnica do par analógíco-digital.

DISPOSITIVOS ANALÓGICOS E DIGITAIS

Os modernos relógios digitais contam e processam o número de vibrações de um cristal de quartzo, apresentando os dígitos que representam a hora do dia no visor do relógio; já os tradicionais relógios analógicos usam um sistema de engrenagens que movimentam seus ponteiros de maneira contínua e suave, em um movimento análogo ao movimento da Terra em torno do Sol. Os computadores propriamente ditos são tipos especiais de dispositivos; assim, antes de nos fixarmos nos computadores analógicos e digitais, vamos nos deter um pouco mais na distinção entre dispositivos analógicos e digitais:

1. Dispositivos analógicos: operam com grandezas físicas contínuas tais como distância, deslocamento angular, velocidade, aceleração, volume de um líquido, potencial elétrico etc, grandezas estas análogas a um outro conjunto de variáveis contínuas ou discretas cujo comportamento se tem interesse de conhecer. Além do exemplo já mencionado do clássico relógio mecânico, podemos ainda mencionar: relógio d'água, termômetro, acelerador do automóvel, controle de volume de um rádio, a régua de cálculo, o planímetro, o analisador

diferencial; também os sons da fala têm um funcionamento analógico, e a representação através de mapas é caracteristicamente analógica, de forma que as cordas vocais e os mapas podem ser considerados, respectivamente, dispositivos naturais analógicos e dispositivos artificiais analógicos. Atualmente, uma das grandes vedetes tecnológicas é o telefone celular, cujo funcionamento, fundado na utilização de ondas de rádios, é analógico – o analógico, portanto não é necessariamente, como se poderia pretender, o velho, o antigo, o ultrapassado, nem mesmo no âmbito tecnológico.

A analogia nesses dispositivos pode ser direta, como por exemplo no caso do termômetro, no qual a variação do comprimento da coluna de mercúrio representa diretamente a variação da temperatura; ou pode também ser indireta, como por exemplo no caso do analisador diferencial (no qual as tensões elétricas representam parâmetros e variáveis de equações, essas por sua vez análogos matemáticos de uma situação real) ou na régua de cálculo.

A régua de cálculo (Figura 2) consiste em duas escalas logarítmicas idênticas, encaixadas de forma a se movimentarem uma em relação à outra na direção da própria escala. A escala logarítmica é constituída de uma sequência de números (grafados nas partes da régua) tal que o número que aparece em dada posição está de fato a uma distância da origem da escala igual ao seu logaritmo. Com esse dispositivo o produto de dois números é computado de forma analógica: somando-se os comprimentos reais sobre a régua dos dois números, fazendo-se uma das escalas deslizar sobre a outra como no exemplo na Figura 2.

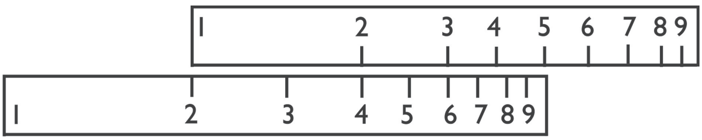


FIGURA 2 – Régua de cálculo indicando o produto 2x3 = 6. Observe que log 2 + log 3 = log (2x3) = log 6.

É usual se dizer que a característica fundamental comum a todos esses dispositivos é que processam informações contínuas. A continuidade é uma dimensão do analógico de grande importância, particularmente para o funcionamento de dispositivos técnicos.

Mas, por outro lado, também o nosso sistema humoral, baseado na secreção mais volumosa (intensa) ou menos volumosa (intensa) de certas substâncias na corrente sanguínea, é um sistema analógico.

2. Dispositivos digitais : operam com códigos discretos arbitrários.

Por exemplo, o ábaco, a Pascalina (máquina de somar inventada por Pascal), a máquina diferencial de Babbage, qualquer dispositivo de cálculo ou controle envolvendo rodas dentadas (engrenagens), e qualquer mecanismo do tipo liga-desliga, como um interruptor elétrico. Como as letras do nosso alfabeto são sinais discretos, a escrita, diferentemente da fala, é qualificada como instrumental do tipo digital, assim como o código morse de comunicação.

O termostato exemplifica um dispositivo ao mesmo tempo analógico e digital, por ser composto por um termômetro (analógico) e uma chave liga-desliga (digital). Passemos agora aos computadores. Por quase 100 anos o grandioso projeto jamais realizado de Babbage (1792-1871) não encontrou paralelo. Poucos anos antes do aparecimento dos computadores eletrônicos modernos, digitais como a máquina analítica de Babbage, ocorrido após a Segunda Guerra Mundial, surgiu, contudo, uma classe de computadores com importante aplicação na engenharia e no controle de processos através da resolução de equações diferenciais. Estes computadores foram chamados analógicos, como, por exemplo o dispositivo mecânico construído por Bush (1890-1974) em 1930 – o Analisador Diferencial.

Os computadores analógicos e os computadores digitais constituem duas classes fundamentalmente diferentes quanto ao princípio de operação[3].

A diferença geralmente ressaltada entre esses dois tipos de computadores pode ser grosseiramente resumida na seguinte sentença: o computador analógico mede e o computador digital conta. Fazendo uma analogia com sistemas mecânicos de cálculo, o ábaco é um sistema digital e a régua de cálculo, um sistema analógico. Talvez seja mais apropriado considerar os computadores analógicos como dispositivos de funcionamento baseados em leis físicas, enquanto o computador digital, em regras lógicas.

Um computador analógico representa as quantidades por meio de grandezas físicas, como, por exemplo, a intensidade de uma corrente elétrica ou o ângulo de giro de uma engrenagem; tal computador realiza as operações por meio de fenômenos físicos.

Os computadores analógicos são usados em laboratórios de pesquisa e para aplicações científicas e tecnológicas, como, por exemplo, o estudo de redes

[3] O computador digital, principal mas não exclusivamente, é descrito com fluência por Breton (1991). Já a computação analógica, muito mais em sua constituição e funcionamento, referentes aproximadamente à década de 70, é discutida por José Santos (1974), entre outros que indicam ainda vasta bibliografia afim.

de distribuição de energia elétrica. São ainda utilizados em química industrial, bioquímica, sistemas educacionais, análises clínico-patológicas, engenharia biomédica, explorações espaciais, determinações meteorológicas etc.

Em tais computadores, as equações ou sistemas de equações são resolvidos por meio de analogia, por semelhança entre quantidades internas e o valor colocado na máquina.

Já os computadores digitais representam as quantidades por meio de símbolos e executam as operações lógicas e aritméticas através de um programa (algoritmo) armazenado em sua memória.

Uma questão que se insinua rapidamente quando se verifica a existência de dois tipos de computadores, é: por que a história privilegiou a construção de computadores digitais?

Uma explicação é dada por Bylinsky (1980): a confluência entre um novo componente técnico, o transistor, e um novo componente lógico, o programa armazenado na memória.

Assim, do ponto de vista econômico:

> O advento quase simultâneo do computador digital de programa armazenado proveu um grande mercado potencial para o transistor [...] um mercado muito maior que as aplicações tradicionais da eletrônica em comunicações poderia prover. A razão é que os sistemas digitais requerem um número muito grande de circuitos ativos comparado com sistemas tendo amplificação analógica [...] (BYLINSKY, 1980, p. 15)

Do ponto de vista estrito da computação eletrônica por computadores, os computadores analógicos trabalham com um número de circuitos muito menor que os digitais, mas, por outro lado, aqueles necessitam de amplificação do sinal elétrico, o que usualmente representa uma limitação (decorrente dos níveis máximos de diferença de potencial elétrico nesses dispositivos).

Outro aspecto, ainda relativo ao ponto de vista acima tratado, diz respeito à velocidade de operação. Segundo Harmon (1975), ao descrever a história dos primeiros computadores, e referindo-se a esses dispositivos, já que a velocidade dos computadores digitais tem crescido sempre desde então, afirma que:

> Até aquele tempo dispositivos analógicos provaram ser mais rápidos que dispositivos digitais Mis como o calculador de

> Babbage. Mas dispositivos digitais ofereciam vantagens em acurada, adaptabilidade, e número de casas decimais a serem obtidas. (HARMON, 1975, p. 123)

Ainda podem ser feitas outras considerações da mesma ordem, como, por exemplo, as atinentes às operações elementares de um computador ou calculador analógico.

Muitas obras técnicas ou de divulgação fazem considerações destacando um aspecto considerado operacional: a precisão do computador digital contra o cálculo apenas aproximado do computador analógico. Isto não é correto, pois, de fato, tanto os computadores analógicos quanto os computadores digitais operam com uma certa escala de precisão – os analógicos devido, principalmente, à questão de precisão de medidas; o digital devido, principalmente à questão do limite no número de dígitos a serem representados.

Ora, a escolha entre um tipo ou outro é uma questão de finalidade. Para o controle de processos industriais, por exemplo, em que certas leis físicas podem ser utilizadas para monitorar o comportamento físico do processo, presta-se melhor o computador analógico; para manipulação simbólica, em que operações de lógica matemática são essenciais, o computador digital é mais adequado. A configuração sociopolítica e econômica da sociedade pós-industrial tem demandado, para seus fins, maior utilização, quantitativamente falando, de dispositivos digitais.

Fato notável foi o anúncio feito na revista inglesa *Nature* (MAHOWALD; DOUGLAS, 1991) de uma célula nervosa artificial (um "neurônio de silício"), primeiro dispositivo eletrônico que reage às mudanças do meio ambiente ajustando sua própria sensibilidade – através da comparação de um valor instantâneo com a média anterior, para aumentá-la ou reduzi-la, conforme o caso.

O dispositivo criado por Mahowald e Douglas apresentou em seus primeiros testes uma velocidade de reação um milhão de vezes maior que a velocidade de reação em um similar biológico. A dupla de cientistas utilizou a técnica de integração em grande escala "[...] para fabricar dispositivos analógicos, que lidam com uma escala de valores contínua, e não apenas bits de largura e intensidade fixas" (CARVALHO, 1992, p. 6l).

Tais resultados práticos contribuem para a discussão dos limites e possibilidades da computação analógica, e podem estar indicando a existência de novas demandas técnicas alternativas à estritamente digital. No que segue, trataremos, de forma mais particular, do cálculo digital e do cálculo analógico.

CÁLCULO ANALÓGICO E DIGITAL

É difícil saber quando o homem passou a utilizar instrumentos físicos para estudar os fenômenos. Por exemplo, Leonardo da Vinci utilizou maquetes em escala, e antes dele, fenícios, egípcios, gregos, e outros fizeram uso de algum instrumento com caráter analógico. Conta-se que Tales de Milero calculou a altura da pirâmide de Queóps usando dois triângulos semelhantes. Este é um dos exemplos mais antigos de cálculo analógico.

Mas a régua de cálculo construída por Gunther em 1620 é considerada em geral como o primeiro instrumento de cálculo analógico, com funcionamento distinto daquele da máquina de Pascal, de 1645, calculadora numérica.

Descartes, desde cerca de 1640, faz uso de curvas e gráficos que possibilitam o desenvolvimento de muitos dispositivos mecânicos de cálculo, como os planímetros de Hermann (1819) e de Amsler (1845). Em 1876, Thomson, irmão de Kelvin, desenvolve um tipo de planímetro que é utilizado no seu analisador harmônico.

Os primeiros calculadores analógicos elétricos (corrente contínua) são construídos por Westinghouse e G.K.C, em 1925. Vannevar Bush construiu o analisador diferencial em 1927, eletromecânico, que operava com fantástica precisão a partir de integradores a disco semelhantes aos utilizados pelo planímetro de Thomson, apesar de sua criação independente por Bush.

Diversos aperfeiçoamentos técnicos desde então, como no caso dos amplificadores eletrônicos de corrente, têm impulsionado o desenvolvimento de dispositivos analógicos de cálculo.

Desde a década de 60, nos processos industriais vem ocorrendo um processo de síntese entre os calculadores analógicos e os computadores digitais, muitas vezes associados em linha.

A utilização de máquinas analógicas, digitais ou híbridas, é uma questão de objetivos a serem alcançados. O tipo de problema e as condições de utilização orientam a escolha de um procedimento adequado levando em conta o tempo, o desempenho e o custo do processamento. No caso dos dispositivos analógicos, as equações utilizadas devem corresponder às do sistema estudado.

Os calculadores analógicos se dividem em duas categorias, de analogia direta ou indireta. Na analogia direta, um fenômeno é representado globalmente por uma grandeza equivalente; na indireta, um sistema é decomposto e representado por operadores padronizados que são agrupados de acordo com um organograma de cálculo compatível com a equação do sistema.

Os dispositivos de cálculo analógico utilizam procedimentos os mais diversos. Contudo, todos possuem em comum a característica de operar em conformidade com as leis físicas, diferentemente dos digitais que operam com leis lógicas. No caso de analogias diretas isto é facilmente percebido; no caso das analogias indiretas, o exposto acima se aplica a cada operação elementar, as quais são interconectadas conforme a equação a resolver. O modelo não é a reprodução de um objeto, mas das relações que interessam estudar.

No caso do uso de dispositivos analógicos para cálculo científico, o pesquisador experimenta sobre o modelo.

> Ele se interessará pelo aspecto qualitativo dos resultados antes de qualquer coisa, sem negligenciar por isso seu aspecto quantitativo que dependerá da tecnologia e do cuidado empregado para realizar as operações do modelo. Os erros provenientes de uma má formulação devem ser minimizados, e isto é o verdadeiro propósito da exploração de um tal conjunto. O fato de poder penetrar no mecanismo interno do fenômeno, graças à experimentação sobre o modelo, é portanto o aspecto mais frutífero da simulação analógica (GLEITZ, 1968, p. 13)

Um dispositivo analógico pode fornecer pistas úteis para uma programação digital; este método híbrido de trabalho explora por um lado a capacidade de determinação qualitativa do método analógico e a capacidade de manipulação quantitativa (simbólica, particularmente numérica) do método digital. A velocidade de solução de diversos problemas pode também ser otimizada; especialmente no caso em que a complexidade computacional é fator limitante, o conhecimento de novos modelos ou de soluções aproximadas simplifica os algoritmos do cálculo digital, acelerando a convergência dos resultados e tornando factível o cálculo.

Dispositivos analógicos também são utilizados com finalidades didáticas, especialmente em caso de simulações de situações que colocam em risco a integridade física dos treinandos, como é o caso de simulações de voo, por exemplo.

A regulação analógica de processos constitui-se em uma aplicação muito importante e utilizada dos dispositivos analógicos; tais dispositivos funcionam pelo sensoreamento analógico de grandezas físicas dos processos a serem controlados, e do *feedback* de controle, quando necessário.

A palavra analógico em seu significado mais geral e amplo cobre um campo bastante largo de dispositivos e fenômenos; considerar apenas aqueles dispositivos de cálculo aritmético, ou mais geralmente, de operações matemáticas, é se ater aos computadores analógicos. Os computadores analógicos de propósito geral (computadores universais analógicos) não operam de forma exclusivamente discreta.

O desenvolvimento estupendo da computação digital nas última décadas tem erodido algumas áreas de aplicação da computação analógica. Todavia, computadores digitais e computadores analógicos têm seus próprios e eventualmente distintos usos, e a questão não é de um substituir o outro.

Um computador analógico é essencialmente um instrumento de cálculo, mas em muitos dispositivos o processo de cálculo é apenas uma etapa de um processo mais complexo que envolve medições, cálculo e controle – como por exemplo em controle de processos industriais.

> Há decênios a técnica de modelagem, baseada na Teoria da Similaridade, é extensamente usada no estudo, no desenvolvimento e no projeto de vários tipos de sistemas e equipamentos, principalmente naqueles de dificil estudo direto e, naturalmente, naqueles de impossível estudo direto.
>
> Os modelos através dos quais se estudam os sistemas podem ser de vários tipos, desde modelos descritivos em texto corrido, passando por modelos matemáticos em várias técnicas (diagramas de bloco, circuitos, equações) e modelos em escala reduzida ou ampliada, até modelos análogos nos quais se usa um sistema, no qual seja fácil experimentar, para se estudar outro sistema de comportamento semelhante. (SANTOS, J., 1974 p. 1)

José Abel dos Santos (1974) define sistemas análogos como aqueles sistemas cujas equações matemáticas que os representam possuem a mesma forma, podendo ter variáveis e coeficientes de dimensões diferentes.

Note-se que no século XIX a física se tornou apta a descrever em fórmulas matemáticas dispositivos bastante complexos, e de forma inversa, de construir dispositivos complexos que realizassem determinadas equações matemáticas — exatamente o que faz o computador analógico.

Comparando dois métodos de cálculo integral, o método de *feedback* de Kelvin (analógico) e o método iterativo de Peano-Picard (digital), Betti (1977, p. 541) afirma que:

> A diferença entre os dois métodos consiste portanto no fato que em um caso o resultado do cálculo provém de um dispositivo físico concreto cuja operação a executar se pode obter da lei de funcionamento, enquanto no outro caso se estuda a propriedade e o comportamento de um fenômeno real no interior de uma teoria, e o cálculo vem em seguida mediante o método formal da teoria e da dedução lógica.

A precisão, em qualquer dos dois métodos, depende de questões operacionais, e não pode ser pensada, como é usual, de maneira absoluta. Assim, a precisão depende do número de interações no método digital e depende do instrumento físico empregado no caso do método analógico.

O cálculo digital se produz de forma sequencial, não simultaneamente como o cálculo analógico. As grandezas utilizadas no cálculo digital não possuem necessariamente dimensão.

O cálculo digital se refere especialmente ao cálculo efetuado a partir da representação e manipulação simbólica de variáveis mediante um conjunto de regras ou leis teóricas gerais (não necessariamente leis físicas). Assim, a história do cálculo numérico é a história do cálculo digital. O conceito que fundamenta o cálculo digital é o conceito de algoritmo.

No controle de processos industriais em tempo real (como uma caldeira, por exemplo), a simultaneidade de um cálculo analógico poderá, eventualmente e dependendo do dispositivo real de cálculo, ser mais adequada que o cálculo passo a passo de um computador digital. A complexidade do problema e do modelo teórico pode inviabilizar o cálculo digital em tempo real.

Há casos em que cada uma das técnicas, analógica ou digital, separadamente, são inadequadas para a solução do problema posto, de sorte que a combinação de ambas, aproveitando-se aspectos positivos de cada uma delas relativamente ao problema em questão, pode ser interessante e útil.

A seguir, discutiremos alguns pontos relativos à conversão de informações analógicas em digitais, e vice-versa.

CONVERSÃO ANALÓGICO-DIGITAL

Os componentes exclusivamente digitais do computador não têm voz própria: sem os periféricos (dispositivos auxiliares) analógicos que interpretem seus (im)pulsos digitais em, por exemplo, ondas sonoras, o computador cala. Até mesmo a comunicação entre computadores digitais utiliza sinais analógicos.

O sinal telefônico analógico ainda é uma das formas de comunicação de dados bastante comum para o computador digital. Um usuário de computador que precise ter acesso a um outro computador remoto, ou trocar informações com outros usuários de uma rede de computadores, em geral faz uso do sistema telefônico convencional (analógico) para a comunicação; dessa forma, os sinais oriundos do computador digital devem ser traduzidos para a forma analógica para a transmissão via telefone, e depois reconvertidos para a forma digital para a entrada no computador receptor.

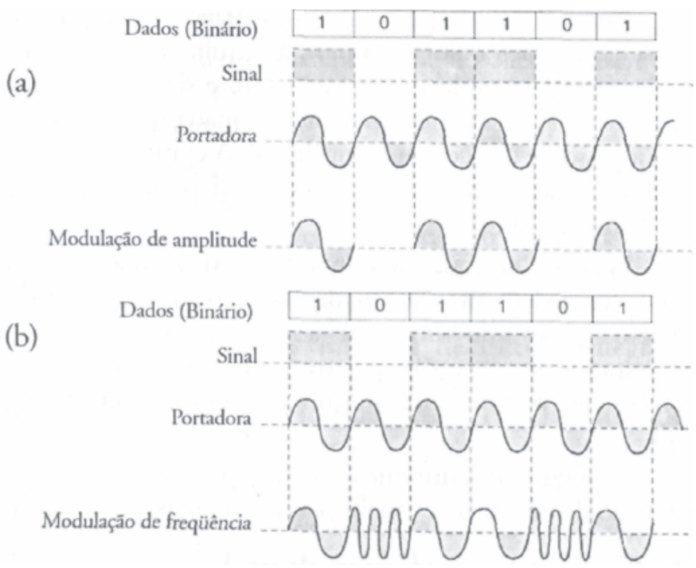


FIGURA 3 – Técnica de modulação analógica em (a) amplitude e (b) frequência. (ALVES,1992, p. 81)

O equipamento utilizado para tanto é o modem (forma abreviada de modulador/ demodulador); durante a transmissão de dados, o modem impõe através da modulação os sinais digitais sobre uma frequência portadora contínua da linha telefônica, como ilustrado na Figura 3 anterior; na ponta receptora, um outro modem extrai através da demodulação as informações trazidas pela frequência portadora e as transfere na forma digital para o computador receptor.

Além disso, o computador digital recebe como dados de entrada informações não só na forma digital, mas também na forma analógica (calor, pressão, luz, som). A informação analógica, proveniente do contexto externo ao computador digital, é constituída de grandezas de variação não-discreta (contínua) e necessita ser traduzida para a forma digital (discreta), única forma manipulável por tal computador. O processo ocorre como foi descrito abaixo.

As variações contínuas do fenômeno físico que serve de suporte à informação que se quer introduzir no computador são captadas por aparelhos sensores específicos a cada tipo de fenômeno considerado, e convertidas em sinais elétricos de tensão contínua de variação análoga ao fenômeno contínuo de entrada; é assim obtido o sinal analógico.

A seguir, o sinal analógico é traduzido para a forma digital binária com a qual o computador funciona. O equipamento tradutor é um conversor analógico-digital (conversor AD). Para transformar o contínuo em discreto, o conversor faz leituras do sinal analógico que o atravessa a intervalos discretos curtos e periódicos (amostras), transformando a intensidade da tensão encontrada em cada amostra em um valor numérico expresso em código binário. Evidentemente, o sinal digital (conjunto discreto de valores) resultante dessa conversão constitui apenas uma aproximação do sinal analógico de origem, e sua qualidade depende da frequência de amostragem: quanto menor o período de tempo entre pontos amostrados, maior o número de pontos amostrados e melhor a aproximação.

Após a tradução digital, a informação pode ser manipulada e transformada no computador por procedimentos numéricos, lógicos e simbólicos (informação processada). O produto dessa manipulação simbólica ainda é, obviamente, informação digital. Contudo, da mesma forma que as informações de entrada podem ocorrer nas formas digital ou analógica, a informação de saída pode ser desejada nas formas digital, como as letras impressas em um texto, ou analógica, como a música de um sintetizador.

No caso de se precisar ou desejar uma saída analógica, é necessário fazer a tradução da informação digital, produzida ao final do processamento, para a forma analógica. O processo é mais ou menos o inverso do anterior: inicialmente o conversor transforma cada palavra binária em um valor de tensão, gerando um conjunto de valores descontínuos de tensões que passa por um tipo de filtro eletrônico que transforma esse conjunto de tensões em um sinal analógico na forma de curva contínua.

Como exemplo, a onda sonora, causada pela voz humana ou por um instrumento musical, é uma onda mecânica que para ser transmitida via rede telefônica possui um análogo (representação analógica) elétrico, uma onda eletromagnética. As variações de amplitude e frequência da onda eletromagnética representam as variações de volume e altura do som.

Então o som, como informação de entrada ou saída em computadores digitais, pode receber os tratamentos de conversão analógico-digital acima descritos. A complementaridade entre os processos analógicos e digitais é visível, como veremos a seguir.

O som é produzido através de ondas de pressão do ar. Essas ondas podem ser representadas matematicamente por funções senoidais, ou, melhor dizendo, por uma série de ondas senoidais de frequência variável. A análise de Rinmer (1768-1830) é uma técnica matemática utilizada para representar qualquer função complexa em um conjunto de ondas senoidais, e que portanto pode ser usada para reduzir a onda sonora nas ondas senoidais simples que a constituem.

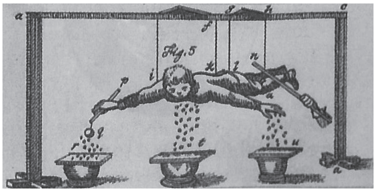
Algoritmos (programas) baseados na análise de Fourier podem tratar no computador os pulsos digitais representativos de sons analógicos e assim compor/ decompor o padrão de som de qualquer instrumento conhecido; podem inclusive, usando modelos matemáticos, vencer as limitações do nosso mundo físico criando padrões de instrumentos musicais imaginários.

Por outro lado, a transmissão de um sinal analógico atualmente também pode ser feita de forma digital. Com equipamento adequado faz-se a conversão do sinal analógico em código digital, expresso geralmente em um código derivado do código binário, após o que a transmissão pode ser efetuada digitalmente (forma considerada de maior fidelidade e menos sujeita a erros). Após a transmissão, o sinal analógico original pode ser recuperado através da inversão do processo usado para sua codificação digital.

A suavidade da interface analógica aliada à grande possibilidade combinatória da manipulação digital (processamento) permitem-nos extrapolar os limites do mundo, dando-lhe novos limites. A nossa questão não é menosprezar a força do digital, mas pelo contrário, situá-la nos seus limites; a crítica é justamente ao reducionismo, à hegemonia da forma digital, e à segregação dicotômica entre digital e analógico.

Contudo, antes de prosseguirmos, como fechamento deste capítulo, um ponto merece ser retomado e enfatizado: seja no campo tecnológico, quando nos referimos aos dispositivos de cálculo analógico, como os computadores analógicos, seja no campo conceitual, quando nos referimos às representações analógicas, como os modelos analógicos, temos na analogia, isto é, na transferência de significados entre dois domínios, o mesmo substrato básico de funcionamento. Na primeira situação, relativa aos dispositivos analógicos, isto se dá através do isomorfismo de certas leis físicas, enquanto na segunda, relativa às representações analógicas, através da construção de objetos de representação que incorporam certas relações relevantes do representado; sem negar as especificidades de cada situação, a condição básica de funcionamento, em ambas as situações, é a transferência de significados entre dois domínios – vale dizer, a analogia.

Capítulo Doze



O USO DA ANALOGIA NA HISTÓRIA E NO ENSINO DA INFORMÁTICA

INTRODUÇÃO

"[...] e não se pode conceber um rigor informal"?

Molino (1979, p. 96)

Uma analogia é uma comparação entre dois domínios diferentes, que permite transferir certas relações de um domínio para o outro.

O uso de analogias é inerente à atividade científica (BLACK, 1966, MOLES, 1971, MOLINO, 1979). Tal afirmação torna-se ainda mais evidente quando se constata que a metáfora é uma analogia condensada (PERELMAN, 1970), e os modelos (assim com as fábulas, parábolas, alegorias e os mitos) são analogias estendidas (TURBAYNE, 1974).

Os modelos (em escala, matemáticos, teóricos, arquetípicos ou prototípicos), em particular, têm um papel central na construção de teorias científicas, o que mostra a importância da analogia na criação nas ciências.

Como heurística, podemos citar incontáveis exemplos de analogias na criação científica:

1) No desenvolvimento da teoria ondulatória da luz, de Huygens a Young e Fresnel, a analogia entre luz e som foi fundamental para a compreensão da luz em termos de ondas.

2) Darwin (1887) utilizou com frequência a seleção artificial desenvolvida por criadores no aperfeiçoamento de seus animais como análoga à seleção natural, tendo esta analogia um papel importante na justificação da teoria darwinista da evolução.

3) Maxwell chamou de “analogia física” seu método de trabalho que consistia em encontrar semelhanças parciais entre as leis de duas ciências distintas, semelhanças que permitiriam que cada uma das leis ajudasse a esclarecer a outra. Segundo Holland e outros (1986), seguindo os passos de Kelvin, que fez uso de analogias entre o calor e a eletrostática, e entre a luz e as vibrações em um meio elástico, “Maxwell usou uma analogia mecânica concernente às tensões em meio fluído para chegar às suas célebres equações para campos eletromagnéticos” (HOLLAND, 1986, p. 337).

4) Em 1890, o biólogo Elie Mechnikoff, observando células móveis na larva transparente da estrela do mar, atirou alguns espinhos de rosa entre elas, os quais foram imediatamente circundados pelas larvas, dissolvendo-se em seus corpos transparentes; tal fato foi relacionado por Mechnikoff ao que ocorre quando uma parte do corpo humano é infectada por uma farpa, por exemplo: o pus que envolve a infecção, como as larvas do experimento, deve conter células que englobam e digerem os organismos causadores da infecção. Estava descoberto o mecanismo da fagocitose. (KOESTLER, 1969, p. 199).

5) A analogia do computador com a mente humana serviu, em diversos momentos da história da Informática, como modelo para a concepção e desenvolvimento do computador. Cabe observar que, nesse caso, a visão da mente humana como um sistema formal está subjacente; contudo, a analogia deteriora-se em equívoco quando os dois domínios análogos, mas distintos, computador e mente, são identificados. Daí é só um passo para a inversão da analogia criadora inicial (o computador como a mente hu-

mana) para a analogia bastante reducionista da mente humana como um computador.

6) Atualmente a inteligência artificial (IA) organiza-se em torno de duas analogias ou modelos distintos do pensamento, da inteligência e da relação mente/ cérebro. A IA clássica baseia-se na analogia de mão dupla acima exposta, do computador com a mente humana, considerando ambos sistemas formais. A outra corrente, o conexionismo, considera a cognição um processo decorrente em grande medida da organização do cérebro. A primeira se dá em nível simbólico (a cognição é resultado da manipulação de símbolos); a segunda, em nível estrutural (a cognição é resultado da estrutura do cérebro). Estes diferentes modelos implicam diferentes arquiteturas para o computador.

Consideremos agora a discussão da importância das analogias no ensino.

A analogia pode ser utilizada, como de fato é, para estabelecer uma demonstração, não formal, evidentemente; mas é da natureza da demonstração ser formal?

A analogia possibilita a construção do novo, podendo acarretar tanto uma mudança paradigmática na ciência, quanto uma mudança conceitual no ensino (ao tornar o não conhecido, familiar).

As vantagens das analogias no ensino incluem as seguintes:

1) São instrumentos importantes no ensino que envolvem mudança conceitual, abrindo possibilidade de estabelecimento de novas relações e perspectivas. Tornam as relações mais concretas, pelo estabelecimento de similaridades entre o conhecido (concreto, com significado) e o desconhecido (abstrato, ainda sem significado).

2) São motivadoras e provocam interesse, pois causam surpresa.

Discutindo o papel das analogias no ensino de ciências, Duit (1991, p. 668) afirma que:

> O papel das analogias e metáforas no ensino científico é usualmente discutido da perspectiva de sua significação no processo de aprendizagem, mas há outro aspecto importante. Analogias e metáforas suprem uma função explicativa e heurística significante no desenvolvimento da ciência [...] Se é aceito que o ensino científico não deveria apenas ensi-

> nar conhecimento científico, mas também 'meta-conhecimento' científico, então o papel das analogias e metáforas na ciência deve ser considerado um aspecto essencial do ensino científico.

Na sequência desse pequeno ensaio, inicialmente, ilustraremos mais detalhadamente a utilização de analogias na informática com o rico, vivo e historicamente contemporâneo exemplo do vírus do computador. Em seguida, passaremos a considerar o uso da analogia no ensino da informática, apresentando um modelo didático sugerido pela história da Informática e que estabelece uma analogia entre uma moenda e um computador.

UMA ANALOGIA CONTAGIANTE

> "Atualmente a contaminação viral já traz uma primeira resposta à questão a negatividade dos circuitos eletrônicos."
>
> (VIRILIO, 1993, p. 105)

Vejamos um pequeno trecho de um livro de divulgação da área de informática:

> Neste ponto a infecção já passou por todas as suas fases, mesmo que ele (o vírus) seja descoberto agora pelo usuário. A maioria dos programas e disquetes do usuário estará contaminada, como também muitas cópias talvez tenham sido transmitidas para outros usuários. Este é o motivo de ser tão difícil erradicar contaminações por vírus: o usuário pode livrar o seu computador do vírus e mais tarde colocar um disquete contaminado no drive e reintroduzi-lo. Dezenas e talvez centenas de disquetes do usuário podem ser contaminados antes que o usuário descubra a presença do vírus. (WALNUM, 1993, p. 74)

A linguagem utilizada, profundamente metafórica, parece sugerir que computador e mídias de armazenamento e transferência de informações (*pen-drives*, cds, HD externos etc.) adoeceram acometidos de um mal virótico.

Contudo, um vírus de computador não causa propriamente uma doença. Um vírus de computador é um programa capaz de se autocopiar (faz cópias de si mesmo); dessa forma, o vírus é capaz de se espalhar para outros computadores, através de sistemas de comunicação entre computadores (redes de comunicação, tais como as BBS – Bulletin Board Systems). Como dissemos, um vírus de computador é um programa, e como qualquer outro programa de computador só se tornará ativo quando for colocado em funcionamento, nada podendo fazer em caso contrário.

Quando em atividade, todavia, além da sua peculiar capacidade de multiplicação, um vírus pode fazer qualquer coisa programável em um computador, inclusive atos "nocivos" à saúde do computador "contaminado", como apagar ou corromper arquivos por exemplo. A comunicação cada vez mais extensa e intensa entre computadores tem tornado os vírus uma verdadeira ameaça digital.

Antes de explicitarmos algumas relações analógicas entre o vírus humano e o vírus do computador, vejamos como surgiu esta curiosa metáfora.

Programadores dos laboratórios de pesquisa em informática de duas grandes empresas americanas criaram, nos anos 70, uma brincadeira ou jogo digital chamado por eles de *core wars* (guerra de núcleos). Os participantes da brincadeira deveriam criar "organismos" de computador (evidentemente, programas de computador) com capacidade de eliminar (destruir) os organismos semelhantes criados pelo jogador adversário. Um dos atributos que se tornou indispensável à sobrevivência desses organismos artificiais foi a capacidade de se duplicar ou multiplicar (o organismo fazendo um cópia idêntica de si mesmo), pois, assim, cada organismo aumentava sua chance de sobrevivência nesse jogo de guerra.

Esses primeiros seres artificiais não podiam se alastrar para outros sistemas, pois só se multiplicavam na memória do computador onde se realizava o jogo; além disso, e pelo mesmo motivo, as múltiplas cópias do organismo eram apagadas quando se desligava o computador. Contudo, a natureza imprevisível, quase mutante, poderíamos dizer forçando um pouco a mão, desses seres artificiais logo se fez notar. Qualquer programa de computador está sujeito a erros na sua construção (os chamados *bugs)* e, no caso de programas que se multiplicam, certos erros, potencializados pela quantidade, podem ser bastante danosos. O *core wars* foi proscrito dos laboratórios de pesquisa em questão quando se perdeu o controle de um dos organismos artificiais criados, com resultados danosos para o sistema computacional que ingenuamente o acolhia.

Em 1984, a revista *Scientific American* publicou um artigo descrevendo o vírus do computador e ofertando aos seus leitores, por dois dólares, as instruções de como programar um vírus, tornando a criação de vírus de computador de domínio público. Apesar disso, os seres artificiais criados ainda eram uma brincadeira engraçada. Contudo, a epidemia digital estava se desenvolvendo e, em breve, se tornaria uma peste nos meios eletrônicos.

O fato relevante nos primeiros protótipos de organismos artificiais foi, sem dúvida, a sua capacidade de multiplicação, o que sugeriu a analogia desses programas com o vírus humano. A analogia permanece viva até hoje não só porque a denominação e os próprios vírus se disseminaram em toda a informática, e entre todos os usuários de computadores; de fato, a analogia revelou-se extremamente fértil. Podemos estabelecer um número bastante grande de relações entre essas duas espécies de vírus, o orgânico e o simbólico. Vejamos algumas delas no Quadro 1.

Quadro 1: Relações analógicas entre o vírus humano e o vírus do computador

Vírus humanos	Vírus do computador
Inertes fora do organismo "hospedeiro"	Inativos fora do computador "hospedeiro"
Reproduzem-se rapidamente no homem	Fazem autocópia quando executados
São contagiosos	Capazes de se estenderem a outros sistemas
Podem ficar incubados	Podem ficar inativos até que ocorra uma condição

Tudo o que vimos corrobora a tese de que a analogia é um recurso heurístico da maior importância na atividade científica. Vejamos agora um modelo analógico para o ensino da estrutura do computador digital que ajuda, por seu turno, a mostrar a força da analogia também como recurso didático.

A CPU e o moinho: "A massa e as terminações nervosas surpreendentes do cérebro tinham sido substituídos por metal e ferro; ele (Babbage) tinha ensinado o moinho a pensar." (BUXTON apud SWADE, 1993, p. 88).

O engenheiro inglês Charles Babbage (1792-1871) é tido como o principal precursor no advento dos modernos computadores. Seu pioneirismo está consubstanciado no projeto do *Analytical Engine* (Máquina Analítica), dispositivo mecânico em muitos aspectos semelhante ao nosso computador eletrônico.

Apesar de jamais ter construído sua máquina analítica, a ideia de Babbage era de construir um dispositivo com duas partes básicas, por ele chamadas "armazém" (*store*) e "moinho" (*mill*). O armazém teria a função de guardar os dados (variáveis, quantidades, resultados de operações); o moinho teria a função de executar as operações (aritméticas, lógicas) com os dados.

Para batizar os componentes de sua máquina analítica, Babbage utilizou nomes de coisas existentes cujas funções, em outro contexto, evidentemente, se assemelham às funções dos componentes criados (projetados).

A parte da máquina analítica projetada para reter ou guardar dados, Babbage denominou "armazém" (*store*), construção utilizada para guardar grãos, por exemplo; o outro componente, desenhado para transformar os dados através de cálculos, o engenheiro inglês chamou de "moinho" (*mill*), mecanismo usado para transformar (moer, triturar) grãos em farinha.

Apesar do termo *mill* não ser mais utilizado, o termo *store* é hoje largamente utilizado para designar a memória dos computadores atuais.

O objetivo de Babbage de mecanizar o cálculo originou-se, em um primeiro momento, da falta de precisão das tabelas matemáticas então impressas. Cientistas, navegadores e engenheiros utilizavam tais tabelas para executar cálculos que normalmente só exigiam precisão de apenas alguns dígitos, mas a tediosa produção das tabelas, realizada manualmente, possibilitava a introdução de inúmeros erros; também na impressão de tais tabelas eram acrescentados mais erros (tipográficos). As próprias erratas das tabelas continham erros.

O engenheiro inglês acreditava que a computação mecânica era o melhor meio de eliminar, de uma só vez, tanto os erros de cálculo, quanto os erros de impressão. Assim, concebeu e projetou uma máquina que calcularia e imprimiria, automaticamente, ou seja, sem interferência humana, os resultados dos cálculos efetuados. O dispositivo planejado foi denominado Máquina Diferencial (*Difference Engine*), pois fundamentava-se no algoritmo matemático das diferenças finitas, utilizado para calcular valores de funções polinomiais usando apenas a operação de adição e dispensando o uso das operações de multiplicar e dividir, mais difíceis de mecanizar. O método das diferenças finitas é recursivo, ou seja, cada passo no processo de cálculo depende do valor calculado no passo anterior, de forma que a precisão é absolutamente necessária em cada passo para que se possa confiar no resultado final. Em 1822, Babbage construiu um modelo experimental de seu projeto.

Contudo, a despeito da impressionante capacidade de cálculo da Máquina Diferencial, apenas algumas operações básicas podiam ser executadas. É, de fato, com seu projeto da Máquina Analítica (*Analytical Engine*), uma máquina computadora de propósitos gerais, que Babbage entra na história da Informática como um dos seus maiores construtores. Babbage despendeu cerca de 40 anos de sua vida e toda a sua fortuna pessoal, para tentar obstinadamente construir seu genial e nunca realizado projeto.

Após a morte de Babbage, seu projeto caiu no esquecimento, tendo sido redescoberto 70 anos depois por Howard H. Aiken (1900-1973), professor de Harvard, que, inspirando-se nas ideias de Babbage, construiu o Mark I, uma calculadora eletromecânica comandada por programa.

Para nossos propósitos, queremos enfatizar que a Máquina Analítica é o antecendente estrutural de todos os computadores digitais. A arquitetura desse computador digital universal nunca construído servirá inicialmente a Aiken e depois a muitos outros como modelo estrutural (ou arquétipo conceitual, ou, ainda, paradigma informático), como explicitaremos a seguir.

Como vimos, a arquitetura da Máquina Analítica foi concebida contendo duas partes fundamentais, chamadas sugestivamente por Babbage, de *mill* (moinho) e *store* (armazém). O moinho digital deveria efetuar todas as operações lógicas e matemáticas; o armazém digital deveria guardar todos os "números" (dados iniciais, resultados intermediários e finais). Essa estrutura é comum a todos os computadores digitais e é fácil notar que o moinho refere-se ao que denominamos unidade central de processamento (UCP) ou, mais comumente, fazendo uso da língua inglesa, *central processing unit* (CPU), e o armazém refere-se à memória do computador.

Ao instaurar uma nova maneira de organizar as máquinas computadoras, até então muito simples estruturalmente, Babbage lança mão de uma analogia entre um moinho e um computador, concebendo este último como constituído de um moinho de números ou, de forma mais apropriada contemporaneamente, um moinho de símbolos.

Este é um exemplo importante de uso de analogia na criação científica, tanto por pertencer a uma *hard science*, a Informática, onde poderia parecer que as analogias não têm lugar, quanto por sua fertilidade dentro da mesma ciência, possibilitando a criação da arquitetura básica dos computadores digitais, apesar de os termos moinho e armazém não terem sobrevivido.

Acreditamos, todavia, que a analogia moinho/ CPU e armazém/ memória pode ser muito útil também no ensino da Informática, particularmente para cursos conceituais introdutórios à disciplina ou de iniciação para novos usuários de computadores, quer sejam crianças, jovens ou adultos.

É curioso que na Cibernética, disciplina irmã da Informática, os moinhos também contribuíram. O conceito de regulação (*feedback*) é central para a construção de mecanismos automáticos; no século XVII, resgatando a história da Cibernética , "[...] os automatismos de regulação serão igualmente desenvolvidos em outros domínios como o da moagem, para controlar e regular o fluxo do vento nas aspas de moinhos e seu efeito sobre a moagem dos grãos". (BRETON, 1991, p. 31).

Assim, além de resgatarmos os termos moinho e armazém, estendemos a analogia sugerida por Babbage no modelo abaixo esquematizado do "computador como uma moenda de informações", de uso didático privilegiado, conforme já pudemos constatar na prática docente.

Antes, entretanto, queremos apresentar a notação que será usada para representar relações analógicas no nosso modelo didático moenda/ computador (que pode ser empregada para representar relações analógicas em geral).

Etimologicamente, a palavra análogo deriva do grego *análogos*, que significa proporcionado; em matemática a proporção (razão) algébrica entre a e b pode ser representada utilizando-se a notação abaixo indicada:

$$\frac{a}{b}$$

Considerando a simplicidade e riqueza dessa representação, vamos adotá-la para representar as relações analógicas, observando que:

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{então } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Ou seja, a propriedade conhecida como "troca dos meios" válida para as frações algébricas continua válida para relações analógicas.

Por outro lado,

$$\text{Se } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{então } ad = bc$$

Ou seja, a propriedade conhecida como "produto dos extremos é igual ao produto dos meios" evidentemente não se aplica a relações análogas.

Em síntese, as relações analógicas não são relações algébricas, e faremos uso da notação das frações de forma mais ou menos livre, sem pretender o uso da igualdade do significado da notação nesses dois domínios diversos. Reteremos, de forma analógica, apenas as propriedades relevantes da notação usual das frações para nossa finalidade de representar as analogias de forma simples e fértil.

Encerrada essa longa, mas necessária digressão, passaremos ao modelo da moenda.

Tendo como interesse o ensino da Informática, e inspirados pelas catacreses babbagianas, esboçaremos a partir do diagrama abaixo uma ampla analogia entre arquitetura de um computador eletrônico e a estrutura de uma moenda mecânica. É o que segue:

O COMPUTADOR COMO UMA MOENDA DE INFORMAÇÃO

Observe que a moenda é composta de :

1) Um moinho, onde são triturados os grãos e transformados em farinha. É composto por engrenagens.

2) Um armazém, recipiente contíguo ao moinho e eventualmente compartimentado, onde são introduzidos os grãos prontos para a moagem; a farinha passa por vários processos de remoagem, obtendo-se diferentes produtos ou produtos de diferentes qualidades; nesse caso, durante o processo, a farinha retorna para um dos compartimentos do armazém, indo daí para o moinho e do moinho voltando para o armazém tantas vezes quanto necessário. O armazém está ligado diretamente ao moinho, sendo exatamente o depósito que o alimenta durante o processo de moagem. Em algumas moendas, como o moedor elétrico de café, por exemplo, o armazém é constituído por dois depósitos separados, um para os grãos de café a serem moídos e outro para o pó de café; em outras moendas, como o pilão, o armazém é um depósito único.

3) Diversas portas de entrada e/ou saída para o armazém ou, pelo menos, para algum de seus compartimentos; as portas são do armazém, não havendo comunicação direta do meio externo com o moinho; o moinho apenas se comunica com o armazém, e qualquer grão para moagem vindo do meio externo, antes de chegar ao moinho, deve ser colocado no armazém; de forma análoga, qualquer quantidade de farinha produzida no moinho vai para o depósito de farinha antes de se tornar disponível para consumo. Portas de tamanho, formato ou material diferentes servem para selecionar (deixar passar ou reter) grãos diferentes, em tamanho ou qualidade, assim como diferentes qualidades de farinha.

4) Um grande silo, onde ficam armazenados tanto os grãos, aguardando o tempo de moagem, quanto a farinha, aguardando o tempo de consumo.

5) Eventualmente, diversos pequenos silos, não aí apresentados no esquema anterior, com finalidade semelhante à do grande silo.

Podemos obter do esquema apresentado, e fazendo uso de diferentes estratégias de ensino que não é o caso discutirmos agora, as seguintes relações analógicas:

$$= \frac{\text{Moenda}}{\text{Computador}} = \frac{\text{moinho}}{\text{CPU}} = \frac{\text{armazém}}{\text{memória}} =$$

$$= \frac{\text{grande silo}}{\text{disco rígido}} = \frac{\text{pequenos silos}}{\text{mídias}} =$$

$$= \frac{\text{portas}}{\text{placas}} = \frac{\text{porta 1}}{\text{placa 1}} = \frac{\text{porta}}{\text{placa n}}$$

$$= \frac{\text{triturar}}{\text{processar}} = \frac{\text{trigo}}{\text{dados de entrada}} = \frac{\text{farinha}}{\text{dados de saída}} =$$

$$= \frac{\text{regras de moagem}}{\text{sistema operacional}} = \frac{\text{moleiro}}{\text{operador}} =$$

$$= \frac{\text{estocagem no grande silo}}{\text{gravação no disco rígido}} = \frac{\text{alimentos}}{\text{informações}} =$$

$$= \frac{\text{estocagem no pequeno}}{\text{gravação na mídia}} = \frac{\text{pacotes}}{\text{mídias}} =$$

$$= \frac{\text{transporte de trigo/ farinha entre o grande silo e o armazém}}{\text{transferência de dados de entrada/ saída entre o disco e a memória}} =$$

$$= \frac{\text{transporte de alimentos entre o armazém e o moinho}}{\text{transferência de informações entre a memória e a CPU}} =$$

= ....etc

As relações analógicas acima permitem-nos compreender, por exemplo, que, no computador:

1) As informações, tais como textos, tabelas, bancos de dados etc., ficam armazenadas, quando não estão sendo processadas, nas mídias de armazenamento e transferência ou no disco rígido, respectivamente análogos aos pequenos e grandes silos.

2) Antes de serem transformados (processados), os dados ou informações devem ser transferidos para a memória (análogo do armazém). A CPU é que transforma ou processa (tritura) tais dados ou informações.

3) Não é possível transformar diretamente as informações sem antes transferí-las para a memória.

4) O disco rígido ou as mídias, de um lado, e a memória, de outro lado, constituem, de fato, dois tipos diferentes de depósitos de informações; nos primeiros, a informação é permanente, estática, e não pode ser diretamente processada; na segunda, a informação é volátil, dinâmica, e pode ser imediatamente processada. Nos computadores digitais eletrônicos, categoria em que se enquadram os conhecidos microcomputadores pessoais, do tipo PC, por exemplo, a memória funciona à base de pulsos elétricos, de forma que, nos casos de falhas ou queda na corrente da rede elétrica, os dados em memória (sendo processados) são corrompidos ou, em geral, completamente perdidos.

5) Após qualquer processamento, como alterar um arquivo de texto, um artigo ou uma carta, por exemplo, o arquivo deve ser transferido para a mídia ou disco rígido. Isto porque as alterações promovidas pela CPU apenas são registradas na memória do computador; mesmo que o arquivo inicial tenha sido obtido da mídia ou do HD, e uma imagem desse arquivo original ainda permaneça no "silo" em questão, as alterações não são efetuadas diretamente no "silo", e o usuário deve forçar explicitamente a transferência do arquivo modificado para o depósito permanente, se assim desejar (se for precisar das informações posteriormente).

Poderíamos obter ainda outras conclusões a respeito do computador a partir das analogias estabelecidas com a moenda. Poderíamos também estabelecer outras analogias. Nosso objetivo não é esgotar tais analogias e conclusões, que certamente podem nascer no processo pedagógico sem a necessidade de descrição prévia explícita como fizemos aqui, dada a natureza desse trabalho, porém destacar a importância didática do modelo proposto .

CONCLUSÃO

A analogia revela-se um grande instrumento didático; contudo, algumas analogias parecem ser melhores que outras.

Se examinarmos a analogia já apresentada entre o computador e a mente, veremos que, para o ensino básico de Informática, tal analogia não se mostra adequada. Uma boa analogia torna o não conhecido, familiar, através da semelhança das relações efetuadas entre certas estruturas de um domínio conhecido com aquelas de um domínio que se deseja conhecer. Ora, para quem quer aprender sobre o computador (domínio novo, ainda desconhecido), a sua analogia com a mente supõe que esse último domínio, a mente humana, é bem conhecido, é suficientemente familiar, já foi devidamente explorado em suas características e relações, e esse não parece ser o caso .

Como estabelecer relações analógicas, transferir significados, criar novos conceitos lançando mão de dois domínios estranhos ao sujeito cognoscente?

Na analogia do computador com um moinho, a condição de que um dos domínios deve ser familiar é mais realista, já que os moinhos são mecanismos bastante comuns na história do homem, usuais no mundo contemporâneo, e até mesmo presentes no imaginário infantil, através dos contos, fábulas etc.

Como vimos, a analogia do computador com uma moenda ou moinho teve importância histórica na criação científica da arquitetura do computador digital, assim como pode vir a ter grande importância no processo de negociação didática. Importância na ciência e na educação.

A analogia apresentada é, acreditamos, um exemplo significativo de instrumento heurístico e didático inspirado na história.

Capítulo Treze

FORÇA COMUNICATIVA E RETÓRICA DE GRÁFICOS E TABELAS

Neste texto vamos discutir o papel e a importância da Estatística para a coleta, a apresentação e a descrição dos dados, epecialmente educacionais, e faremos isso de uma forma bastante prática: selecionamos alguns gráficos e tabelas, que estão disponíveis no *site* Governo do Estado da Bahia, relativos à Educação na Bahia.

O método estatístico tem várias etapas: a coleta, a crítica dos dados, a categorização e síntese das informações e sua respectiva apresentação em tabelas e gráficos, a definição desses dados e a sua análise estatística. Particularmente, trataremos aqui da apresentação e da comunicação desses dados, ou melhor, colocar-nos-emos do lado de leitores ou usuários dessas informações produzidas pelos especialistas. Assim, discutiremos a leitura dessas tabelas e gráficos.

Antes, porém, existe um tópico de gostaríamos de falar mais especificamente, dando-lhe certo destaque, já que tem grande importância na leitura dessas tabelas e gráficos, que são as razões e as proporções.

Para que possamos compreender melhor e ler, de forma mais competente, os registros que estão apresentados, é importante entender os dois tipos de informação que são muito recorrentes nas tabelas e nos gráficos. Um tipo de informação que aparece constantemente é a **frequência absoluta,** que é obtida através da contagem direta, por exemplo; número de alunos, número de escolas. O número de alunos expressa justamente isso: é uma contagem dos alunos que nos dá o número de alunos, ou seja, a frequência absoluta, obtida através da contagem. Isso é bastante elementar. Todo mundo sabe e conhece como fazer e como ler esse tipo de informação. Um segundo tipo de informação, que é muito recorrente neles, é a **frequência relativa**, cujo indicador mais importante é a porcentagem. A frequência relativa, item sobre o qual vamos nos deter um pouco mais –, expressa uma comparação entre quantidades. Um exemplo de frequência relativa, de valor relativo, sempre coloca dois números em correspondência. Então, precisamos ter cuidado na leitura das informações que estão sendo colocadas em correspondência. Esses valores relativos são dados por formas diversas que são totalmente equivalentes, do ponto de vista matemático e do ponto de vista operativo. Todos conhecem bem as frações, as razões que são apresentadas em forma de fração – ou seja, uma razão é apresentada operacionalmente como uma fração –, as proporções, que também são razões e também são frações. Mas as proporções e as porcentagens, em especial, expressam uma parte em relação ao todo em que aquela parte foi tirada. Por exemplo, se temos uma escola com 100 alunos e, dentre eles, 20 são meninos e 80 são meninas, então temos, em relação ao todo (100 alunos da escola) 20 meninos em 100 alunos. Assim, temos 20% – para falar em porcentagem de meninos. Então, a porcentagem e também a proporção expressam sempre uma relação entre uma parte e o todo do qual aquela parte foi retirada. Isso é extremamente importante: para entendermos o que significa uma proporção ou uma porcentagem, é preciso ter em mente, o tempo todo, para a leitura específica daquele valor, daquele número, quais são os elementos que estão sendo colocados em comparação. Se eles são elementos distintos, que estão sendo apenas colocados em razão do outro, comparados uns com os outros, ou se é uma parte em relação ao todo do qual essa parte foi retirada.

Vejamos mais um exemplo. Temos H representando o total de meninos (total de 30), M representando meninas (total de 50) e sabemos que a razão de H/M é igual a 30/50. Isso aqui está expresso na forma de uma fração e todos conhecem a notação de fração. Isso é uma fração que pode ser simplificada como 3/5 ou 0,6. Temos uma fração ou a razão 30/50 que, nesse caso, está apresentada na forma específica de razão. E por que "razão"? Porque temos uma razão entre o número de meninos e o número de meninas.

Usando o exemplo anterior de uma escola com 100 alunos, sendo 20 meninos e 80 meninas, podemos comparar esses números de maneira diferente. Se compararmos meninos e meninas, temos 20 meninos e 80 meninas. Podemos apresentar isso através de uma fração: 20/80 que dá 1/4, então, temos 1/4 de meninos em relação às meninas. Isso mostra uma **razão,** que é um número que possibilita uma comparação entre duas grandezas, duas categorias distintas: meninos e meninas. Agora, se considerarmos a escola como um todo, temos 100 alunos e, então, 20 meninos em 100 alunos equivale a 20 em 100, que corresponde a 20 por cento (20%) ou 1/5. Assim, vemos que existe uma razão entre meninos e meninas, que é 1 /4 (20/80), e uma outra fração completamente distinta, que expressa a razão não mais entre meninos e meninas, mas o número de meninos em relação ao total de alunos: 20/100, 20% ou 1 /5. Nesse caso, esse tipo de razão de uma parte em relação ao todo é denominada **proporção,** ou, se for colocado como denominador o índice 100, se for tomado como referência o índice 100, o número obtido é chamado de **porcentagem.**

Essas são denominações diferentes para coisas que, do ponto de vista operativo, do ponto de vista matemático, são idênticas, representam exatamente a mesma coisa. Desse modo, podemos considerar que frações, razões, proporções e porcentagens possibilitam que se compare grandezas e se perceba o quanto uma grandeza representa em relação a outra. Por isso, só podemos fazer uma leitura adequada de uma fração, de uma razão, de uma proporção, ou mesmo de uma percentagem, que é tão comum em nosso cotidiano, se levarmos em consideração as grandezas, as quantidades que estão sendo comparadas e, só assim, elas fazem sentido. Fora dessa referência original, elas não representam absolutamente nada.

Vamos a outro exemplo. Temos 50 alunos numa classe (A) e 20 alunos dessa classe com conceito Bom (B). Então, a razão A/B (20/50) é uma fração, que pode ser denominada, nesse caso, também de razão, porque temos duas grandezas sendo comparadas: o número de alunos com conceito Bom sendo comparado com o total de alunos. Nesse caso, podemos simplificar isso para 2/5 (20/50) ou, na forma decimal, 0,4, que é uma proporção de alunos da classe com conceito Bom. Por que podemos chamar essa razão de proporção? Porque temos uma parte em relação ao todo e o número que representa uma parte em relação ao todo é denominado sempre de **proporção.** Vimos que, naquele caso anterior, quando comparamos meninos com meninas, tínhamos uma razão, mas não tínhamos exatamente uma proporção: havia apenas uma razão do número de meninos para o número de meninas.

E a porcentagem? O que é a porcentagem? Como já dissemos, a porcentagem é uma proporção em que tomamos como referência, como base, o número 100. Digamos que uma escola tem 500 alunos, sendo que 250 são do sexo feminino; 250 de 500 representa a metade, ou seja, a razão entre um e outro é de 1 para 2 (1/2). Porém, se quisermos expressar essa ideia de que metade dos alunos é do sexo feminino e a outra metade do sexo masculino, tomando como referência não 500 alunos, mas o número 100, que é a nossa referência usual, temos a chamada porcentagem. E, nesse caso, se a nossa referência é 100, se tivermos 100 alunos apenas, para preservar a mesma razão, a mesma proporção, deveríamos ter 50 alunos de sexo masculino e 50 alunos do sexo feminino. Portanto, 50 alunos do sexo masculino, em um total de 100 alunos, representam exatamente a mesma proporção que 250 alunos do sexo masculino no total de 500 alunos da escola. Ou seja, o valor 50% significa que, de cada 100 alunos, 50 são do sexo masculino. Como a escola não tem 100 alunos e, sim, 500, então temos que entender que, nessa representação, 50 por cento deve ser avaliado e compreendido em relação ao total de alunos da escola, que é de 500 alunos. Então, se 50% dos alunos da escola são do sexo masculino, em uma escola que tem 500 alunos, obviamente 250 são do sexo feminino. Não poderíamos jamais deixar de ter como referência quais são as grandezas que estão sendo comparadas, porque o número isolado 50% não diz absolutamente nada. Ele é apenas uma maneira cômoda de comunicar a proporção de grandezas, uma maneira fácil de comunicar isso, porque, como todos a usam com frequência, adquirimos a capacidade, a proficiência de leitura e de comparação, já que tomamos a quantidade 100 como referência, ou seja, a porcentagem como referência.

Dessa forma, essas frequências relativas, esses valores relativos estabelecem comparações e isso é que é o elemento mais importante para reter na memória: é preciso tecer comparações, porque precisamos saber quais são os elementos que estão sendo comparados. Em especial, a proporção e a porcentagem expressam ou representam uma parte em relação ao todo do qual essa parte foi retirada. Esses elementos, particularmente a porcentagem, são fundamentais na construção de tabelas e gráficos, motivo pelo qual nos detivemos, inicialmente, na apresentação dessa ideia de razão, proporção e porcentagem.

Para dar mais um exemplo, que julgamos importante para que se perceba a base da diferença, vamos supor que um determinado professor tenha um salário de mil reais por mês e que a rede à qual ele está ligado, associado, naquele mês, deu um aumento de 100% para todos os professores. Se ele ganha mil reais, quanto vai passar a ganhar, se ele teve 100% de aumento? Dois mil reais. Mas, atenção, observemos que o aumento, que foi de 100%, equivale ao valor inicial, que era mil reais, e o aumento de 100% (cem em cada cem) significa que ele teve um aumento também de mil reais, equivalente ao salário inicial. Mil reais de salário, que ele já percebia, mais mil reais de aumento, equivalem a um salário de dois mil reais. Portanto, o novo salário representa o dobro em relação ao salário anterior. Em outras palavras, em relação ao salário anterior, o novo salário representa 200%. Então, observemos algo interessante: o aumento foi de 100%, porque quando falamos "aumento" – aumento é uma grandeza – estamos tomando somente a parcela do aumento em relação ao salário-base. Mas quanto o salário final, o novo salário representa, agora, em relação ao salário anterior, ao salário original? Agora, o professor ganha dois mil reais, que é o salário final em relação a mil reais; e dois mil, em relação a mil, representam 200%. Então, dizer que o aumento foi de 100%, ou dizer que o salário final representa 200% em relação ao salário inicial é a mesma coisa; apenas estamos usando porcentagens diferentes, porque a nossa referência é diferente. Não estamos usando a mesma referência como base. Por isso é que o número isoladamente, ou seja, o percentual isoladamente, nada representa. O percentual deve ser sempre definido em relação a um valor de base especificado; as grandezas precisam estar sendo colocadas em comparação, e isso é o mais importante, isso é o fundamental.

O outro ponto é o comentário de tabelas e gráficos, exemplos retirados do *site* do Governo do Estado. (Se alguém quiser vê-los um pouco melhor, exercitar-se mais, o *site* é www.sec.ba.gov.br. Depois, é só entrar na parte de Informações Educacionais e aí têm-se os vários indicadores disponíveis na forma de tabelas e gráficos.).

Gráficos, tabelas e diagramas são extremamente importantes para a comunicação, porque eles têm características distintas e vantagens em relação ao texto sob alguns pontos de vista. A sua apresentação permite perceber, de maneira visual, plana, direta, as relações entre grandezas, o que, no texto, fica muito mais difícil, porque o texto é linear. A percepção da relação é muito mais longa e exige um tempo maior de decodificação, um exercício maior para relacionar variáveis, coisa que a tabela, por exemplo, possibilita de forma imediata.

Taxa de Analfabetismo por Faixa Etária – Bahia - 1999-2002 (%)

Faixa Etária	1990	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
10 anos e mais	32,6	22,6	24,9	23,0	22,4	21,6	20,7	19,9
10 a 14 anos	30,8	13,5	14,3	13,3	9,8	12,7	6,8	7,6
15 a 24 anos	20,6	11,1	11,3	10,1	8,6	9,9	7,7	5,7
25 a 49 anos	29,9	21,4	23,3	23,1	21,8	20,7	20,5	19,7
50 anos e mais	57,3	49,5	54,0	49,3	51,5	48,0	47,9	47,4

Fonte: PNAD/ IBGE – SEC-SUPAV/ CAI

Esta tabela, por exemplo, é composta por um título: *Taxa de analfabetismo por faixa etária - Bahia, 1990-2002, (em %),* que é um elemento essencial, indispensável em toda tabela. Antes de passar para as informações que ela traz, o primeiro passo é fazer a leitura do título, pois ele indica quais as informações que estarão disponíveis. Nesse caso, foi a "taxa de analfabetismo". Por esse título, sabemos que, nas células da tabela, vamos encontrar taxas de analfabetismo. O que mais temos no título? A indicação "por faixa etária", ou seja, olhando na coluna esquerda da tabela, encontraremos a escala de faixa etária. Essa coluna é chamada de **coluna indicadora,** e cada elemento indica a informação que será apresentada na linha correspondente. Então, temos "Faixa etária - 10 anos e mais; 10 aos 14 anos; 15 aos 24 anos; 25 aos 49 anos; 50 anos e mais". Essas são as informações que estarão disponíveis nas linhas que estão indicadas por essa coluna, chamada de indicadora.

Que outras informações temos no título? O título faz referência a Bahia (informações sobre o Estado da Bahia) e a ao período de 1990-2002. Se observarmos, na primeira linha da tabela, temos indicados os anos 1990, depois há um salto para 1996, 1997 e assim por diante até 2002. Essa primeira linha da tabela é chamada de cabeçalho da tabela. Assim sendo, temos três elementos importantes: o título, a coluna indicadora e o cabeçalho. Esses elementos têm que ser observados, em primeiro lugar, para compreender as informações que estarão nela disponíveis.

Observando essa tabela, vamos procurar entender o que existe nas casas ou células. Na primeira linha, temos indicado "10 anos e mais"; vemos, ao longo da linha, o número 32,6, que está embaixo da linha encabeçada por 1990. Isso quer dizer que, em 1990, 32,6% (que está indicado no título da tabela) dos jovens com 10 anos ou mais eram analfabetos. Esse é o dado que está apresentado nessa tabela, referente ao Estado da Bahia, no ano de 1990: 32,6% de analfabetos com mais de 10 anos de idade. Esse número vai se modificando ao longo do tempo. Se olharmos a quarta casa, temos indicado 22,6; ou seja, seis anos depois, em 1996, esse número havia sido reduzido de 32,6% para 22,6%. A informação que temos disponível diz que, do ponto de vista relativo, do ponto de vista comparativo, comparando-se o número de analfabetos com o número de jovens com mais de 10 anos, houve uma queda, de 32,6% para 22,6%, mas, através dessas informações, não podemos dizer absolutamente nada com relação ao número de analfabetos, à contagem de analfabetos, porque a população de 90 para 96 certamente cresceu e, sem outras informações adicionais, não saberíamos dizer se 32,6% dos jovens de 10 anos ou mais, em 1990 representam um número maior ou menor do que os 22,6% da população também com 10 anos ou mais, em 1996. Não temos essa informação, pois essa tabela apenas dá os percentuais, os números relativos. Comparando-se a parte com o todo, ou seja, o número de analfabetos com 10 anos ou mais com o número total de jovens nessa faixa etária, houve uma redução desse valor relativo, mas nada podemos dizer sobre o valor absoluto.

A linha de baixo apresenta a faixa etária de 10 a 14 anos. Podemos perceber que a primeira linha deu o total (percentual) de analfabetos a partir de 10 anos e, nas linhas seguintes, esse total vai ser discriminado por faixas etárias específicas. Então, temos 10 a 14 anos, na linha de baixo, 15 aos 24 anos, na outra linha, 25 aos 49 anos, e finalmente, 50 anos e mais. A primeira linha representa o percentual global a partir de 10 anos, e, nas linhas seguintes, os percentuais estão discriminados por faixas etárias específicas. Essa é uma maneira adequada e correta de apresentar a tabela. Particularmente, teríamos a preferência de apresentar a primeira linha, que é uma linha global, como resultado final na última linha da tabela, o que seria uma preferência pessoal de organização. Esta nova tabela apresenta a taxa de escolarização, cujo título é *Taxa de escolarização, Bahia – 1999-2001 (em %).*

Taxas de Escolarização, Bahia 1999-2001 (em %)

	Taxas de Escolarização					
Nível de Ensino	Bruta (1)				Líqüida (2)	
	1999	2000	2001	1999	2000	2001
Fundamental	154,9	161,5	163,5	53,3	61,3	68,5
Médio	93,3	96,2	96,0	14,2	15,3	15,9

Fonte: SEC, MEC/ INEP

(1) Taxa de Escolarização Bruta: corresponde à relação entre o total das matrículas em determinado nível de ensino e a população na faixa etária correspondente (Ensino Fundamental, 7 a 14 anos, e Ensino Médio, 15 a 17 anos).

(2) Taxa de Escolarização Líquida: corresponde à relação entre as matrículas de estudantes na faixa etária adequada ao nível de ensino e o total da população na faixa etária correspondente àquele nível.

Pelo título, percebemos que é dada uma informação sobre uma taxa – que se chama **taxa de escolarização,** para o Estado da Bahia, nos anos de 1999 a 2001 – e que os dados também serão apresentados através de porcentagem. Temos aqui, além do título da tabela, o cabeçalho, que é duplo, apresentando a taxa de escolarização (no alto da tabela) dividida em taxa de escolarização bruta e líquida. São duas taxas diferentes e isso está indicado no alto da tabela. Na coluna indicadora (à esquerda) temos o nível de ensino que está dividido em fundamental e médio. Portanto, no gráfico, temos taxa de escolarização bruta e líquida para o Nível Fundamental e, para o Nível Médio, separadamente. É essa a informação que está disponível na tabela. Ao lado da palavra "bruta", temos o número 1 e o comentário embaixo da tabela, uma nota apresentada de forma correta e que diz o seguinte: "a taxa de escolarização bruta corresponde à relação entre o total das matrículas em um nível de ensino e a população na faixa etária correspondente".

Temos, portanto, o número de matrículas em relação à faixa etária e o número de pessoas com relação à faixa etária correspondente ao nível de ensino.

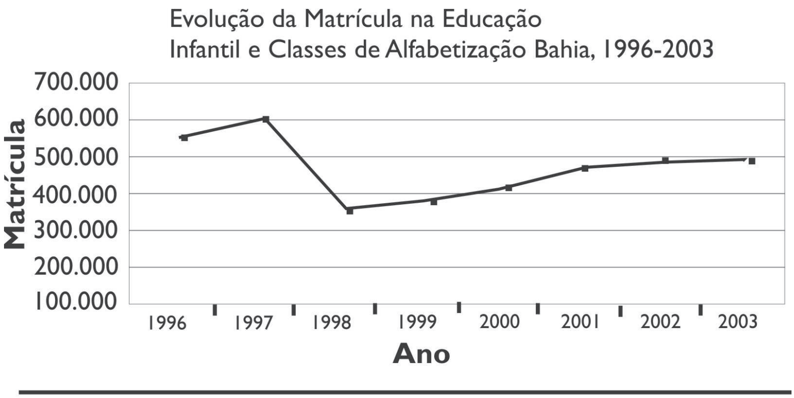
Assim, por exemplo, no caso do Ensino Fundamental, a faixa etária regular é de 7 aos 14 anos e, no Ensino Médio, é de 15 aos 17 anos.

Fazendo uma leitura mais cuidadosa desses dados para entendê-los um pouco melhor, observamos que no item "Ensino Fundamental", temos, em 1999, uma taxa de escolarização bruta de 154,9%. O que significa isso? Temos um percentual maior que 100. Vimos que a taxa de escolarização bruta é a relação entre o total de matrículas e o número de jovens na faixa etária correspondente ao nível de ensino. Isso significa que, para cada 100 pessoas que têm entre 7 e 14 anos, há 154 matrículas. Isso é possível? A cada 100 pessoas que têm de 7 aos 14 anos, pode-se ter 154 matrículas? É possível? Será que está errada essa tabela? Não. O que acontece é o seguinte: como o indicador está muito claro – o total de matrículas em relação ao número de pessoas na faixa etária – isso significa que pessoas ou com menos de 7 ou com mais de 14 anos estão se matriculando também no Ensino Fundamental. É o que conhecemos e sabemos que existe uma defasagem idade/ série. Então, temos um número relativamente grande de jovens com mais de 14 anos que estão matriculados no Ensino Fundamental. Por isso é que esse indicador é interessante, pois ele nos mostra se há uma defasagem idade/ série elevada. Consequentemente, esse número (154,9%) é possível e indica que, a cada 100 jovens de 7 aos 14 anos, temos 154 matrículas no Ensino Fundamental, ou seja, pessoas que não estão nessa faixa etária também estão se matriculando nesse nível de ensino. Vejamos como é que esse número se modifica. No ano 2000, ele passou para 161 e, portanto, cresceu. No ano de 2001, subiu mais ainda, passou para 163. A seguir, verificamos um erro na tabela.

Podemos observar que temos os anos 1999, 2000 e 2001 e 1999, de novo, com a escolaridade bruta. Está errado, porque a que é 1999 para escolaridade bruta pertence, na verdade, à escolaridade líquida. Portanto, essa tabela está com um erro de construção e foi copiada exatamente como aparece no *site,* porque temos que fazer a leitura do que aí está, analisando se a tabela está adequadamente construída, se as informações que ela nos fornece são coerentes. Evidentemente que elas estão incoerentes: o ano de 1999 aparece com 93,3 % mas, já no início da tabela, o mesmo ano está apresentado como 164; sem dúvida, ela está mal construída nesse aspecto. Observando a linha de baixo, a do Ensino Médio, vemos que a escolaridade bruta nesse nível de ensino é menor. É interessante notar que, em 1999, temos 53,3% de matrículas no Ensino Médio, em relação a cada 100 pessoas na faixa etária de 15 a 17 anos.

Examinaremos, agora, a escolaridade líquida, que corresponde à relação entre as matrículas de estudantes na faixa etária adequada ao nível de ensino e o total da população na faixa etária correspondente, ou seja são apenas as matrículas de jovens que têm a faixa etária correspondente àquele nível de ensino. Em referência à escolaridade líquida no ano de 2000 e 2001, vemos que, para a primeira linha no Ensino Fundamental, que corresponde ao de 2000, a taxa de escolaridade líquida é 96,2% e isso significa que 96 crianças, a cada H entre 7 aos 14 anos, estão matriculadas na escola. Consequentemente, há quatro crianças fora da escola, para cada 100 crianças. Esse é o outro lado da moeda: se existem 96 dentro da escola é porque existem quatro fora dela. De cada 100 crianças que estão matriculadas, quatro estão fora da escola. O número se mantém aproximadamente constante em 2001. Na linha de baixo, no Ensino Médio, a situação é bem mais grave. Nesse caso, temos apenas 15,3% e 15,9%, respectivamente, nos anos de 2000 e 2001, de alunos entre 15e 17 anos matriculados no Ensino Médio. Duas coisas podem estar acontecendo com esses alunos: ou eles estão fora da escola, ou estão no Ensino Fundamental, por conta da defasagem idade/série.

No gráfico, vamos fazer a mesma coisa que na tabela. O primeiro passo é fazer a leitura do título:



Fonte: SEC, MEC/ INEP

Interpretando esse título, o que ele informa? O gráfico é diferente da tabela, que é descritiva e convida à interpretação. Ele é mais propositivo e apresenta uma evolução, uma tendência, uma trajetória, um movimento. Então, olhamos e sentimos o movimento das matrículas. O gráfico representa uma linguagem distinta da tabela, que é sempre mais precisa, enquanto ele é mais dinâmico, mais propositivo. Se queremos apresentar uma ideia, uma proposição, o gráfico fala de uma maneira mais forte. Se pretendemos ser mais rigorosos, precisos e aparentemente mais imparciais, usamos uma tabela. Nesse gráfico, encontramos a evolução da matrícula, o tipo de matrícula: para Educação Infantil e as classes de alfabetização no Estado da Bahia, de 1996 a 2003. Temos, pois, uma série temporal. O gráfico possui dois eixos que representam o número de matrícula e a evolução do tempo (a série temporal, que vai de 1996 a 2003). Analisando o que esse gráfico está expressando, observamos que, se acompanharmos o ponto médio do segmento indicado com o ano de 1996, vamos encontrar um ponto que está perto dos 600 mil; se é 570, 580, 590 mil não sabemos, porque o gráfico não tem a mesma precisão de uma tabela. Percebemos muito mais o movimento dos dados, mas sem precisão. Depois, vamos para 1997 e verificamos que temos um ponto em vermelho, exatamente na linha que indica 600 mil alunos; na verdade, não são 600 mil e, sim, um número menor, mas a imprecisão do gráfico faz com que façamos uma leitura aproximada dos dados, elevando um pouquinho o valor real. Em 1998, há uma queda acentuada em relação aos anos anteriores; nesse ano, a matrícula, em classes de alfabetização, caiu para, aproximadamente, 350 mil e, depois, ela vem crescendo, gradativamente, até 2001 e, de 2001 até 2003, temos uma pequena evolução. Podemos dizer que ela se mantém quase que constante por conta da imprecisão do gráfico. Se verificássemos a tabela correspondente, ela poderia nos dar informações mais rigorosas.

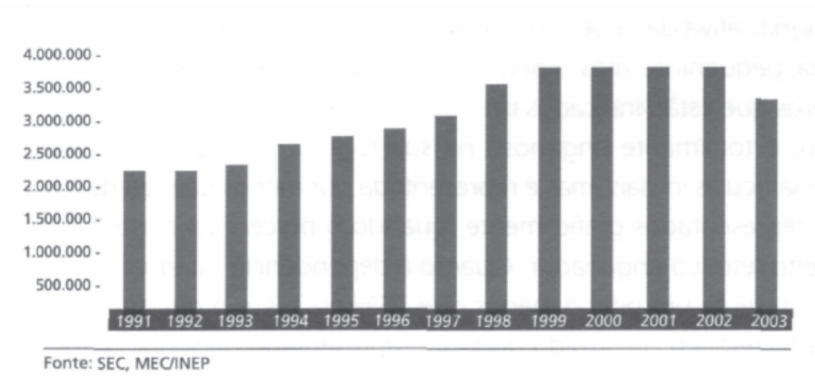
Um gráfico tem uma força retórica muito grande, pelo fato de ele ser propositivo, por apresentar uma ideia, um movimento, uma dinâmica. Também pode ser manipulado para que um leitor não proficiente faça uma leitura inadequada, acreditando em certas tendências que não são corretas, porque uma leitura correta tem que ser feita verificando os valores dos eixos, comparando esses valores, porque o gráfico apresenta inclusive comparações entre grandezas.

Se fossemos mudar a escala utilizada, a do eixo das ordenadas, que representa a evolução de matrículas (o número de matrículas), veríamos que ela passaria a ter um movimento, que seria muito mais suave, porque foi colocado um intervalo reduzido de um valor para o outro em termos de tamanho, e, com a escala modificada, os picos e os vales ficariam muito mais acentuados.

Poderíamos perceber, assim, muito mais acentuada a evolução de 1998 para 2003. E, com um comunicador de informações, por exemplo, podemos fazer uma escolha de escalas adequadas para reforçar uma proposição. Se a nossa proposição é acentuar o crescimento a partir de 1998, usamos um determinado gráfico. Se queremos atenuar as modificações ou variações, usaremos um gráfico com outra escala. São os mesmos gráficos e as informações são exatamente as mesmas. O problema é que, por ter uma característica retórica, por ser visual, espacial, analógico, por dar uma ideia de movimento, a manipulação das escalas permite proposições diferentes, ou seja, efeitos retóricos distintos. Precisamos ser proficientes nessa leitura para não sermos conduzidos por um efeito retórico qualquer, para que percebamos exatamente o significado das informações.

Agora, veremos um diagrama de barras, também chamado de gráfico de barras.

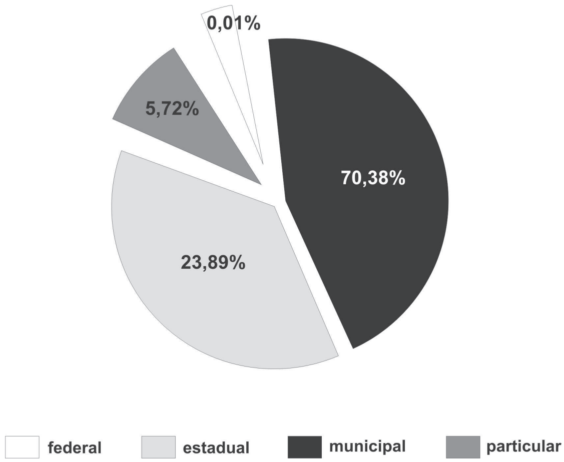
Matrícula Inicial no Ensino Fundamental Bahia, 1991-2003



A rigor, o gráfico é constituído dos eixos horizontal e vertical, em que se apresentam pontes ou curvas que mostram dependência entre as variáveis. Podemos também chamar isso de gráfico, mas uma parte dos autores da literatura específica chama de diagrama, conhecido por **diagrama de barras,** que tem uma característica intermediária entre uma tabela e o gráfico propriamente dito. A tabela é bastante descritiva, com um nível de precisão elevado, O gráfico tem um nível de precisão menor e é mais narrativo, conta uma história; um é mais narrativo, e o outro é mais descritivo. Esse está no meio do caminho. Se convenientemente utilizado, como o exemplo dado, que está muito bem feito, ele é, por exemplo, uma narrativa também; não há um sequenciamento, não há uma continuidade, mas parece que existe, e vemos o desenho da curva. Assim, consegue-se um efeito narrativo também com um gráfico de barras, desde que as barras ou os eixos sejam dispostos de maneira conveniente.

Analisemos, agora, o famoso gráfico de *pizza,* o nome adequado é **diagrama de setores** ou **gráfico de setores.**

Participação da matrícula inicial no Ensino Fundamental Dependência Administrativa Bahia 2003



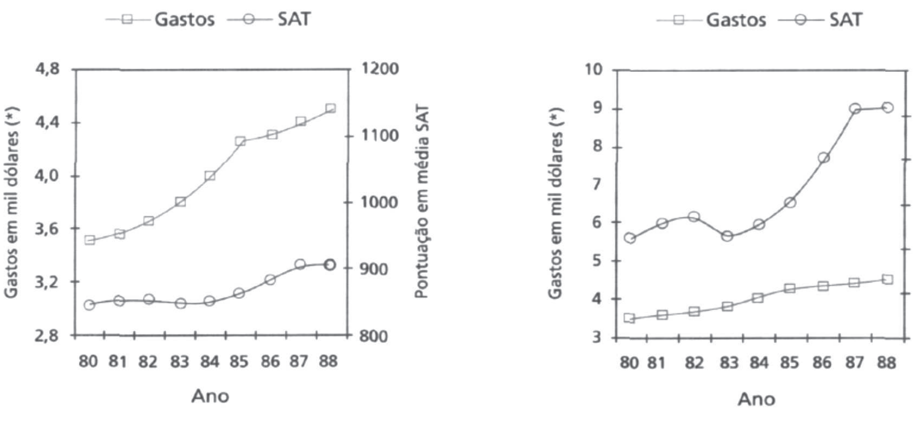
Fonte: SEC, MEC/INEP

A literatura, em língua inglesa, costuma chamar esse diagrama de diagrama de torta *(pie);* na língua francesa, é o gráfico *camamber,* em italiano, provavelmente, recebe o nome de *pizza,* frequentemente usado no Brasil também. Nota-se que a denominação usual, popular, tem um apelo cultural forte: a torta nos Estados Unidos, o *camamber* na França, a *pizza* na Itália e no Brasil, mas, na Bahia, poderíamos, oportunamente, denominá-lo de *"gráfico de cuscuz"* para termos, também, como em outros países, um enraizamento cultural na denominação do gráfico. Não poderíamos chama-lo de gráfico de acarajé, porque o acarajé é pequenininho e ninguém o corta em fatias. Esse "gráfico de cuscuz" tem um problema sério, a começar pelo título. Observemos: *Participação da matrícula inicial no Ensino Fundamental por dependência administrativa.* A dependência administrativa tem uma legenda em tons de cinza: federal, estadual, municipal e particular. Estes tons são utilizados nos pedaços do "cuscuz". O gráfico deve mostrar a participação da matrícula inicial por dependência, mas vamos ver o que acontece. Quando o olhamos, percebemos que há uma participação grande da dependência municipal e, também, que há uma participação bastante significativa da dependência estadual. Também vemos que a dependência federal aparece com uma fatia pequenina, mas ainda assim, há uma pequena fatia do "cuscuz" para ela. Analisando-se os números que estão indicados no "cuscuz", verificamos que o gráfico, disponível no *site* do Governo do Estado, é totalmente enganoso na sua forma. A dependência municipal tem 70%, aproximadamente, de matrículas iniciais, mas é representada por menos da metade do "cuscuz", ou seja, têm-se menos de 50% representados graficamente, quando o percentual correio é de 70%. Portanto, esse gráfico tem um efeito retórico enganador. Quanto à dependência estadual, a indicação, aqui, é de 24%, e esse número representa um pouco menos que 25% ou 1/4 e o que se vê, no gráfico, é muito mais do que 1/4. O efeito retórico construído pode ser apresentado da seguinte forma, a participação do Estado aparenta ser maior do que de fato é, enquanto a participação do município aparenta ser menor do que é na realidade. É como se o Estado ainda tivesse aquela grande participação de tempos passados. Assim, esse gráfico pode enganar o leitor não proficiente.

É muito importante fazer uma leitura adequada. Observamos que não falamos em **análise,** nem em **interpretação,** em que se pode ir muito mais além; estamos fazendo agora apenas uma **leitura.**

A leitura competente de um gráfico ou de uma tabela é muito importante, porque eles têm um efeito retórico muito forte e podem enganar, caso não sejam lidos adequadamente.

Para concluir, vejamos um gráfico clássico na literatura. É um exemplo que saiu publicado na *Revista Forbes* de 14 de maio de 1990, citado em artigo de 1992 de Wainer (apud CAZORLA, 2002, p. 4) compreendendo gráficos e tabelas.



Esse gráfico mostra, no eixo das abscissas, uma escala temporal compreendendo os anos de 1980 a 1988, e mostra também os gastos em milhões de dólares e ainda a pontuação obtida em um teste conhecido nos Estados Unidos, usado para ingresso no Ensino Superior, que avalia a competência verbal em

Matemática. Nesse gráfico, temos duas linhas: uma superior, indicando os gastos, e outra, inferior, a pontuação no teste. Observa-se que, enquanto os gastos em Educação, de 1980 a 1988, sobem significativamente, os valores obtidos pelos alunos, no teste, crescem muito pouco, têm uma evolução muito pequena. Esse gráfico já foi usado como argumento favorável à redução dos gastos em Educação, só que ele tem um problema gravíssimo, por ser, na verdade, puramente retórico, pois existem, na vertical, dois eixos completamente independentes, não tendo nada a ver um com o outro. A linha superior está atrelada ao eixo vertical da esquerda, ou seja, a gastos em milhões, já a inferior está ligada ao outro eixo vertical, o da direita, representando a pontuação no teste, de maneira que, se apenas mudarmos um pouco a posição das escalas, vamos ter outro gráfico, que não saiu na *Forbes*, sendo resultado de uma manipulação das informações.

Esta pontuação não é solidária aos gastos, não há uma indicação de dependência direta entre eles, de tal maneira que houve um deslocamento das escalas, jogando seus valores mais para baixo. Isso é uma pura manipulação retórica, pois se trata apenas de manipulação de informações. Pode-se fazer interferência nesse gráfico, invertendo os dados e dizer que os gastos estão aumentando muito pouco e que, apesar dos gastos reduzidos em Educação, os jovens estão fazendo cada vez melhor, pois essa garotada é genial. É o inverso do que está disposto no gráfico anterior. Evidentemente que um leitor proficiente em informações por imagem – gráficos, tabelas e afins – não é enganado por esses tipos de proposições.

Capítulo Quatorze

À GUISA DE CONCLUSÃO: A PESQUISA MATEMÁTICA

Em um texto cujo propósito é discutir, em educação matemática, o valor do problema, ou seja, da pergunta, para a produção do conhecimento matemático, vamos iniciar com a questão: o que é o conhecimento, afinal?

De uma forma simples e clara, podemos responder que o conhecimento é o entendimento que o ser humano tem do mundo.

Dessa maneira, esse entendimento é uma construção simbólica, ele é atribuição de significados ao mundo feito pelos seres humanos. Na medida em que a humanidade vai atribuindo significados ao mundo, ela vai entendendo e conhecendo.

Acontece que, na medida em que entendemos algum aspecto da realidade, esse entendimento se torna uma ferramenta para minha ação sobre o mundo. O entender significa que atribuí significado, que ele passa a ter um certo sentido; eu passo a ter uma compreensão, e essa compreensão me permite agir sobre esse próprio objeto de novas formas, formas de ação que eu não possuía ainda. Permite-me transformar o próprio mundo. Logo, o entendimento, ou seja, conhecimento se transforma em um ferramental para a ação.

À medida que tenho conhecimento, posso agir sobre este mundo que conheci, transformando-o. Mas, nesse momento, uma coisa muito interessante acontece, por quê? Ora, entendi um certo aspecto do mundo que me foi colocado, no momento em que entendi, agi sobre esse mundo e o transformei. Mas nesse momento, o mundo que entendi já não existe mais, ele foi transformado, é um outro mundo, e na medida em que ele é outro mundo, ele irá colocar novos desafios diferentes daqueles do mundo anterior.

Como são desafios novos, ou seja, este novo mundo vai demandar um reconhecimento e vamos novamente produzir conhecimento, e novamente teremos um novo ferramental, às vezes, melhor que o anterior ou diferente. E mais uma vez poderemos agir sobre o mundo e transformá-lo em um processo dinâmico e constante de conhecer e transformar.

Essa é a dinâmica da produção de conhecimento. Por isso o conhecimento se renova e tem que ser reproduzido constantemente, porque quando ele é produzido, ele vira ferramenta e transforma o mundo que ele explicava antes, mas que não explica mais; constantemente temos uma dissonância, um *gap*, uma diferença entre o que é o mundo, e o que é o saber do mundo, gerando um movimento. Esse *gap*, essa diferença provoca esse movimento constante de conhecer-transformar-conhecer, que vai criando a própria humanidade.

Mas, colocando uma nova pergunta, qual o ponto de partida, do ponto de vista cognitivo, de uma pessoa no processo acima descrito de compreensão do mundo, ou seja, dada uma situação problemática real, qual o ponto de partida de uma pesquisa, de uma investigação?

O ponto de partida é sempre uma pergunta, um questionamento, que surge na relação do ser humano com o mundo que quer compreender e, consequentemente, transformar. O sucesso de qualquer investigação, seja ela criminal, médica, científica, matemática, pedagógica etc., depende da capacidade do investigador de formular as perguntas corretas. O bom investigador, antes de buscar respostas, procura formular perguntas pertinentes, relevantes, exequíveis. É a pergunta que dirige o pensamento e o olhar do investigador na busca da compreensão do mundo. E o entendimento começa a ser produzido quando se formula a pergunta adequada. A seguir, para discutirmos a pesquisa matemática e a resolução de problemas, vamos examinar e diferenciar os conceitos de situação-problema, problema, problema matemático e resolução de problemas matemáticos.

O QUE É UMA SITUAÇÃO-PROBLEMA?

A situação-problema é uma situação real, pertencente ao nosso universo existencial, que nos provoca, exige reflexão, demanda melhor e maior conhecimento e ação transformadora efetiva.

Pode ser algo presente nas nossas atividades familiares, comunitárias, profissionais, sociais, escolares etc., de caráter concreto, simbólica e materialmente relevante.

Uma situação-problema é sempre complexa, abrangente.

O QUE É UM PROBLEMA?

É uma pergunta que construímos a partir da situação-problema.

Considerando a abrangência e complexidade de uma situação problema, comportando muitos aspectos relevantes, de diferentes ordens, tipos, áreas etc., que demandam uma multiplicidade de saberes teóricos e práticos distintos para sua compreensão sistemática e profunda, em geral não dispomos de todos os recursos necessários para sua solução.

Assim, uma situação-problema deve ser delimitada ou modelada, em torno de aspectos fundamentais bem definidos, de forma que os recursos disponíveis sejam suficientes para sua solução.

O problema é uma construção que o pesquisador faz, e existem estratégias para construir esse problema. O problema tem que estar sempre bem focado, se não estiver, o pesquisador não dá conta de fazer um trabalho com a profundidade exigida.

Para compreender a necessidade do foco, vamos usar uma metáfora: para cavar um poço comum, a boca tem que ser larga, porque temos que colocar o balde lá dentro, então é preciso realizar um esforço para cavar a terra toda contida no círculo da boca do poço. E, com este esforço cava-se até uma profundidade; mas se eu quiser ir ao lençol freático, o que fazemos? Cavamos um poço artesiano, que tem uma boca pequena; por quê? Porque cavando um diâmetro menor terei mais recursos para cavar mais profundamente.

O problema é o seu foco. Algumas diretrizes podem ajudar a definir o problema (construção do pesquisador) a partir da problemática (situação-problema real).

1) Identificar o foco temático da problemática;

2) Focalizar um aspecto específico do tema;

3) Delimitar aspectos complementares tais como: tempo, espaço, segmentos da população, tipos de documentos etc;

4) Formular o problema com um pronome interrogativo adequado.

É possível trabalharmos na complexidade de uma escola ou comunidade viva, como por exemplo, uma escola comunitária, e trabalhar apenas um problema específico, mesmo que seja identificado como um problema central, e resolver parte do problema?

Sim, não só é possível, como é o melhor caminho. Nós partimos de uma problemática, e focalizamos dentro dessa problemática, que é sempre muito ampla, um problema que se mostrou mais relevante, ou prioritário, e mais específico, permitindo a efetiva exequibilidade da pesquisa, a partir dos recursos sempre limitados disponíveis no momento (período de tempo, orçamento, equipe, áreas e bases de conhecimento, e competências).

Responder o problema, não significa resolver completamente a problemática. Mas, se selecionamos o problema que está no núcleo da problemática, e obtivermos elementos para responder esse problema, certamente teremos dado um passo firme e seguro, para solucionar a problemática.

EXEMPLOS

A partir da problemática cujo núcleo temático é a fome, podemos formular diversos problemas relevantes; abaixo, dois exemplos:

1) Qual a distribuição demográfica da fome em Aratuípe (BA) em 2008?

2) Qual a proporção de crianças subnutridas em Aratuípe (BA) em 2008?

Se o núcleo temático for transporte, teríamos outros exemplos:

3) Como pode ser escoada a produção de farinha de Aratuípe para Salvador?

4) Qual o custo de pavimentação com paralelepípedos da via Caraípe em Aratuípe?

Os problemas 2 e 4 exigem conhecimentos matemáticos básicos para sua solução. Vamos então perguntar agora, o que é um problema matemático?

O QUE É UM PROBLEMA MATEMÁTICO?

A tipificação de um problema depende do tipo de delimitação e dos recursos a serem utilizados. A tipificação depende de critérios, e, sabendo que a realidade é sempre complexa e multifacetada, comporta algum grau de arbitrariedade. Podemos considerar, por exemplo, a tipificação abaixo:

Problema de pesquisa científica
Problema de pesquisa social
Problema de intervenção organizacional
Problema de intervenção social
Problema didático
Problema didático de física
Problema didático de matemática
Problema matemático etc.

De maneira geral, um problema matemático é um problema cuja solução demanda fundamentalmente recursos matemáticos (conhecimentos, habilidades, aplicativos, sistemas, tabelas etc.)

Apesar da proximidade, é preciso diferenciar um problema matemático da formulação matemática de um problema (matemático), que faz uso quase que exclusivo de linguagem matemática. O que se busca conhecer, por que é desconhecido, em um problema matemático, geralmente é expresso em linguagem matemática como a incógnita (in – cógnita, ou seja, des – conhecida), representada muitas vezes pela letra x. A presença da incógnita nas equações e inequações matemáticas mostra que esta formulações são tipos matemáticos de perguntas ("qual o valor de x na fórmula seguinte?") e reforça a importância da pergunta na produção de conhecimento em geral e do conhecimento matemático em particular.

Um problema matemático pode ser um problema teórico (próprio de teorias matemáticas), ou pode ser um problema prático (de aplicação da matemática a um contexto existencial). Problemas teóricos ou práticos já resolvidos podem se constituir em problemas matemáticos didáticos, problemas artificiais, geralmente utilizados como estratégias de ensino-aprendizagem de matemática. Mas, permanecem aqui as questões críticas a este modelo: a pergunta foi bem formulada (definida, delimitada)? A pergunta é pertinente? A quem interessa a pergunta?

Por outro lado, um problema matemático real, teórico ou prático, puro ou aplicado, está sempre associado à construção de conhecimento matemático, em outras palavras, a pesquisa ou investigação matemática. E investigar começa com a formulação de perguntas, relevantes e exequíveis, investigadas coletiva e proativamente.

Vejamos agora a relação entre a pesquisa e a resolução de problemas.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Resolução de problemas é uma ideia próxima da ideia de pesquisa ou investigação matemática. Os dois termos são utilizados diversas vezes de forma semelhante.

A resolução de problemas é um atividade constituída de um conjunto de estratégias focadas na ideia superação dos obstáculos matemáticos. A resolução de problemas envolve uma variedade de tarefas com ênfase em processos matemáticos tais como: identificar padrões e regularidades, formular, testar, deduzir, provar, generalizar etc. A atividade de resolução de problemas em geral, mas não exclusivamente, tem como ponto de partida um problema proposto pelo professor.

Já a pesquisa matemática, difere fundamentalmente da resolução de problemas pelas características ou natureza do problema a investigar. Na pesquisa, as situações são de um modo geral abertas, exigindo delimitação a partir da situação problema, tornadas mais precisas e transformadas em problemas ou questões concretas, relevantes e exequíveis.

A pesquisa matemática envolve assim uma etapa inicial e essencial de formulação de problemas, etapa normalmente já realizada previamente pelo professor ou autor de livro didático ou paradidático na resolução de problemas.

No ensino da matemática, a educação clássica (pedagogia tradicional) privilegiou a solução protocolar de problemas, nas quais a repetição se constituía na estratégia pedagógica básica.

Com a educação renovada, e sua crítica à repetição, o foco passou a ser a colocado na solução criativa, no processo ou nos métodos de solução; a estratégia pedagógica aqui é o construtivismo.

Atualmente, com o foco na situação real, com o foco na problemática, a estratégia para a elaboração de perguntas pertinentes é a problematização. Tem muito valor a definição de perguntas adequadas. Vamos apresentar alguns exemplos concretos:

1. Problemas gerados de situações problemas reais, em curso de investigação (modelagem matemática):

Qual a cobertura e os grupos epidemiológicos a serem vacinados?

[Fiocruz; Struchiner];

Como manejar estoques pesqueiros?

[Unesp; Petrone Jr.]

2. Problemas historicamente relevantes:

Como dividir terras férteis equitativamente?

[Antigo Egito; base do teorema de Pitágoras)

Como fazer os cálculos astronômicos com maior rapidez e precisão?

[Astronomia moderna; base dos logaritmos]

Existe um método único para os problemas computáveis?

[Década de 30 no século XX; base da máquina de Turing/ computadores]

3. Problemas oriundos de situações cotidianas

Qual o combustível mais econômico para um carro flex?

De que forma construir uma casa com ajuda de uma maquete?

Usando apenas um facão e as varas por ele cortadas, como medir distâncias e áreas na mata?

[medida de comprimento – vara; medida de área – tarefa; interior da Bahia]

4. Problemas definidos em sala de aula a partir de uma situação problema:

Situação-problema [real] 1. Em certa cidade, o acelerado crescimento demográfico repercute na sustentabilidade ambiental, particularmente sobre a disponibilidade da água para abastecimento e a grande produção de lixo doméstico e esgoto. Assim, os seguintes problemas [possíveis] formam postos:

Qual a disponibilidade de água para abastecimento da população crescente da cidade nos próximos cinco anos?

Até quando a estação de tratamento de água terá capacidade de abastecimento?

Para onde poderá ser destinado o lixo doméstico produzido nos próximos cinco anos?

E o lixo hospitalar?

O esgoto poderá ser tratado com os recursos disponíveis nos próximos cinco anos?

Situação-problema [real] 2. Um determinado riacho apresenta elevada poluição, perdeu sua antiga piscosidade por isto, e, em função de assoreamento causado por terra e lixo, vem transbordando frequentemente na estação das chuvas, provocando alagamento das faixas laterais e circulação de pessoas e veículos. A prefeitura acenou com uma possível canalização.

Quais as características geométricas possíveis da seção transversal da canalização?

Quais as dimensões da seção transversal?

Dessa forma, a partir de situações-problema reais, com temática não matemática (no exemplo acima, a temática é demográfica e ambiental) os alunos podem formular, e depois resolver, problemas matemáticos.

Agora, entre resolução de problemas e pesquisa matemática, no que concerne à abordagem, outra distinção pode ser colocada. Enquanto que na resolução de problemas, protocolos específicos ou heurísticas gerais, mas bem definidas, são frequentes, na pesquisa matemática (como na modelagem matemática) as abordagens são menos protocolares ou canônicas, ou seja, são mais vastas, abertas, e muitas vezes construídas especificamente para o problema em curso.

Em síntese, o foco da resolução de problemas está nas estratégias de solução, e na pesquisa matemática, o foco é a compreensão de uma situação-problema a partir da problematização.

CONCLUSÃO

Conta-se que Einstein, ao ser indagado sobre o que faria se tivesse apenas uma hora para salvar o mundo, respondeu aproximadamente assim:

Eu gastaria 55 minutos para definir o problema, e apenas 5 minutos para resolvê-lo.

Pela análise da resposta do grande físico, atribuindo para definir o problema um tempo duas vezes maior que o tempo atribuído para solucioná-lo, pode-se inferir a importância de bem delimitar o problema a ser resolvido a partir da situação problema. A boa delimitação do problema é fundamental para sua efetiva solução, pois não se pode resolver um problema que não foi bem definido, de modo que se costuma mesmo dizer que saber perguntar é ainda mais importante que saber responder.

Assim, na educação matemática, tanto a prática mais rotineira de exercícios, quanto a solução de problemas não rotineiros, mas propostos pelo professor, e resolvidos com heurísticas reconhecidas, são usuais e importantes.

Todavia, aproximando o ensino da efetiva atividade de produção no mundo contemporâneo, em particular da atividade profissional do matemático, quer trabalhe com teoria quer com situações práticas, seja com a atividade matemática pura, seja com matemática aplicada, a atividade de pesquisa ou investigação em geral, e atividade de investigação matemática em particular, deve ser valorizada no âmbito escolar.

Isto está em conformidade com a seguinte proposta de Paulo Freire:

> O que o professor deveria ensinar, porque ele mesmo deveria sabê-lo – seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o inicio de todo o conhecimento, repito, é perguntar. E somente a partir do perguntar é que se deve sair em busca de respostas, e não o contrário. (FREIRE; FAUNDEZ, 1998 p. 46)

Parafraseando Barthes, há o momento para se ensinar o que se sabe, e há também o momento para se ensinar o que não se sabe – e isto é pesquisa, para construirmos um novo mundo.

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da matemática.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ALLEAU, René. *A ciência dos símbolos.* Lisboa: Edições 70, 1982.

ALVES, Luiz. *Comunicação de dados.* São Paulo: Makron Books, 1992.

ARISTÓTELES (ARISTOTLE). *Organon.* Chicago: William Benton, 1952. (The Great books, v.)

ARISTÓTELES. *Tópicos.* São Paulo: Nova Cultural, 1987.

BACHELARD, Gaston. *A chama de uma vela.* Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1989.

BACON, Francis. *Novo Organum.* São Paulo: Nova Cultural, 1988.

BARTHES, Roland. *Aula.* São Paulo: Cultrix, 1988.

BERNAL, J. D. *Ciência na história.* Lisboa: Livros Horizontes, 1976. 3v.

BETTI, Renato. Analogico-digitale. In: ENCICLOPEDIA Einaudi. Torino: Giulio Einaudi Editore, 1977. v. 1, p. 535-548.

BLACK, Max. *Modelos y metáforas.* Madrid: Tecnos, 1966.

BORGES, Carloman Carlos. *A topologia:* considerações teóricas e implicações para o ensino da matemática.. Feira de Santana: UEFS/ Depto. de Ciências Exatas, 1986. Mimeografado.

BOYER, Carl. *História da matemática.* São Paulo: Edgar Blucher, 1974.

BRAMLY, S. *Leonardo da Vinci: biografia: 1452-1519.* Rio de Janeiro: Imago, 1989.

BRETON, Philippe. *História da informática.* São Paulo: Editora da UNESP, 1991.

BYLINSKY, Gene. Here comes the second computer revolution. In: ______. FORESTER, Tom. *The microeletronics revolution.* Oxford: Basil Blackwell, 1980. p. 3-15.

CANIVEZ, Patrice. *Educar o cidadão?* Campinas: Papirus, 1991.

CARMO, Manfredo Perdigão. Geometrias não-euclidianas. *Matemática Universitária,* Rio de Janeiro: SBM, v. 6, p. 25-48, dez. 1987.

CARVALHO, Flávio de. Neurônio de silício imita vida inteligente. *Exame Informática*, São Paulo, p. 60-64, fev. 1992.

CASTORIADIS, C. *A instituição imaginária da sociedade.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1982.

CASTORIADIS, C. *As encruzilhadas do labirinto/1.* Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987-1992. 3 v.

CAZORLA, Irene Maurício. *A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos.* Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, 2002. Tese.

CEBOLEIRO, Maria João. Comunicação digital e analógica. In: MARQUES, António. *Filosofia e epistemologia.* Lisboa: A Regra do Jogo, 1978.

CLEMENT, John. Construtivism in the classroom. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 22, n.5, p. 405-428, nov. 1991.

COBB, Paul. The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist,* v. 23, n. 2, p. 87-103, 1988.

COBB, Paul et al. A constructivist alternative to the representacional view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 23, n. 1, p. 2-33, 1992.

COLIN, Ronan A. *História ilustrada da ciência.* Rio de Janeiro: Zahar, 1987.

COMPUTING machines. In : ENCYCLOPAEDIA britannica. Chicago: William Benton, 1996. p. 245-248.

COSTA, Newton C. A. da. A importância filosófica da lógica paraconsistente. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática* (2a. série), Curitiba, v. 11, n. 2, p. 91-92, 1990.

______. *Ensaio sobre os fundamentos da lógica.* São Paulo: Hucitec, 1980.

______. *Introdução aos fundamentos da matemática.* São Paulo: Hucitec, 1977.

______; SUBRAHMANIAN, V. S. *Paraconsistent logics as a formalism for reasoning about inconsistent knowledge bases.* São Paulo: IEA, 1989.

COURANT, Richards; ROBBINS, Herbert. *Que és Ia matemática?* Madrid: Aguillar, 1955.

DOLCE, Osvaldo, POMPEU, J. Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar: g*eometria espacial. São Paulo: Atual, 1978.

______. *Fundamentos de matemática elementar: g*eometria plana. São Paulo: Atual, 1980.

D'OTTAVIANO, Itala M. L. *On the development of paraconsistent logic and Da Costa's work. The Journal of Non Classical Logic*, v. 7, n. 1-2, p. 89-152, maio-nov. 1990.

DREYFUS, Hubert L. O *que os computadores não podem fazer:* uma crítica da razão artificial. Rio de Janeiro: A Casa do Livro Eldorado, 1975.

DUIT, Reinders. On the role of analogies and metaphors in learning science. *Science Education*, v. 75, n. 6, p. 649-672, 1991.

DURKHYA,Bipin. Modes of analogy. In: JANTKE, K. P. (Ed.). Analogical and inductive inference: lecture notes. *Artificial intelligence*. Berlim: Springer-Verlag, 1989. p. 217-230.

FEYERABEND, Paul. *Contra o método:* esboço de uma teoria anárquica da teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1977.

FEYNMAN, R. *O que é uma lei física?* Lisboa: Gradiva, 1989, p. 72.

FOUCAULT, Michel. *As palavras e as coisas:* uma arqueologia das ciências humanas. São Paulo: Martins Fontes, 1985.

FREIRE, P., FAUNDEZ, A. *Por uma pedagogia da pergunta.* 4. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

FREUD, S. Leonardo da Vinci e uma lembrança de sua infância. In: ______. *Obras completas.* Rio de Janeiro: Imago, 1970. v. 11.

GAMOW, George. *Um, dois, três... infinito.* Rio de Janeiro: Zahar, 1962.

GAY, Peter. *Freud, uma vida para nosso tempo.* São Paulo: Companhia das Letras, 1991.

GIL, Fernando. O pensamento categorial: das simetrias às contradições. In: MARQUES, António. *Filosofia e epistemologia*. Lisboa: Regra do Jogo, 1978.

GLEICK, James. *Caos:* a criação de uma nova ciência. Rio de Janeiro: Campus, 1990.

GLEITZ, Jean Jacques. *Le calcul analogique*. Paris: Presses universitaire de France, 1968.

GOLDSTINE, Herman H. *The computer:* from Pascal to von Neumann. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1972.

HARMON, Margaret. *Streching man's mind:* a history of data processing. Nova York: Mason/ Charter, 1975.

HOBBES, Thomas. *Leviatã*. 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1979.

HOBSBAWN, Eric. *A era do capital:* 1848- 1875. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1982.

HODGES, Andrew. *Alan Turing:* the enigma. New York: Touchstone, 1984.

HOLLAND, John H. et al. *Induction:* processes of inference, learning and discovery. Cambridge, Mass. : MIT Press, 1986.

HOLYOAK, Keith J.; THAGARD, Paul. *Mental leaps:* analogy in creative thought. Cambridge: MIT Press, 1996.

HOPCROFT, John E. Turing machincs. *Scientific American,* New York, v. 230, n. 5, p. 70-80, may 1984.

HUME, David. *Human understanding.* Chicago: William Benton, 1952. (The Great books).

JAMES, William. *The principles of psychology*. Chicago: William Benton, 1952. (The Great books).

JIMENES, Luís Márcio. *Geometria dos mosaicos.* São Paulo: Scipione, 1987.

______. *Geometria das dobraduras.* São Paulo: Scipione, 1988.

JUNG, C. G. *Interpretação psicológica do dogma da trindade*. Petrópolis: Vozes, 1988.

KANT, Immanuel. *The critique of judgement*. Chicago: William Benton, 1952. (The Great books).

KOESTLER, Arthur. *The act of creation.* [New York]: Macmillan [1969].

KRAUSE, Décio. *Algumas observações a propósito da reedição de "Sistemas formais inconsistentes".* Curitiba: UFPR, 1991. Mimeografado.

LÉVY, Pierre. *As tecnologias da inteligência:* o futuro do pensamento na era da Informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LÉVY, Pierre. *O que é virtual?* Rio de Janeiro: Editora 34, 1996.

LOCKE, John. *Ensaio acerca do entendimento humano.* 2. ed. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

MACHADO, Nilson José. *Semelhança não é mera coincidência.* São Paulo: Scipione, 2000.

MAHOWALD, Misha; DOUGLAS, Rodney. A silicon neuron. *Nature,* London, v. 354, n. 6354, p. 515-518, dez. 1991.

MANDELBROT, Benoit. *The fractal geometry of nature.* New York: Frecman, 1977.

MARX, Karl. *O capital.* Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1968, vol I.

MAYER, Richard. Cognition and instruction: their historie meeting within educational psychology. *Journal of Educational Psychology,* v. 84, n. 4 p. 405-412, 1992.

MOLES, A. A. *A criação cientifica.* São Paulo: Perspectiva; Edusp, 1971.

MOLINO, J. Métaphores, modèle et analogies dans lês sciences. *Langages,* n. 54, p. 83-102, jun. 1979.

MORIN, Edgar. *O método:* o conhecimento do conhecimento. Lisboa: Edições Europa-América, 1987.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R. *Prova de Gödel.* São Paulo: Perspectiva, 1973.

NEEDHAM, Joseph. *Science and civilisation in China: History of Scientific Thought,* vol. 2 (sec. 8-18) Cambridge University Press, Cambridge, 1956.

NUNES, César Aparecido. *Aprendendo filosofia.* Campinas, São Paulo: Papirus, 1986.

PERELMAN, Chaim. Analogie et métaphore en science, poesie et philosophie. In: ______. *Le champ delL´argumentation.* Bruxelas: Presses Universitaries, 1970. p. 271-283.

PETITOT, Jean. Local / Global. In: *Enciclopédia Einaudi.* Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1985c.

PLATÃO. *A república.* 6. ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1990.

PLATÃO. *Diálogos.* São Paulo: Nova Cultural, 1987.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POLYA, George. *Mathematics and plausible reasoning.* London Oxford University Press, 1954. 2 v. il.

POST, Emil L. Finite ombinatory process: formulation l. *The Journal of Symbofic Logic,* v. 1, n. 3, p. 103-105, Sep. 1936.

SANTOS, Boaventura de Sousa. *Introdução a uma ciência pós-moderna.* 2. ed. Porto: Afrontamento, 1989.

SANTOS, Gutemberg P. R. *A lógica Pt e seu significado.* João Pessoa: UFPR, 1992. Tese de doutorado.

SANTOS, José Abel Royo dos. *Computação analógica.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1974.

STRUIK, R. *História concisa da matemática.* Lisboa: Gradiva, 1989.

SWADE, Doron. *Redeeming Charles Babbage's mechanicall computer. Scientific American,* v. 268, n. 2, p. 86-91, fev. 1993.

TENÓRIO, Robinson. *Aprendendo pelas raízes:* alguns caminhos da matemática na história. Salvador: EDUFBA, 1995.

______. *Cérebros e computadores.* São Paulo: Escrituras, 2004.

______. *Computadores de papel:* máquinas abstratas para um ensino concreto. São Paulo: Cortez, 2003.

TURBAYNE, C. M. *El mito de la metáfora.* México: Fundo de Cultura Económica, 1974.

TURING, A. M. On computable numbers, with an application to the Entschtidungsproblem. *Proceedings of the London Mathemalical Sodefy*, London, v. 42, p. 230-265, 1936-1937.

USPENSKY, V. A. *A máquina de Post.* Belo Horizonte: Editora Mir, 1985.

VIRILIO, Paul. *O espaço crítico.* Rio de janeiro: Editora 34, 1993.

WALNUM, Cleyton. *Aventuras em realidade virtual.* Rio de Janeiro: Berkeley, 1993.

WEBSTER´S third new international dictionary. Chicago: William Benton, 1966.

WIESER, Wolfang. *Organismos, estruturas e máquinas:* para uma teoria do organismo. São Paulo: Cultrix, 1972.

WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus lógico-philosophicus.* São Paulo: Edusp, 1993.

WITTROCK, M. C. Models of heuristics teaching. HUSEN, T.; POSTLETHWAITE, N.T. (Ed.). *The International Encyclopedia of Education*. Oxford: Pergamon Press, 1985. v. 4. p. 2165-2177

ZAJDSZAJDER, Luciano. *Teoria e prática da negociação*. Rio de Janeiro: José Olympio, 1988.

Colofão

Formato	17 x 24 cm
Tipologia	Arrus BT e Symbol
Papel	75 g/m² (miolo) Cartão Supremo 250 g/m² (capa)
Impressão	Setor de Reprografia da EDUFBA
Capa e Acabamento	Gráfica Cian
Tiragem	500 exemplares