



Universidade Federal da Bahia
Universidade Estadual de Feira de Santana



**Programa de Pós Graduação em Ensino, Filosofia e
História das Ciências - PPGEFHC**

José Alves de Oliveira Neto

**Três Estudos Sobre o Discurso de Limite: uma abordagem
comunicacional**

**Salvador
2021**

José Alves de Oliveira Neto

Três Estudos Sobre o Discurso de Limite: uma abordagem comunicacional

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e da Universidade Estadual de Feira de Santana, para a obtenção do grau de Doutor, na área de concentração Educação Científica e Formação de Professores.

Orientador: Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa

**Salvador
2021**

Oliveira Neto, José Alves de.

Três estudos sobre o discurso de limite : uma abordagem comunicacional /
José Alves de Oliveira Neto. - 2021.

135 f.

Orientador: Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-
Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Salvador, 2021.

Programa de Pós-Graduação em convênio com a Universidade Estadual de
Feira de Santana.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Discurso. 3. Limites. 4. Conceito
matemático. 5. Realização. 6. Modelo matemático. I. Barbosa, Jonei Cerqueira.
II. Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino,
Filosofia e História das Ciências. III. Universidade Estadual de Feira de
Santana. IV. Título.

CDD 372.7 - 23. ed.

JOSÉ ALVES DE OLIVEIRA NETO

**TRÊS ESTUDOS SOBRE O DISCURSO DE LIMITE: UMA ABORDAGEM
COMUNICACIONAL**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências, na área de concentração Educação Científica e Formação de Professores, Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, à Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa (Orientador)
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dra. Graça Luzia Dominguez Santos
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dr. João Cláudio Brandenberg Quaresma
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Luis Márcio Santos Farias
Universidade Federal da Bahia

Prof. Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Ao meu pai, Aprígio (in memoriam), por ter nos
apresentado os livros.

Ao meu filho, José Víctor, minha motivação.

AGRADECIMENTOS

Aos meus irmãos, companheiros de vida.

À Andrea, mãe do meu filho.

À Elaine, minha companheira.

À Darlene Silva, minha colega de Instituto, pelas correções do texto.

À Prof.^a Nadja Núbia, minha colega de Instituto, pelas traduções dos resumos.

Aos colegas de curso, pelas palavras de estímulo nas horas difíceis.

Aos colegas do Grupo ENCIMA, pelos bate papos, discussões teóricas e pelas valiosas contribuições que ajudaram a refinar as análises.

Ao Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa, meu orientador, pelos ensinamentos, pela paciência, e por não ter desistido quando tivemos dificuldade. Exemplo de sabedoria, seriedade e competência. Uma honra e um privilégio ter vivido esta experiência ao seu lado.

Aos Professores(as) Dra. Graça Luzia Domingues Santos, Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto, Dr. João Cláudio Brandenberg Quaresma e Dr. Luis Márcio Santos Farias, por terem aceitado o convite para compor a Banca Examinadora.

Ao IFBA, por ter viabilizado o Doutorado Interinstitucional em parceria com o Programa de Pós Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências - PPEFHC, promovido pela Universidade Federal da Bahia – UFBA e pela Universidade Estadual de Feira de Santana.

À Deus

José Alves de Oliveira Neto

RESUMO

Nesse trabalho, desenvolvemos um macro projeto de pesquisa sobre os processos discursivos desencadeados no ensino e aprendizagem do conceito de limite, o qual foi executado por meio da realização de três estudos, que em conjunto, a despeito de seus objetivos particulares, visa ampliar o entendimento sobre as complexidades em torno do discurso de limite e contribuir com a agenda de investigação deste tema. Para a consecução dos estudos, foram realizadas: uma análise documental com artigos científicos sobre os conflitos discursivos na comunicação do conceito de limite; uma análise documental com artigos científicos sobre as realizações do conceito de limite; e uma análise documental com duas coleções de livros didáticos sobre rotinas matemáticas. O primeiro estudo, revelou a existência dos seguintes conflitos discursivos: o conflito do limite como aproximação; o conflito processo-objeto do limite; o conflito do limite como o valor da função; o conflito da dualidade processo-objeto do símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$; e o conflito da inversibilidade dos discursos x para y e y para x da definição formal de limite. No segundo estudo, construímos um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de limite, a partir das realizações da noção de limite documentadas em artigos científicos que investigam o ensino e a aprendizagem deste conceito. O modelo foi estruturado em quatro cenários: *limite como aproximação*; *limite como modelo para investigar o infinito*; *limite como taxa de variação instantânea*; e *limite como objeto matemático formal*. Para o terceiro estudo, foram examinadas duas coleções de livros didáticos de matemática da educação básica, visando identificar rotinas matemáticas potencialmente úteis para a exploração da noção de limite neste nível de ensino. A análise identificou dez rotinas potenciais, as quais foram categorizadas em *limite aritmético*, *limite algébrico* e *limite geométrico*, com base nas quais foram desenvolvidas três imaginações pedagógicas, uma de cada categoria. Em conjunto, estes três estudos fornecem uma visão ampla sobre o discurso de limite, podendo contribuir nos campos da produção científica, na formação de professores e na produção de materiais de instrução voltados ao ensino de limite.

Palavras-Chave: Discurso; Limite; Realizações; Matemática para o Ensino; Rotina Matemática.

ABSTRACT

In this research work, we have developed a macro project on the discursive processes triggered in the teaching and learning of the concept of limit, which was carried out through the realization of three studies with particular objectives, which aim to broaden the understanding about the complexities surrounding the discourse on limit and contribute to the research agenda of this theme. In order to develop the studies, the following actions were carried out: a document analysis with scientific articles on discursive conflicts in the understanding of the concept of limit; a documentary analysis with scientific articles on the realizations of the concept of limit; and a documentary analysis of two textbooks collections on mathematical routines. The first study revealed the existence of the following discursive conflicts: the conflict of limit as an approximation; the process-object conflict of limit; the conflict of continuity of limit; the conflict of process-object duality of the symbol $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$; and the conflict of the inversibility of discourses x to y and y to x of the formal definition of limit. In the second study, we constructed a theoretical model of mathematics for the teaching of the concept of limit, based on the realizations on notion of limit which were documented in scientific articles which investigate the teaching and learning of this concept. The model was structured in four scenarios: limit as approximation; limit as a model to investigate infinity; limit as instantaneous rate of change; and limit as a formal mathematical object. For the third study, we analyzed two collections of mathematics textbooks of basic education in order to identify potentially useful mathematical routines in order to exploring the notion of limit at this level of education. It was identified ten potential routines, which were categorized as archethretic limit, algebraic limit and geometric limit. They developed three pedagogical imaginations based on the routines, one of each category. Taken together, these three studies provide a broad view on discourse of limits and can contribute in the fields of scientific production, teacher training and in the production of instructional materials aimed at teaching limits.

Keywords: Discourse; Limit; Realizations; Mathematics for Teaching; Math Routine.

LISTA DE QUADROS E FIGURAS

Capítulo 1 - Introdução

Figura 1.1 – Correlação entre os estudos, os objetivos e as fontes	32
Figura 1.2 – Estrutura da tese	37

Capítulo 2 – Artigo 1

Quadro 2.1 – <i>Corpus</i> do estudo documental	56 - 57
Quadro 2.2 – Unidades de análise discursiva	58
Figura 2.1 – Gráfico ilustrativo	61
Figura 2.2 – Tabela ilustrativa	62
Quadro 2.3 – Resumo dos discursos sobre o conceito de limite	63 - 64
Quadro 2.4 – Categorias de conflitos discursivos na comunicação do conceito de limite	64 - 65
Figura 2.3 – Gráfico ilustrativo	66

Capítulo 3 – Artigo 2

Quadro 3.1 – Relação dos artigos selecionados para o estudo	84 - 85
Figura 3.1 – Gráfico ilustrativo	87
Tabela 3.1 – Tabela ilustrativa	87
Figura 3.2 – Ilustração gráfica	89
Figura 3.3 – Ilustração gráfica	90
Quadro 3.2 – Modelos matemáticos de fenômenos físicos /naturais	91
Figura 3.4 – Ilustração gráfica	93
Figura 3.5 – Ilustração gráfica	95
Quadro 3.3 – Síntese do modelo teórico de MpE do conceito de limite	96 - 97
Figura 3.6 – Árvore de realizações do conceito de limite	98

Capítulo 4 – Artigo 3

Figura 4.1 – Ilustração algébrica	117
Figura 4.2 – Ilustração algébrica	119
Tabela 4.1 – Tabela ilustrativa	120
Figura 4.3 – Ilustração geométrica	122
Figura 4.4 – Ilustração geométrica	123
Figura 4.5 – Ilustração geométrica	124

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

APOS - *Actions, Processes, Objects, Schemas*

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

EC – Estudo do Conceito

GNLD – Guia Nacional do Livro Didático

IFBA – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia

MKT - *Mathematical Knowledge for Teaching* (Conhecimento Matemático para o Ensino)

MpE – Matemática para o Ensino (*Mathematical for Teaching*)

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

UEFS – Universidade Estadual de Feira de Santana

\mathbb{R} - Conjunto dos Números Reais

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

1. Introdução	15
1.1. Trajetória pessoa/acadêmica e vinculação com o tema da pesquisa	15
1.2. Entendimentos dos estudantes sobre o conceito de limite	19
1.3. A matemática como atividade discursiva	26
2. Objetivos	29
3. Procedimentos Metodológicos e Contexto da Pesquisa	30
4. Estrutura da Tese	36
5. Justificativa	38
6. Referências	40

CAPÍTULO 2 – Artigo 1

Conflitos Discursivos na Comunicação do Conceito de Limite: um Estudo Documental

1. Introdução	45
2. Dificuldade no Processo de Compreensão do Conceito de Limite	47
3. Matemática como Discurso	51
4. Procedimentos Metodológicos	55
5. Conflitos Discursivos na Comunicação do Conceito de Limite	58
5.1. Conflitos discursivos no uso de palavras	58
5.2. Conflitos discursivos no uso de mediadores visuais	60
6. Categorização dos conflitos discursivos na comunicação do conceito de limite	63
7. Considerações Finais	66
8. Referências	68

CAPÍTULO 3 – Artigo 2

Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Limite

1. Introdução	73
2. Concepções do Conceito de Limite	76
3. Uma Perspectiva Discursiva para a Matemática	80
4. Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino	81
5. Procedimentos Metodológicos	84
6. Realizações, Cenários e Vínculos do Conceito de Limite	87
6.1. Cenário 1 – Limite como aproximação	87
6.2. Cenário 2 – Limite como modelo para investigar o infinito	89
6.3. Cenário 3 - Limite como taxa de variação instantânea	92
6.4. Cenário 4 – Limite como objeto matemático formal	93

7. Síntese do Modelo e Considerações Finais	95
8. Referências	99

CAPÍTULO 4 – Artigo 3

O que não é, mas poderia ser: potencialidades sobre o conceito de limite em livros didáticos da educação básica

1. Introdução	104
2. Revisão de Literatura	106
2.1. A análise de livros didáticos	107
2.2. Abordagem commognitive como instrumento para analisar o discurso sobre o conceito de limite	111
3. Procedimentos Metodológicos e a Imaginação Pedagógica	112
4. Imaginações pedagógicas em rotinas envolvendo a noção de limite presentes em livros didáticos de matemática da educação básica	116
5. Considerações Finais	125
6. Referências	126

CAPÍTULO 5

Considerações Finais	130
1. Discussão	130
2. Limitações	133
3. Contribuições	134
4. Referências	135

CAPÍTULO 1

1. Introdução

Neste capítulo introdutório serão apresentados a minha trajetória acadêmica e profissional, um breve resumo dos problemas relativos ao ensino e a aprendizagem do conceito de limite, os fundamentos do referencial teórico que será utilizado na pesquisa, os objetivos, os procedimentos metodológicos, a justificativa e o contexto no qual a pesquisa será realizada.

1.1. Trajetória pessoal/acadêmica e minha vinculação com o tema da pesquisa

Ingressei como estudante do Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS no ano de 1991. Então com 21 anos de idade, posso dizer que a docência não era a minha maior ambição, mas o encanto com a estrutura lógico-dedutiva do pensamento matemático e com a forma de seu desdobramento no processo de dedução de novos resultados matemáticos, me conquistou. Paralelamente a isso, o contato com as disciplinas pedagógicas do curso e as discussões sobre os problemas de aprendizagem em matemática possibilitaram as primeiras aproximações com a docência, fazendo-me perceber a natureza conflituosa entre os aspectos formal e dedutivo da matemática científica e a matemática praticada para fins de ensino.

Também de grande influência sobre a minha formação universitária e prática docente futura, foi a convivência com os professores do curso, a qual, para além das relações habituais circunscritas às disciplinas, possibilitava conhecer as experiências formativas e profissionais de alguns professores, suas visões de mundo e suas concepções sobre a Matemática e como ensiná-la, o que me ajudou a formar a minha própria visão da Matemática e estabelecer os primeiros vínculos com a profissão professor.

Dentre os professores com quem tinha maior proximidade, destaco aqui o Prof. Carloman Carlos Borges (1931-2010), o qual exerceu grande influência sobre várias gerações de estudantes, orientando-os tanto em questões relativas aos aspectos formais da Matemática quanto em questões relativas ao seu ensino.

Como seu aluno nas disciplinas Cálculo III e Cálculo IV, estabelecemos, juntamente com outros colegas, uma relação de amizade que perdurou durante o restante do curso.

Professor de grande erudição em Matemática e áreas afins, era comum, durante as aulas, ele chamar a nossa atenção sobre diversos aspectos relativos ao exercício da docência, incluindo a organização do quadro, a clareza da linguagem, o cuidado no relacionamento com os estudantes e a necessidade do conhecimento das principais teorias de aprendizagem. Também era comum nos reunirmos nos intervalos das aulas, momentos de descontração, em que ele nos brindava com relatos sobre suas experiências pessoal e profissional, nos orientava sobre como ser um bom professor de Matemática e indicava leituras complementares para melhorar e aprofundar a nossa formação matemática e docente.

Com relação ao conceito de Limite, tive meu primeiro contato com este assunto ao cursar a disciplina Calculo I-A na UEFS. Lembro-me do grande esforço da turma ao tentar compreender a ideia de uma variável que se aproxima bastante de um certo valor, sem no entanto atingi-lo. Lembro também da frase “podemos fazer $f(x)$ tão próximo de L quanto quisermos, desde que façamos x suficientemente próximo de a ”, várias vezes repetida pelo professor ao tentar transmitir a ideia de que é possível manter o valor da função $f(x)$ dentro de um certo intervalo, desde que o valor de x seja mantido em um intervalo conveniente. Lembro ainda da minha dificuldade ao tentar capturar o sentido do “épsilon e do delta”, introduzidos informalmente durante as explicações e posteriormente incluídos na definição de limite, bem como da luta de todos os estudantes ao tentar manipulá-los nas demonstrações dos teoremas e nas resolução de exercícios nos quais se utilizavam diretamente a definição de limite. Finalmente, lembro da complexidade algébrica necessária para a remoção de indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ao calcular limites como $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} \right]$ ou $\lim_{h \rightarrow 2} \left[\frac{h^3 - 8}{h - 2} \right]$, bem como de situações que conduziam a expressões da forma $\frac{\infty}{\infty}$, como no caso do cálculo de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 - 5}{x + 8x^2} \right]$. Nesses momentos tinha a impressão de que este assunto exigia, além de uma grande habilidade algébrica, uma grande dose de inspiração e ‘malandragem’, pois para cada nova era necessário “adivinhar” qual a melhor estratégia a ser utilizada.

Após este primeiro contato com o conceito de limite, o mesmo revelou-se um instrumento indispensável para o estudo de outros temas importantes na Matemática, como a derivada, a integral, as sequencias e as séries. Entretanto, apesar de nestes assuntos o conceito de limite ser utilizado mais como uma “ferramenta” do que como um fim em si mesmo, sempre

surgiam situações em que o uso direto da sua definição formal¹ representava um obstáculo à compreensão do assunto principal. Nestes momentos, ficava evidente a complexidade estrutural da sua definição e a dificuldade de capturar a correlação entre as variáveis envolvidas, o que exigia do professor uma abordagem de ensino que possibilitasse o desdobramento dessa correlação, tornando-a mais acessível aos estudantes.

Ainda enquanto estudante, tive a oportunidade de ministrar algumas aulas particulares de Cálculo para estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil da referida universidade, e novamente chamou-me a atenção a dificuldade manifestada pelos alunos ao lidar com este assunto.

Concluído o curso, trabalhei como professor substituto na própria Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS ministrando a disciplina Matemática I para estudantes calouros de diversos cursos. Também neste período fui aprovado em concurso público para professor efetivo da Rede Estadual de Ensino da Bahia, na qual trabalhei entre 1998 e abril/1999 com estudantes do ensino fundamental.

No final de 1998 fui aprovado em concurso público para o então Centro Federal de Educação, Tecnológica da Bahia/CEFET-BA/UNED-Eunápolis, atual Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA, tomando posse neste em maio de 1999. Trabalhei inicialmente ministrando aulas de Matemática para alunos dos cursos técnicos de nível médio e então, a partir de 2005, quando da implantação do Curso de Licenciatura em Matemática, passei a ministrar aulas nos dois segmentos: Ensino Médio e Ensino Superior.

Como professor do Curso de Licenciatura em Matemática do IFBA/Campus Eunápolis, ministrei por vários anos as disciplinas Tópicos de Lógica, Fundamentos de Matemática Elementar, Tópicos de Geometria Elementar I e II, Geometria Analítica e algumas disciplinas da área de Educação, como Práticas de Ensino I e II.

Estas experiências, entretanto, apesar de desafiadoras e importantes para a minha formação profissional enquanto professor de matemática, não possibilitaram vivenciar, dadas as suas naturezas e objetivos, os problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem do

¹ Seja I um intervalo aberto de números reais ao qual pertence o número a e seja f uma função real definida em I , exceto possivelmente em a . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Leithold, 1994.

conceito de limite, o que só viria ocorrer a partir do ano de 2015 quando ministrei pela primeira vez a disciplina Cálculo I para alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Naquele momento, o programa da disciplina contemplava os conteúdos de limite e continuidade, derivada de funções, os teoremas de Rolle, do valor médio do valor intermediário, a regra de L'Hospital, máximos e mínimos, fórmula de Taylor, assíntotas e construção de gráficos.

Especificamente sobre o conceito de limite, percebi de imediato a luta dos estudantes para compreender as ideias iniciais e o posterior formalismo contido na sua definição, trazendo à tona as lembranças do meu primeiro contato com este assunto e as dificuldades vivenciadas por mim e meus colegas na tentativa de entendê-lo. Percebi que as dificuldades dos meus alunos eram, basicamente, as mesmas dificuldades que vivi enquanto estudante: entender os papéis de ε e δ e seus vínculos com os quantificadores \exists e \forall ; capturar a ideia expressa na frase “tão próximo de L quanto se queira” e correlacioná-la com a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$; compreender por que se exige $0 < |x - a| < \delta$ e não simplesmente $|x - a| < \delta$ na definição formal de limite; e, não menos importante, reconhecer qual artifício algébrico utilizar para remover as terríveis indeterminações.

Também identifiquei nos meus alunos dificuldades em assuntos relacionados, sobretudo naqueles referentes a números reais e funções. Sobre os números reais, as dificuldades mais frequentes dizia respeito ao conhecimento das propriedades básicas destes números, como o fato do conjunto \mathbb{R} ser um corpo ordenado e completo, além da falta de habilidade em técnicas de fatoração e resolução de equações e inequações modulares. Quanto às funções, as dificuldades mais comuns estavam relacionadas à determinação de domínios, interpretação de gráficos – crescimento, decréscimo, descontinuidade, etc. - bem como a falta de conhecimento sobre as funções transcendentais, notadamente as funções trigonométricas. Novamente, dificuldades muito semelhantes àquelas experienciadas por mim e meus colegas quando tivemos contato com o conceito de limite pela primeira vez.

Estas dificuldades, quando debatidas em reuniões do Colegiado de Curso, eram essencialmente as mesmas apontadas pelos professores que ministravam regularmente a disciplina Cálculo I, e a maioria deles indicava este estado de coisas como o principal responsável pelos altos índices de reprovação nesta disciplina. Outro ponto, também aventado, dizia respeito à baixa formação em matemática básica dos alunos ingressantes, e sugeria-se, como forma de minorar o problema, a oferta de cursos Pré – Cálculo e a implementação de estratégias de ensino mais adequadas à esta realidade.

Este trabalho representa, portanto, uma tentativa de compreender as razões de tais dificuldades, de modo a construir um quadro geral de entendimentos e possibilidades que possa subsidiar ações de melhorias no ensino e na aprendizagem do referido conceito.

1.2. Entendimentos dos estudantes sobre o conceito de limite

O conceito de limite constitui-se no fundamento matemático sobre o qual o Cálculo e a Análise Matemática assentam vários temas importantes, tais como a noção de infinito, a continuidade de funções, as definições de derivada e integral, além de embasar as noções de convergência e divergência de séries e sequências infinitas (KIM; KANG; LEE, 2015), temas estes que subsidiam diversas aplicações científicas nas mais variadas áreas de conhecimento, como a Física, a Engenharia, a Economia, a Química, entre outros. No entanto, vários estudos (TALL; VINNER, 1981; CORNU, 1991; WILLIAMS, 2001; ROH, 2010; KIM; KANG; LEE, 2015; KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017) têm evidenciado que a maioria dos estudantes enfrenta grandes dificuldades no entendimento desse conceito, o que tem acarretado em elevados índices de reprovação e evasão nas disciplinas de Cálculo (NASSER, 2009; DE MORAES; MENDES, 2016).

Sobre estas dificuldades, Tall (1992) entende que o “conceito de limite significa um movimento para um plano superior de pensamento matemático” (p.8) para o qual o estudante nem sempre está preparado, uma vez que a solução de problemas que o envolvem nem sempre é obtida através de um cálculo direto, necessitando-se, quase sempre, de engenhosos artifícios algébricos.

Como consequência disto, Nasser (2009) observa a existência, entre os estudantes dos cursos da área de ciências exatas, de uma narrativa de medo e apreensão quanto a possíveis reprovações nas disciplinas de Cálculo. Tal preocupação se justifica, pois

Os índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo são, em geral, muito altos, prejudicando o rendimento dos estudantes e atrasando seu curso universitário. [...], mas isso não é prerrogativa dos universitários brasileiros: há uma preocupação mundial com o fracasso em Cálculo (NASSER, 2009, p. 43).

Num contexto amplo, é possível situar as pesquisas que tratam das dificuldades dos estudantes sobre a compreensão do conceito de limite em três grupos (WILLIAMS, 2001; NAGLE, 2013; KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017): as pesquisas relativas às noções de imagem conceitual (*concept image*) e definição do conceito (*concept definition*)

desenvolvidas por Tall e Vinner (1981); as pesquisas que tratam os equívocos e erros dos estudantes em termos de obstáculos, estudados por Sierpińska (1987) e Cornu (1991); e as pesquisas que se apoiam na teoria APOS (*actions, processes, objects, schemas*) implementada por Cottrill et al. (1996) para a decomposição genética do conceito de limite.

Os trabalhos apoiados nas noções de imagem conceitual e definição do conceito de Tall e Vinner (1981) tentam compreender como a imagem conceitual de limite – imagens mentais, símbolos, propriedades e processos associados –, criada e mantida pelos estudantes a partir de noções informais, se relaciona com a sua correspondente definição conceitual. Assumindo que as imagens conceituais se desenvolvem continuamente à medida que o indivíduo amadurece e encontra novos estímulos, os pesquisadores deste campo acreditam que a imagem conceitual de limite, por nem sempre formar um todo coerente, pode conflitar, no todo ou em parte, com a definição conceitual de limite legitimada pela comunidade matemática, levando a erros e equívocos no entendimento deste conceito (WILLIAMS, 2001; LIANG, 2016). Para muitos autores (CORNU, 1991; ROH, 2010; KIDRON; TALL, 2015; MESSIAS; BRANDEMBERG, 2014, 2015, 2018; FONSECA; HENRIQUES, 2018), estes erros e equívocos podem desenvolver nos estudantes a crença de que o limite é um valor para o qual a função se aproxima mas nunca alcança, que o limite nunca é ultrapassado, que o limite de uma função $f(x)$ em $x = a$ só existe se $f(x)$ estiver definida em a , ou ainda, que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Para Cornu (1991), tais concepções sobre o conceito de limite pode ser consequência dos usos cotidianos da palavra limite, muitas vezes associados a temas como limite de velocidade, fronteira entre países, etc. Além disso, a definição matemática deste conceito, expressa em termos de quantificadores, desigualdades modulares envolvendo ε e δ e a presença da relação implicativa entre elas, enfatiza muito mais a precisão e o rigor lógicos do que a percepção e a intuição, comprometendo o seu entendimento (TALL, 1992).

As pesquisas que tratam os equívocos e erros dos estudantes em termos de obstáculos, buscam explicá-los por meio da identificação de suas origens, as quais podem ser de natureza cognitiva, próprias do conhecimento ou de natureza externa (DE MORAES; MENDES, 2016). Partindo da ideia de que um obstáculo representa algum tipo de dificuldade à aprendizagem do aluno, tais dificuldades são então classificadas em obstáculos cognitivos, obstáculos epistemológicos e obstáculos didáticos (DE MORAES; MENDES, 2016; KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017).

Os obstáculos cognitivos dizem respeito às limitações dos indivíduos frente a um novo conhecimento. Podem resultar de uma estrutura mental ainda não plenamente desenvolvida, portanto inapta para aprender conhecimentos mais complexos (DE MORAES; MENDES, 2016) ou decorrer da incompatibilidade entre os conhecimentos prévios do indivíduo e os novos conhecimentos a que ele esteja submetido (KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017). Para vários autores (CORNU, 1991; WILLIAMS, 2001; ZUCHI, 2005; KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017), a abstração envolvida na definição de limite, a complexidade de coordenação dos quantificadores \forall e \exists com os valores de ε e δ , as noções prévias dos alunos a respeito da palavra *limite* e a incompatibilidade entre a concepção dinâmica presente na determinação de limite e a natureza estática da sua definição formal, podem produzir conflitos cognitivos na aprendizagem deste conceito.

Em relação aos obstáculos epistemológicos, estes são constitutivos do próprio saber e representam as dificuldades enfrentadas pelos pioneiros no estudo do tema em questão (DE MORAES; MENDES, 2016). Sobre isto, Kumsa, Pettersson e Andrews (2017) organizam as fontes de obstáculos epistemológicos estudados por Sierpińska (1987) e Cornu (1991) em três grupos principais: os relacionados ao desenvolvimento histórico do conceito de limite; os relativos à natureza dos conceitos usados em sua formalização; e a dualidade implícita no símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. São obstáculos de natureza histórica: a falha na conexão entre as noções geométricas e numéricas do conceito de limite, advinda do método de exaustão; as dificuldades de se operar com as noções de infinitamente grande e infinitamente pequeno; o aspecto metafísico da noção de limite, devido a sua associação com o infinito; e a inacessibilidade física do próprio limite (o limite é atingido ou não?), devido ao processo infinito de aproximação envolvido na sua determinação (CORNU, 1991; MORU, 2008; DE MORAES; MENDES, 2016; KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017).

Os obstáculos relativos à natureza dos conceitos usados na formalização da noção de limite estão relacionados às dificuldades com conceitos subjacentes ao limite, e inclui: obstáculos relativos aos conceitos de número real e função; obstáculos lógicos relativos à presença de quantificadores e de sua ordem; e obstáculos simbólicos, relativos a resistência à introdução de um símbolo para o limite (SIERPIŃSKA, 1987; DE MORAES; MENDES, 2016; KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017).

Quanto aos obstáculos relativos à dualidade do símbolo de limite, estes decorrem do fato de que o símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ representa, ao mesmo tempo, tanto o processo de

aproximação ao limite, quanto o próprio objeto limite (KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017). Desta forma, o mesmo símbolo transmite duas ideias opostas: a de movimento, através da ideia de aproximação, e a de estaticidade, expressa pelo número L que representa a conclusão do processo. Sfard (2008), pondera, entretanto, que tal dualidade, presente em diversos símbolos algébricos utilizados na matemática, não é necessariamente ruim, pois, para ela, os procedimentos de conceituação e resolução de problemas consistem em uma intrincada relação entre processos e objetos envolvendo os mesmos conceitos, não podendo portanto serem dissociados.

Os obstáculos didáticos referentes ao conceito de limite são decorrentes dos tipos de instrução desenvolvidas pelos professores no contexto de sala de aula e também da forma como o mesmo é abordado nos livros didáticos (KUMSA; PETTERSSON; ANDREWS, 2017). As abordagens de ensino informais, baseadas na visão processual do conceito de limite, ou o excesso de atividades procedimentais presentes nos livros didáticos são exemplos de fontes de obstáculos didáticos (GÜÇLER, 2013). Zuchi (2005) também destaca as abordagens excessivamente formais muitas vezes adotadas no ensino desta matéria, baseadas em apresentações hierarquizadas na forma de definições, enunciados de propriedades, demonstrações e resolução de exemplos rotineiros. Para esta autora, ao assim proceder, o professor transmite a visão de limite como um objeto matemático pronto e acabado, despreza a intuição como aliada da aprendizagem e as lutas históricas vivenciadas pelos matemáticos no desenvolvimento deste conceito.

Neste ponto, convém destacar que as pesquisas acima citadas caracterizam-se por apoiarem os seus resultados em teorias cognitivistas, as quais, apesar dos avanços na descrição das principais dificuldades na aprendizagem matemática e dos *insights* úteis para o ensino, tem como lacuna o fato de não levarem em conta a influência dos aspectos interpessoais e culturais na aprendizagem e a importância do discurso no desenvolvimento e constituição dos objetos matemáticos (GÜÇLER, 2013). Neste sentido, pesquisas mais recentes têm sido desenvolvidas tentando incorporar a dimensão discursiva à agenda de investigação dos processos envolvidos na construção do conceito de limite, abrindo-se assim uma janela para melhor compreender, por exemplo, como os conflitos entre as visões coloquial/formal e processual/objetivada da noção de limite afetam o entendimento dos estudantes sobre este assunto. Em particular, citamos os trabalhos de Güçler (2013, 2014) e Kim e Lim (2018), os quais utilizam o quadro teórico discursivo de Sfard (2008).

Nestes três trabalhos, os pesquisadores utilizaram a teoria *commognitive*² de Sfard (2008) para identificar padrões, inconsistências, incompatibilidades e descontinuidade no discurso sobre o conceito de limite que podem potencializar o surgimento de erros e conflitos na compreensão deste assunto. De fato, ao acompanhar uma turma iniciante de Cálculo com o propósito de comparar o discurso de limite do professor com o discurso de limite dos alunos, a pesquisa de Güçler (2013) evidenciou que ao final da instrução sobre limite, apesar do discurso do professor ter sido predominantemente objetivado, ou seja, focado no limite como o número resultante dos procedimentos empregados na sua determinação, o discurso dos estudantes era ainda dominado pela visão do limite como um processo. A autora argumenta que o professor não tornou explícitas aos estudantes as trocas discursivas entre processo e objeto desenvolvidas durante suas explanações sobre limites, o que pode ter provocado rupturas comunicacionais e levado os estudantes a concentrarem-se exclusivamente na concepção processual. Güçler constatou também, em um artigo derivado da mesma pesquisa e publicado em 2014, que a visão processual de limite desses mesmos alunos permaneceu inalterada quanto ao uso da notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, mesmo tendo o professor alternado flexivelmente entre as concepções de processo e objeto presentes neste símbolo. Os achados de Güçler (2013, 2014), sugerem que o uso rigoroso de palavras e símbolos matemáticos para a noção de limite, embora necessário para a sua correta formalização, pode comprometer a comunicação em sala de aula, e que é necessário desvelar e interpretar os diferentes sentidos matemáticos que estes entes podem transmitir, a fim de evitar que professores e alunos atribuam significados diferentes às mesmas representações matemáticas de limite (GÜÇLER, 2014).

O trabalho de Kim e Lim (2018), por sua vez, focou na influência que a cultura exerce sobre a construção de significados dos conceitos matemáticos, ao analisarem um grupo de estudantes sul coreanos e um grupo de estudantes estadunidenses, a fim de avaliar como as diferenças linguísticas e culturais entre estes dois grupos afetariam os seus discursos matemáticos sobre a noção de limite. A pesquisa revelou uma forte correlação entre os aspectos culturais associados ao uso da palavra limite com os discursos matemáticos de limite de cada grupo, sendo prevalente no discurso dos participantes estadunidenses a visão processual, em oposição ao discurso objetivado de limite do grupo sul coreano. Para Kim e Lim (2018), por causa da natureza processual dos usos cotidianos da palavra limite em inglês, a partir dos quais os estudantes norte-americanos constroem as suas experiências com esta palavra, o discurso desses estudantes acaba incorporando ao limite matemático a visão processual adquirida

² Pleonasma das palavras inglesas *communicational* e *cognitive* para comunicacional e cognitivo.

naqueles contextos, havendo assim uma continuidade entre os sentidos cotidianos e matemáticos de limite na língua inglesa. Por outro lado, em coreano a palavra limite tem poucos significados coloquiais e raramente é utilizada em situações cotidianas, o que leva os estudantes sul coreanos a terem o primeiro contato com esta palavra em cenários acadêmicos e a construir a sua primeira experiência discursiva sobre limite em associação com os significados que os professores e os livros de matemática atribuem a esta palavra, prevalecendo, então, o discurso objetivado de limite. Para Kim e Lim (2018), existe, portanto, uma descontinuidade lexical entre os discursos matemáticos e não matemáticos de limite dos estudantes coreanos.

Para além das especificidades das pesquisas de Güçler (2013, 2014) e Kim e Lim (2018), os achados destes trabalhos evidenciaram a dependência sociocultural e linguística na formação do discurso matemático de limite, revelando que a aprendizagem deste assunto é fortemente influenciada pelos significados que os sujeitos atribuem à palavra limite e pelo modo como a utilizam.

Tais resultados estão de acordo com a perspectiva teórica de Sfard (2008), pois para esta autora, enquanto construções discursivas, os objetos matemáticos são criados coletivamente por meio de trocas comunicacionais entre os indivíduos e os seus significados estão associados aos usos que deles se faz.

Em termos intuitivos, a palavra discurso refere-se a um tipo específico de comunicação identificada pelos objetos com os quais lida, as palavras chave empregadas e as regras seguidas pelos participantes da comunidade discursiva (SFARD, 2008). Neste sentido, diferentes comunidades discursivas produzem diferentes discursos, como documentado no trabalho de Kim e Lim (2008) a respeito dos discursos de limite elaborados pelos grupos de estudantes norte americanos e sul coreanos.

Como uma consequência da dinâmica de geração de discursos, a precisão do discurso matemático é constantemente ameaçada pelo próprio desenvolvimento discursivo de construção dos objetos matemáticos. Surgem, assim, os chamados conflitos discursivos³, originados quando os interlocutores utilizam as mesmas palavras ou símbolos de modos diferentes ou executam as mesmas tarefas por meio de regras divergentes (SFARD, 2008). Para Sfard (2008), um conflito discursivo, ao invés de representar um obstáculo à comunicação matemática, pode ser visto como uma oportunidade para o novo discurso, servindo então como

³ Sfard (2008) utiliza a expressão *commognitive conflict*, a qual, para os propósitos do presente trabalho, será traduzida como conflitos discursivos.

um desencadeador de novas aprendizagens. Nesse sentido, identificar conflitos discursivos na comunicação de limite é vital para compreender como este discurso se desenvolve, como contorná-los, ou mesmo utilizá-los como gatilhos para direcionar a aprendizagem estudantil. As divergências entre as concepções de processo e objeto relativas ao uso da palavra limite e do símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, observadas, entre outros, por Güçler (2013, 2014) e Kim e Lim (2018) é um legítimo conflito discursivo, pois é originado pelos usos diferentes que alunos e professores fazem destes entes.

Outro quesito importante no processo de criação e fundamentação do discurso matemático é a noção de realização. Formalmente, a *realização* de um significante⁴ é qualquer artefato perceptivelmente acessível operado para substanciar discursos sobre o significante, ou seja, qualquer dispositivo utilizado na comunicação para auxiliar a compreensão de um conceito matemático, o que inclui definições, gráficos, símbolos algébricos, fórmulas, aplicações ou objetos concretos (SFARD, 2008). Assim, uma realização do objeto limite inclui palavras escritas ou faladas, tabela de valores, gráficos, ou símbolos algébricos, como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Neste sentido, compreender um objeto matemático, como limite, implica conhecer as suas principais realizações e os possíveis vínculos e limitações existentes entre elas e entre outros conceitos matemáticos.

Também de grande relevância para entender como se desenvolve o discurso de limite, é o conhecimento dos padrões repetitivos que regulam a execução das tarefas matemáticas acerca deste conceito. Em geral, tais padrões são o que Sfard (2008) denomina de rotinas e, no caso de limite, compreendem os processos em que ‘o fazer matemático’ envolvendo os procedimentos de determinação ou validação de limites tornam-se visíveis. Cálculos para a determinação de limites, métodos de provas, aplicação de teoremas são exemplos de rotinas matemáticas sobre limite.

Portanto, diante das considerações acima, e tal como Güçler (2013, 2014) e Kim e Lim (2018), pretendemos neste trabalho ampliar as contribuições da abordagem commognitive à agenda de investigação sobre o conceito de limite. No entanto, ao contrário dos trabalhos citados, não temos a intenção de investigar os aspectos socioculturais enredados no desenvolvimento dos discursos sobre limite, mas sim construir um macro projeto de pesquisa

⁴ Significantes são palavras ou símbolos utilizados pelos interlocutores para denotar os objetos do discurso matemático (SFARD, 2008).

em torno dos processos discursivos envolvidos no ensino e na aprendizagem do referido conceito. Para tanto, buscamos respostas para as seguintes questões de pesquisa:

1. *Quais são os conflitos discursivos envolvidos na comunicação do conceito de limite e como estes concorrem para as dificuldades no entendimento deste conceito?*
2. *Como o conceito de limite é realizado nos artigos científicos que tratam do ensino e da aprendizagem deste assunto?*
3. *Quais oportunidades, em termos de rotinas matemáticas, os livros de matemática da educação básica oferecem para explorar a noção de limite?*

Cada uma dessas questões relaciona-se com um objetivo de pesquisa, e a consecução desses objetivos permitirá, assim esperamos, ampliar os entendimentos acerca dos problemas relacionados à aprendizagem do conceito de limite e contribuir com os campos científico e profissional dedicados à compreensão e superação desses problemas.

Na seção seguinte, apresentamos os fundamentos da teoria *commognitive* de Sfard (2008) e a conceituação dos termos que permitem a sua operacionalização. Isto possibilitará enunciar, em termos precisos, os objetivos correspondentes a cada uma das questões de pesquisa acima elencadas.

1.3. A Matemática como atividade discursiva

Em seus estudos sobre a evolução das teorias de aprendizagem, Sfard (1998) apresenta a uma reflexão sobre como o ensino se desenvolveu historicamente, refletindo sobre a metáfora do ensino-como-aquisição e a metáfora do ensino-como-participação. Segundo esta autora, as duas metáforas estão simultaneamente presentes na literatura, havendo, entretanto, um predomínio da metáfora de aquisição nos textos mais antigos e um crescente aumento da metáfora de participação nas pesquisas atuais.

Basicamente, a metáfora da aquisição reflete a longa tradição de se conceber a aprendizagem humana como a aquisição de algo. Entendendo o conhecimento como um processo de desenvolvimento de conceitos que podem ser acumulados e refinados gradualmente, a metáfora da aquisição leva-nos a “pensar sobre a mente humana como um recipiente para ser preenchido com certos materiais e sobre o aluno como sendo um proprietário desses materiais”, (SFARD, 1998, p. 5, tradução nossa). Na escola, tal abordagem é

materializada na utilização de termos como apropriação, aquisição, construção, acumulação, recepção, etc, os quais reforçam a concepção da mente humana como um recipiente e o conhecimento como um bem material. Sob este ponto de vista, a fim de atingir os objetivos da educação, o professor atua entregando, transportando, facilitando e mediando, ou seja, como um meio entre o aluno e o objeto de aprendizagem (SFARD, 2008). Ao final desse processo, como uma mercadoria, o conhecimento pode então ser transferido, compartilhado e aplicado, o que Sfard (2008) denomina de objetificação do conhecimento.

Contrastando com a metáfora da aquisição, a metáfora da participação utiliza uma abordagem que enfatiza o saber como resultado da ação, da prática, do fazer..., e na qual as atividades de aprendizagem estão incorporadas no contexto no qual elas ocorrem. O discurso corrente agora fala de contextualidade, incorporação cultural e mediação social, e concebe a aprendizagem como um processo de participação em atividades socialmente organizadas (SFARD, 2008).

Para Sfard (2008), como resultado da participação em atividades comunitárias, ocorre uma transição gradual da participação em atividades coletivas para formas de realização individual, em que o indivíduo torna-se capaz de fazer sozinho, e completamente, atividades que até então eram realizadas coletivamente e nas quais sua contribuição era parcial. Sfard (2008) considera, ainda, que a individualização das formas coletivas de fazer desencadeia também a internalização da fala pública para a fala privada e, desta forma, o pensamento pode ser visto como uma versão individualizada de uma ação coletiva, o que possibilita definir *o pensamento como uma versão individual da comunicação interpessoal* (SFARD, 2008). Por *individualizar*, Sfard (2008) refere-se à capacidade do indivíduo se comunicar de acordo com as regras comunicacionais coletivas, não apenas com os outros, “mas também enquanto “conversa” consigo mesmo e resolve seus próprios problemas” (SFARD, 2016, p. tradução nossa, ênfase no original). Ou seja, *pensar é o ato de conversar consigo mesmo e com os outros.*

Como proposto por Sfard (2008), o vínculo pensamento-comunicação possibilita então conceber os processos cognitivos e os processos comunicacionais como manifestações do mesmo fenômeno, o que torna possível estudar o pensamento a partir da sua versão pública, a comunicação. Para Sfard (2008), enquanto atividade de um coletivo, a cada *ação* comunicativa de um indivíduo segue-se um repertório de possíveis *re-ações* esperadas de outras pessoas. Estas re-ações podem ser práticas, como mudar um objeto de lugar ou assar um bolo, ou comunicacionais, o que pode desencadear outra ação comunicacional e levar a outra re-ação, e

assim sucessivamente. Em qualquer caso, o par ação/re-ação é construído coletivamente e seus padrões repetitivos podem ser observáveis (SFARD, 2008).

Neste sentido, existe uma multiplicidade de repertórios comunicacionais, cada um deles destinado a diferentes aspectos da vida e separados uns dos outros em seus objetos, nos tipos de mediadores utilizados e nas regras seguidas pelos participantes (SFARD, 2008). Tais repertórios comunicacionais é o que Sfard (2008) denomina de discurso. Em termos precisos, um *discurso é um tipo específico de comunicação que atrai alguns indivíduos, e exclui outros* (SFARD, 2008). Por exemplo, a Matemática é um desses discursos cujo repertório fala dos números e das formas, enquanto a Geografia discursa sobre a Terra e os fenômenos químicos, físicos e geológicos que nela ocorrem. No entanto, diferente da Geografia, cujos objetos estão separados do discurso, isto é, existem independentemente do discurso, os objetos matemáticos são construtos discursivos e fazem parte do próprio discurso, ou seja, é o discurso matemático que dá existência e significado aos seus objetos (SFARD, 2008; VIIRMAN, 2008).

Em conformidade com a visão comognitiva⁵ de Sfard (2008), a aprendizagem matemática passa, então, a ser entendida como uma forma de participação no discurso matemático, por meio da qual o aprendiz modifica o seu discurso visando aproximá-lo do discurso matemático historicamente estabelecido.

Como um tipo de comunicação, o discurso matemático pode ser identificado por meio de quatro características específicas deste discurso (SFARD, 2008): o uso de palavras, os mediadores visuais, as rotinas e as narrativas endossadas. O uso de *palavras* diz respeito às palavras chave utilizadas para nomear os objetos próprios do discurso matemático, tais como número, círculo, quadrado, equação, função, limite, derivada, etc.; *mediadores visuais* são artefatos físicos visíveis empregados na comunicação visando tornar acessível perceptualmente os objetos intangíveis do discurso matemático, e compreende símbolos notacionais, expressões algébricas, tabelas, gráficos, etc.; *rotinas* são padrões discursivos repetitivos utilizados na implementação das diferentes tarefas matemáticas. Sua natureza repetitiva padronizada, regula as ações discursivas dos participantes quanto ao uso de palavras, mediadores visuais e o endosso de narrativas (SFARD, 2008) - o passo a passo na resolução de uma equação do segundo grau é um exemplo de rotina. Quanto as *narrativas*, estas são sequências de enunciados que descrevem objetos, relações entre objetos ou processos sobre objetos, sujeitas ao endosso ou rejeição por parte dos participantes do discurso matemático (SFARD, 2008). O endosso de uma

⁵ Nossa versão aportuguesada da palavra inglesa *commognitive*.

narrativa pode ser feito por meio da estipulação, como no caso das definições e axiomas, por dedução como, no caso dos teoremas, ou por qualquer outro meio validado pelos membros experientes do discurso matemático (SFARD, 2008; IOANNOU, 2018).

Assim, no discurso sobre o objeto matemático limite, *limite* é a palavra utilizada para designá-lo; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $x \rightarrow a \Rightarrow f(x) \rightarrow L$ são alguns dos mediadores visuais utilizados na comunicação de limite; os cálculos desenvolvidos para a determinação do limite de uma função, por exemplo $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+3}{x} \right)$, é uma rotina; e a dedução de um teorema sobre limite, juntamente com a sua prova, é uma narrativa.

Sfard (2008) utiliza duas categorias para estudar o desenvolvimento do discurso matemático, o discurso em nível de objeto e o discurso meta-nível. O discurso em nível de objeto diz respeito às regularidades discursivas que ocorrem no interior do discurso sobre um dado objeto matemático, enquanto o discurso meta-nível envolve olhar além do discurso, isto é produzir padrões discursivos para a criação e endosso de narrativas sobre a totalidade do discurso, analisando suas estruturas abstratas constituintes a fim de validá-las e perceber o objeto matemático em sua completude (KIERAN, 2016; IOANNOU, 2018).

Assim, participar do discurso matemático de limite implica conhecer e saber utilizar as palavras específicas deste discurso, reconhecer e empregar os mediadores visuais que dão ‘vida’ ao objeto intangível chamado limite, executar tarefas relacionadas à determinação e validação de limites, e dominar as regras que regulam o endosso e a criação de narrativas sobre limites.

Portanto, é ancorado nas considerações teóricas acima apresentadas e inspirados na visão defendida por Sfard (2008) segunda a qual a matemática é um discurso construído socialmente, que pretendemos desenvolver a presente proposta de pesquisa.

2. Objetivos

O presente estudo, concebido como um macro projeto de pesquisa sobre os processos discursivos desencadeados no ensino e aprendizagem do conceito de limite, está organizado em torno das três questões de pesquisa apresentadas na Seção 1.2, as quais se desdobram nos correspondentes objetivos listados abaixo:

1. *Identificar e categorizar conflitos discursivos na comunicação do conceito de limite presentes nos contextos do seu ensino e da sua aprendizagem;*
2. *Elaborar um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de limite;*

3. *Identificar rotinas matemáticas documentadas em livros didáticos da educação básica que possam servir de oportunidades para a exploração da noção de limite neste seguimento de ensino.*

Dada a natureza multifacetada das questões de pesquisa e dos respectivos objetivos que compõem este macro projeto de análise do discurso de limite, o presente trabalho não comporta um objetivo geral e nem objetivos específicos. Isto posto, e como consequência da variedade de objetos de investigação aqui implicados – conflitos discursivos, realizações e rotinas -, e também de fontes, adotamos como modelo de organização desta tese o formato *multipaper*, por ser este o formato mais flexível para acomodar os nossos interesses.

Na próxima seção, apresentamos o paradigma de pesquisa, o método de investigação escolhido e os procedimentos de coleta e análise de dados. Após isto, na seção seguinte, discorreremos sobre o formato *multipaper* de organização de dissertações e teses.

3. Procedimentos Metodológicos e Contextos da Pesquisa

Como qualquer atividade humana, uma pesquisa científica carrega consigo crenças e pressupostos que evidenciam as concepções do ser e da realidade, as compreensões de mundo e de como o conhecimento é construído, as quais, direta ou indiretamente, guiam as tomadas de decisão do seu autor, desde a formulação das questões de pesquisa, a escolha do método de investigação e coleta de dados, até a forma de organização e apresentação do relatório de pesquisa (SACCOL, 2009). Tais pressupostos, indicam como os objetos são concebidos e como são estabelecidas as relações entre o sujeito e os objetos, o que gera diferentes visões de mundo e, portanto, diferentes paradigmas de pesquisa (CROTTY, 1998; SACCOL, 2009). Um paradigma, então, informa o método de pesquisa que melhor se ajusta aos valores e intenções que subsidiam as ações do pesquisador (CROTTY, 1998).

A partir da exposto acima, concluímos que a deliberação sobre um paradigma de pesquisa não é um dado a priori, mas uma decorrência das concepções ontológica e epistemológica impressas nas escolhas teóricas que fundamentam a investigação. Desta forma, entrelaçamos a presente pesquisa ao interacionismo simbólico, por reconhecer alinhamentos entre este paradigma e a abordagem participacionista de Sfard (2008). Por exemplo, ambos postulam que a realidade é uma construção social e que os significados dos objetos – que também só existem enquanto construção social - se constituem nas trocas coletivas entre os

indivíduos. Além disso, esse paradigma idealiza que é nas trocas simbólicas realizadas pelos sujeitos que o pensamento e a inteligência se desenvolvem, processo no qual os significados são manipulados e modificados socialmente, possibilitando que as ações individuais e coletivas sejam reinterpretadas constantemente (CROTTY, 1998), o que também está de acordo com os pressupostos de Sfard (2008).

Do ponto de vista metodológico, trabalhar sob este paradigma implica que durante o processo de coleta de dados o pesquisador aceita os significados que os atores atribuem ao fenômeno em estudo da forma mais fiel possível. Entretanto, dada a sua natureza interpretativa, este paradigma possibilita ao pesquisador lançar um novo olhar sobre os dados coletados e erguer suas próprias interpretações e conclusões, re-significando o objeto de estudo (CROTTY, 1998).

Coerente com o paradigma escolhido, e acreditando que as três questões de pesquisa, apesar de independentes, possuem entrelaçamentos capazes de gerar novas compreensões acerca do discurso de limite, adotamos neste trabalho uma abordagem de pesquisa qualitativa, por esta abrigar estratégias de coleta e análise de dados mais adequadas aos nossos propósitos.

A pesquisa qualitativa estuda “um nível de realidade que não pode ser quantificado” (MINAYO, 2001, p. 21). Assim, o pesquisador qualitativo trabalha tentando capturar o universo de significados, motivos, crenças e valores do fenômeno em estudo, buscando compreender as relações e os processos que não podem ser reduzidos a variáveis, e portanto não podem ser operados quantitativamente (MINAYO, 2001). Isso significa que a pesquisa qualitativa é interpretativa, tendo o pesquisador a incumbência de interpretar os dados coletados para identificar temas ou categorias, e induzir conclusões e reinterpretações que possam indicar novas potencialidades para o fenômeno (CRESWELL, 2007).

Por sua natureza holística, a pesquisa qualitativa pode fazer uso de várias estratégias de produção e coleta de dados, o que “acrescenta rigor, abrangência, complexidade, riqueza e profundidade à investigação” (SANTOS, 2017, p.38), conferindo tanto uma visão ampla quanto aprofundada sobre o tema em estudo. Isso exige do pesquisador uma contínua reflexão sobre o seu papel na investigação, ao mesmo tempo que também representa honestidade, abertura para pesquisa e o reconhecimento de que toda investigação é carregada de subjetividade e valores (CRESWELL, 2007).

Após as considerações acima e a fim de atender aos objetivos da presente pesquisa, propomos a realização de três estudos diferentes, cada um relativo a um objetivo e demandando enfoques e fontes específicos, conforme discriminado na Figura 1.1 abaixo.

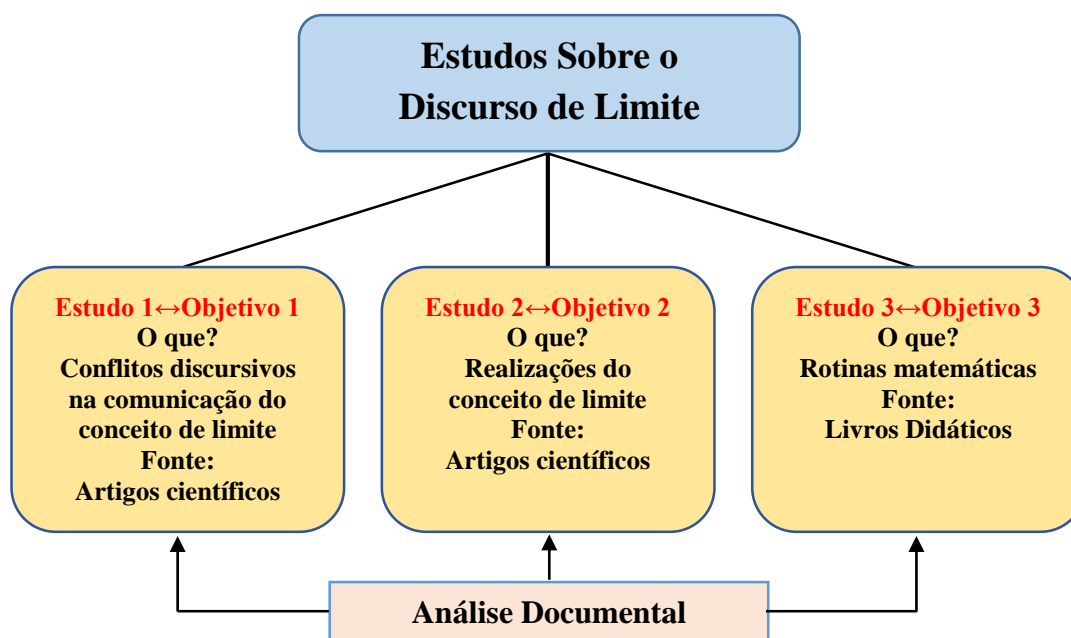


Figura 1.1 – Correlação entre os estudos, os objetivos e as fontes
Fonte: autores

Como sugerido nos enunciados dos objetivos e explicitado na Figura 1.1, utilizaremos nos três estudos indicados a mesma técnica de coleta de dados – a análise documental. Desta forma, apresentamos aqui uma breve caracterização desta técnica para, em seguida, descrever o caminho metodológico percorrido na condução dos referidos estudos.

A análise documental é uma técnica de pesquisa qualitativa que visa obter uma resposta específica a partir da análise de documentos (BAENA, 2017). Trata-se de um tipo de pesquisa em que os dados são extraídos de documentos cujo conteúdo ainda não recebeu tratamento analítico ou sistematizado, ou sobre os quais se pretende um reexame objetivando-se obter novos conhecimentos e interpretações sobre o objeto de estudo (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015). Por documento, entendemos qualquer registro da atividade humana que forme uma unidade coerente de informação e que possa servir de consulta, estudo ou prova (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015). Neste sentido, os documentos podem ser escritos ou não, o que inclui relatórios, livros, publicações periódicas, jornais, revistas, artigos científicos, diários, cartas, bem como gravações em áudio e vídeo, fotografias, etc. (BAENA PAZ, 2017).

No caso do nosso objeto de estudo, limite, existe uma grande variedade de produções disponíveis – livros, revistas, artigos, exames unificados, currículos, diários de classe, etc. – que nos habilita a tomar como documento aquelas que melhor se adequam aos nossos propósitos. Desta forma, para os estudos 1 e 2, optamos pela utilização de artigos científicos publicados na área de Educação Matemática que investigam os processos de ensino e aprendizagem deste conceito. Para o estudo 3, os livros didáticos da educação básica são os documentos de análise.

Tomamos, pois, estas fontes como documentos, a partir das quais nos debruçamos sobre os correspondentes dados, reinterpretando-os à luz do quadro teórico adotado - Sfard (2008) - e dos respectivos objetivos dos estudos 1, 2 e 3. Em qualquer dos casos, não estamos interessados nos resultados dos trabalhos dos quais estamos coletando os dados, mas somente nas informações (metáforas, exemplos, definições, expressões simbólicas, realizações, etc.) úteis aos propósitos de cada estudo. Salientamos, no entanto, que nos casos dos estudos 1 e 2, os artigos utilizados são concebido por nós como fontes de dados secundários, uma vez que estes dados foram coletados originalmente em outros contextos e para outros propósitos.

A seguir, apresentamos um breve resumo dos percursos metodológicos empreendidos na consecução de cada um dos estudos.

Estudo 1 – Este trabalho compreende as ações necessárias para atender ao Objetivo 1 e foi conduzido por meio de um estudo documental. Para tanto, foram selecionados 33 artigos de periódicos da área de ensino com escopo em Educação Matemática e classificação A1, A2, B1 ou B2 do sistema *Qualis* de avaliação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Tomamos como referência de busca o período de 2009 a 2018, e privilegiamos os artigos escritos em português, inglês ou espanhol.

Considerando a abordagem discursiva do nosso trabalho, os 33 artigos selecionados foram entendidos os como *participantes* do discurso sobre limite. Trata-se, portanto, de uma participação indireta, e seus dados, que foram originalmente coletados para outros propósitos, configuram-se aqui como dados secundários.

Sendo um conflito discursivo o encontro de interlocutores que usam uma mesma palavra ou símbolo de modos diferentes ou incompatíveis, concentramos a nossa atenção nos modos de utilização das *palavras* e *mediadores visuais* empregados no discurso de limite. Estas foram as unidades de análise consideradas neste estudo documental, as quais foram operadas por meio

das unidades de significados, *coloquial*, *operacional*⁶ e *objetivado* – para o uso de palavras –, e *verbais* e *icônicos* – para os mediadores visuais. O estudo foi conduzido visando a identificação de padrões de contradição na utilização de tais unidades e posterior organização dos achados em categorias representativas.

Estudo 2 – Para este estudo, usamos 27 artigos científicos como fonte para a coleta dos dados que compuseram a investigação. Como no estudo 1, o *corpus* de pesquisa foi montado com artigos de periódicos da área de Educação Matemática com classificação A1, A2, B1 ou B2 no estrato do sistema de avaliação de periódicos Qualis/CAPES, escritos em português, inglês ou espanhol e circunscritos ao período de 2010 a 2019. O exame do *corpus* foi conduzido combinando-se a análise documental com o estudo do conceito (EC) de Davis e Renert (2014), a fim de identificar realizações de limite para subsidiar o desenvolvimento de um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de limite.

Por *modelo teórico de matemática para o ensino* de um conceito matemático, entendemos uma “descrição sistemática, estruturada e rigorosa das formas de comunicar/realizar” (BARBOSA, 2017, p.6) o conceito no contexto de ensino. Este tipo de empreitada insere-se no campo de investigação focalizada em compreender quais saberes compõem o conhecimento matemático mobilizado pelos professores de matemática no processo de ensino. Ao contrário de outras abordagens, como a de Ball, Thames e Phelps (2008) que consideram o conhecimento matemático para o ensino passível de catalogação em domínios de especialização, aderimos neste trabalho à concepção de Davis e Renert (2014) de que tal conhecimento é tácito, emergente, evolutivo e adaptativo. Neste contexto, o conhecimento de matemática para o ensino compõem-se de um conjunto de saberes distribuído pelo corpo de professores, podendo ser compreendido e capturado somente quando ativado através do engajamento destes em atividades participativas de discussão em torno de um conceito matemático, as quais foram designadas por Davis e Renert (2014) de Estudo do Conceito (EC).

No nosso caso, utilizamos o Estudo do Conceito de Davis e Renert (2014) como suporte analítico para a construção do modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de limite.

Como proposto por Davis e Renert (2014), o estudo do conceito (EC) consiste em um modelo de investigação de conceitos matemáticos desenvolvido por meio de discussões coletivas com professores. O trabalho tem início a partir da discussão de uma questão

⁶ Relativo às ações, processos e algoritmos utilizados na determinação do limite.

orientadora sobre o conceito abordado, desdobrando-se daí, de maneira emergente, as *realizações* do conceito, as quais são organizadas, segundo critérios de similaridade discursiva, em *cenários*. O passo seguinte é identificar os possíveis *vínculos* entre as diferentes realizações de um mesmo cenário e entre estas e conceitos matemáticos relacionados que possam potencializar ou limitar a compreensão do conceito em discussão, seguindo-se à avaliação de eventuais *combinações* capazes de gerar de novas realizações.

A análise dos documentos deste estudo trouxe à tona distintos usos do conceito de limite, os quais possibilitaram a identificação de diferentes realizações de limite e subsidiaram a posterior catalogação em cenários.

O exame dos cenários, visando identificar vínculos, limitações e possíveis combinações entre realizações, produziu novos resultados e interpretações sobre o discurso de limite, possibilitando a construção do modelo teórico de matemática para o ensino de limite. O modelo teórico desenvolvido neste estudo, cria uma visão macro das principais realizações de limite e viabiliza novas compreensões sobre o conceito de limite que não seriam possíveis a partir da análise de algumas realizações individuais.

Estudo 3 – A fonte para a produção de dados deste estudo foram duas coleções de livros didáticos, uma do Ensino Fundamental e outra do Ensino Médio, os quais foram tratados como documentos e examinados por meio da técnica de Análise de Conteúdo. Como critério de seleção das coleções, avaliamos os itens *abordagem dos conteúdos, método de ensino, contextualização e interdisciplinaridade, e linguagem e qualidade das ilustrações*, os quais foram utilizados como base de julgamento para a elaboração dos PNLD's 2018 e 2020 – ensino médio e ensino fundamental respectivamente -, (BRASIL, 2017, 2019). Esse trabalho resultou na seleção das coleções, *Conexões com a Matemática*, obra coletiva desenvolvida pela editora Moderna e editada por Fábio Martins de Leonardo (LEONARDO, 2016a, 2016b, 2016c) para o Ensino Médio, e *A Conquista da Matemática*, de José Ruy Giovanni e Benedito Castrucci, publicado pela editora FTD (GIOVANNI JUNIOR; CASTRUCCI, 2018a, 2018b, 2018c, 2018d) para os anos finais do Ensino Fundamental.

A análise documental deste estudo, deu-se à luz da perspectiva da imaginação pedagógica proposta por Skovsmose (2015), a qual se insere no contexto de se estudar ‘o que não é, mas poderia ser’. Trata-se, pois, de extrapolar os dados coletados por meio da observação direta, e incluir a possibilidade de se imaginar o que *poderia* ter sido observado (SKOVSMOSE, 2015), transcendendo assim “o que foi observado de fato” (SKOVSMOSE, 2015, p. 66-67) e abrindo espaço para a proposição de alternativas plausíveis sobre o objeto de estudo.

As imaginações pedagógicas sobre limite elaboradas neste estudo, abrem espaço para a exploração desta noção no contexto da educação básica, possibilitando o estabelecimento de vínculos entre este nível de ensino e o ensino superior.

4. Estrutura da Tese

Com a crescente oferta de programas de pós graduação *stricto sensu* e *lato sensu*, a produção de trabalhos acadêmicos do tipo teses e dissertações recebeu nas últimas décadas um aumento considerável. Este fato acarreta grande dificuldade da comunidade científica em acompanhar as diversas contribuições nas respectivas áreas, tornando impossível a leitura de todos os trabalhos acadêmicos disponíveis (COSTA, 2014). Logo, a atenção dos pesquisadores tem-se voltado não para as teses e dissertações, mas para os seus resultados, geralmente publicados na forma de artigos em revistas periódicas. De fato, segundo um post publicado por NASSI-CALÒ na Revista Scielo em 24 de agosto de 2016, no qual a autora cita o editorial da revista *Nature* de 7 de julho de 2016, o número médio de pessoas que leem uma tese de doutorado completa é de 1,6, incluindo o autor. Como consequência disto, tem-se popularizado no meio acadêmico a organização de teses e dissertações no formato *multipaper*, justamente como meio de socialização e visibilidade da pesquisa.

Barbosa (2015) denomina tal estrutura de *coleção de artigos* e a categoriza como *formato insubordinado*, pois a mesma rompe com o padrão usual de texto monográfico, tradicionalmente organizado na forma de introdução, revisão de literatura, procedimentos metodológicos, desenvolvimento, resultados e conclusão. Para este autor, a modalidade *multipaper* oferece “ao mestrando ou doutorando uma socialização antecipada com o fazer que é próprio do trabalho do pesquisador” (BARBOSA, 2015; p. 353), além de possibilitar um refinamento antecipando dos resultados, uma vez que, ao submetê-los ao escrutínio de outros pesquisadores da área, eventuais falhas na condução da pesquisa podem ser identificadas e corrigidas (COSTA, 2014).

Barbosa (2015) destaca, também, que a adoção do formato *multipaper* na escrita de teses e dissertações, favorece a adaptação do mestrando/doutorando à comunidade científica, ao exigir deste a competência em tarefas próprias de pesquisadores, como a habilidade em selecionar artigos, preparar relatórios e produzir sínteses. Além disso, essa prática acaba por incorporar no estudante a disciplina no cumprimento de prazos, atenção às normas de escrita e o hábito de leitura, o que leva à erudição e autonomia intelectual (COSTA, 2014).

Do ponto de vista estrutural, uma tese no formato *multipaper* é constituída de uma introdução, na qual são apresentadas as questões de pesquisa, os objetivos e procedimentos metodológicos, certo número de artigos independentes elaborados com fins de publicação, e as considerações finais (COSTA, 2014; BARBOSA, 2015). Quantos aos artigos, por serem feitos visando a publicação, devem ter caráter de individualidade, possuindo também sua própria introdução, objetivo, revisão de literatura, métodos de pesquisa, resultados e considerações finais (COSTA, 2014; BARBOSA, 2015). Barbosa (2015), considera também a possibilidade de que as considerações finais sejam, elas mesmas, elaboradas na forma de um artigo que integre os resultados dos artigos anteriores, globalizando então os seus resultados e fornecendo novos *insights* sobre o objeto de estudo.

Desta forma, buscando responder às questões de pesquisa que compõem este macro projeto de investigação, esta tese está organizada no formato *multipaper* e consiste de cinco capítulos: Capítulo 1, esta introdução; Capítulos 2, 3 e 4, correspondentes aos artigos 1, 2 e 3; e o Capítulo 5, destinado às considerações finais.

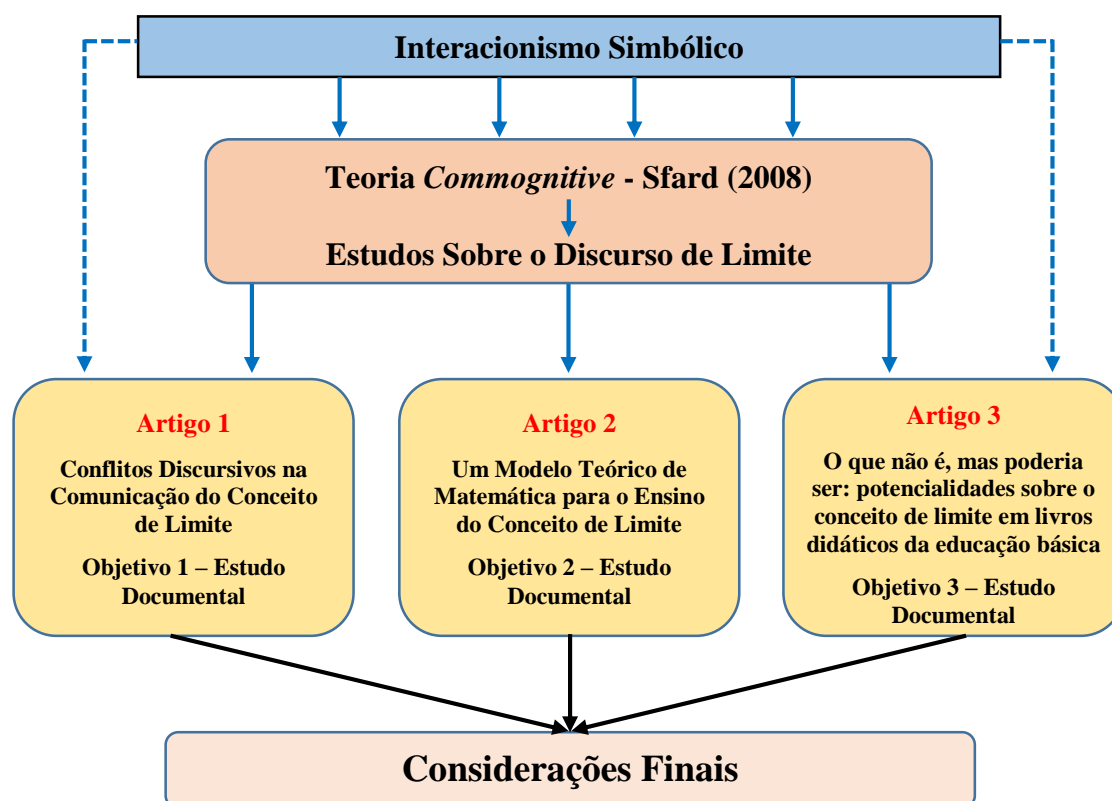


Figura 1.2 – Estrutura da Tese
Fonte: autores

Na Figura 1.2 acima, evidenciamos o paradigma de pesquisa, a base teórica, o percurso metodológico e a forma em que está organizada esta tese.

5. Justificativa

A presente pesquisa reflete a nossa vivência enquanto Coordenador do Curso de Licenciatura em Matemática do IFBA/Campus Eunápolis no período de 2013 a 2016, quando tivemos a oportunidade de acompanhar de perto a angústia dos alunos frente aos resultados negativos nas disciplinas da área de Cálculo Diferencial e Integral. Reflete também a nossa experiência enquanto docente da disciplina Cálculo I, na qual, diante do grande número de reprovações, tornou evidente a centralidade da noção de limite como componente desafiador para o sucesso nesta disciplina.

Neste sentido, pesquisar as dificuldades de compreensão do conceito de limite e seus desdobramentos na eficácia da aprendizagem, entender a relação entre os usos da palavra *limite* e a geração de conflitos na sua comunicação, identificar suas principais formas de representação, e estabelecer vínculos entre assuntos abordados em livros didáticos da educação básica e a noção de limite, pode contribuir nos esforços de enfrentamento dessas questões, visando a sua superação ou mitigação.

Especificamente sobre o conceito de limite, existe uma quantidade considerável de trabalhos de pesquisa abordando problemas relativos ao seu ensino e a sua aprendizagem. No entanto, a grande maioria deles busca explicações a partir de noções como *esquemas mentais* e *aquisição de conceitos*, noções fundantes de teorias cognitivistas, como a teoria da imagem conceitual e da definição do conceito de Tall e Vinner (1991) e a teoria APOS de Dubinsky (1996), entre outras, nas quais não são levados em conta os processos comunicacionais envolvidos no desenvolvimento da aprendizagem.

Como visto nas seções 1.2 e 1.3 desta Introdução, apesar do aumento no número de pesquisas incorporando abordagens comunicacionais na Educação Matemática em geral, existe uma lacuna na literatura no que diz respeito à utilização destas abordagens na investigação dos problemas de aprendizagem da noção de limite, o que justifica a importância deste trabalho.

Se concordamos que o pensamento é um ato de comunicação e a aprendizagem matemática é um processo participativo, estaremos “menos interessados em explicações baseadas em esquemas mentais não observáveis” (SFARD, 2001, p. 24) e mais preocupados com os padrões comunicacionais que se estabelecem entre o aprendiz e a comunidade matemática da qual participa. Isso implica reconhecer que muitos problemas de aprendizagem matemática são derivados de problemas comunicacionais (SFARD, 2008), o que justifica a pesquisa sobre os conflitos discursivos na comunicação do conceito de limite. De fato, os

conflitos discursivos derivam justamente da tentativa do iniciante obter acesso ao discurso matemático historicamente estabelecido (SFARD, 2008; IOANNOU, 2018) e, ao contrário de representar um obstáculo à aprendizagem, pode ser visto como uma janela para o novo discurso e uma oportunidade de aprendizagem (IOANNOU, 2018). Logo, conhecer os principais conflitos discursivos envolvidos na comunicação do conceito de limite, suas origens, seus vínculos e implicações para a aprendizagem, possibilita que os professores de Cálculo, ao prepararem as suas aulas e atividades instrucionais se antecipem a esse problema, criando estratégias para contorná-los ou utilizá-los a favor da aprendizagem.

Igualmente importante, é o entendimento de como o discurso matemático é produzido para fins de ensino. Tal empreendimento faz parte da agenda de pesquisa em Educação Matemática sobre o conhecimento matemático para o ensino, e consiste em investigar quais saberes gerais e específicos são necessários para o exercício da docência matemática (BALL; THAMES; PHELP, 2008; DAVIS; RENERT, 2014).

Para Davis e Renert (2014), o conhecimento matemático para o ensino é uma complexa “rede de associações bem estabelecidas e automatizadas” (DAVIS, 2012 p.2, tradução nossa) que envolve o domínio de conceitos matemáticos, familiaridade com variadas realizações de conceitos, conhecimento dos processos envolvidos na produção matemática, experiências de ensino, etc., que habilitam o professor a escolher o procedimento que melhor se ajusta a uma situação inesperada que ocorre durante o ensino (DAVIS, 2012).

Esses autores concebem, também, que o conhecimento matemático dos professores tem uma dimensão participativa, e que o mesmo evolui constantemente por meio das ações de ensino, sendo os professores co-produtores desse conhecimento (DAVIS; RENERT, 2009).

Neste sentido, é razoável conceber que o conhecimento matemático para o ensino de limite também evolua, trazendo impactos nas formas de realizar o conceito de limite e implicações sobre a qualidade do endosso das narrativas empregadas na descrição do objeto limite. Além disso, do ponto de vista da aprendizagem, pode-se avaliar o desempenho de um aprendiz no discurso sobre um conceito matemático, analisando-se “*a riqueza, a profundidade e a estabilidade inter-situacional*” (SFARD, 2008, p. 166, tradução nossa) de suas realizações.

Assim, conhecer a diversidade de realizações do conceito de limite permite demarcar o conhecimento matemático necessário para o seu ensino, o que pode ser facilitado por meio do modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de limite proposto no Estudo 2.

Quanto ao terceiro estudo, sua efetivação é justificada pela centralidade que o livro didático de matemática desempenha na educação básica (RAMILLARD; HECK, 2014). De fato, além de funcionar como o principal instrumento de promoção do currículo oficial, o livro didático é também a principal fonte de acesso do estudante ao conteúdo matemático, através do qual ele pode estudar as matérias, resolver exercícios e problemas (PEPIN et al., 2013) e conhecer as palavras e mediadores matemáticos, familiarizando-se com as rotinas e processos específicos do discurso matemático.

Além disso, o livro didático cumpre ainda a função de recontextualizar a matemática acadêmica para as necessidades escolares (GENE et al., 2018), ao realizar adequações de linguagem sobre os assuntos, estruturar as matérias em níveis e séries de ensino e propor tarefas de aprendizagens adequadas aos objetivos da educação básica (O'KEEFFE, 2013). Também cumpre papel importante junto a professor, servindo como fonte de modelagem para a prática docente em sala de aula, e como material de desenvolvimento do conhecimento pedagógico e matemático (GENE et al., 2018).

Desta forma, investigar o livro didático da educação básica permite-nos entrar em contato com realizações de diversos conceitos, possibilitando, então, a identificação de rotinas com potencial para serem utilizadas como meios para introduzir a noção de limite neste nível de ensino.

Em conjunto, estes três estudos apresentam uma visão macro sobre os processos discursivos envolvendo o conceito de limite, podendo contribuir nos campos da produção científica, na formação de professores e na produção de materiais de instrução voltados ao ensino de limite.

6. REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. In: D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (org.). *Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática*. Campinas, SP. Mercado de Letras, p. 347-367, 2015.

BARBOSA, J. C. Uma abordagem discursiva para a matemática para o ensino. In: VIII CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, p. 59-67, 2017.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, Michigan, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

- CORNU, Bernard. Limits. In: Advanced mathematical thinking. Springer, Dordrecht, p. 153-166, 1991.
- COTRILL, Jim et al. Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. The Journal of Mathematical Behavior, v. 15, p. 167-192, 1996.
- COSTA, W. N. Dissertações e Teses *Multipaper*: Uma Breve Revisão Bibliográfica, 2014. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3086> (acesso 29/06/2021).
- CRESWELL, John W. Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução Luciana de Oliveira da Rocha. - 2. ed. - Porto Alegre: Artmed, 2007.
- CROTTY, M. The Foundations of Social Research: meaning and perspective in the research process. Thousand Oaks: Sage. 1998.
- DAVIS, Brent. Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. 2012. p. 8-15.
- DAVIS, R. B.; VINNER, S. The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. Journal of Mathematical Behaviour, vol.5, n. 3, p. 281-303, 1986.
- DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematics-for-teaching as shared dynamic participation. For the learning of mathematics, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.
- DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. The Math Teachers Know: profound understanding of emergent mathematics. NY: Routledge, 2014.
- DE MORAES, Mônica S. F., MENDES, Maria J. F. Obstáculos Epistemológicos Relativos ao Conceito de Limite de Função. XII Encontro Nacional de Educação Matemática -SBEM, 2016.
- FONSECA, Vilmar; HENRIQUES, Ana. Compreensão da Definição Formal de Limite: um estudo na formação inicial de professores de Matemática. Bolema, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 1030-1049, dez. 2018.
- GENE, Konstantina; ZACHAROS, Konstantinos; LAVIDAS, Konstantinos; KOUSTOURAKIS, Gerasimos. An Analysis of School Mathematics Textbooks in Terms of Their Pedagogical Orientation. Open Journal for Educational Research, v. 2, n. 1, p. 1-18, 2018.
- GÓMEZ, Olmar Arley. Um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Variável. 2017. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e da Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador - BA.
- GÜÇLER, Beste. Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. Educational Studies in Mathematics, v. 82, n. 3, p. 439-453, 2013.

GÜÇLER, Beste. The role of symbols in mathematical communication: the case of the limit notation. *Research in Mathematics Education*, v. 16, n. 3, p. 251-268, 2014.

IOANNOU, Marios. Commognitive analysis of undergraduate mathematics students' first encounter with the subgroup test. *Mathematics Education Research Journal*, v. 30, n. 2, p. 117-142, 2018.

KIDRON, Ivy; TALL, David. The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, v. 88, n. 2, p. 183-199, 2015.

KIM, Dong-Joong; KANG, Hyangim; LEE, Hyun-Joo. Two different epistemologies about limit concepts. *International Education Studies*, v. 8, n. 3, p. 138, 2015.

KIM, Dong-Joong; LIM, Woong. The Relative Interdependency of Colloquial and Mathematical Discourses Regarding the Notion and Calculations of Limit: an Evidence-Based Cross-Cultural Study. *International Journal of Science and Mathematics Education*, v. 16, n. 8, p. 1561-1579, 2018.

KRIPKA, Rosana Maria Luvezute; SCHELLER, Morgana; BONOTTO, Danusa de Lara. Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização. *Revista de Investigaciones UNAD*, v. 14, n. 2, p. 55-73, 2015.

KUMSA, Abraham; PETTERSSON, Kerstin; ANDREWS, Paul. Obstacles to students' understanding of the limit concept. In: 10th Congress of European Research in Mathematics Education. *cerme10.org*. 2017.

LUVEZUTE, R. M.; SCHELLER, M.; DE LARA, D. La investigación documental sobre la investigación cualitativa: conceptos y caracterización. *Revista de Investigaciones UNAD*, V. 14, N. 2, p. 55-73, 2016.

MESSIAS, M. A.; BRANDEMBERG, J. C. Um estudo exploratório sobre evocações de estudantes universitários acerca do conceito de limite de uma função. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 9, n. 1, p. 191-209, 2014.

MESSIAS, M. A., BRANDEMBERG, J. C. Discussões sobre a Relação entre Limite e Continuidade de uma Função: investigando Imagens Conceituais. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p.1224-1241, dez. 2015.

MESSIAS, M. A., BRANDEMBERG, J. C. Compreensões de Estudantes Sobre o Conceito de Limite: um estudo de caso. *Educação Matemática em Revista*, n. 59, p.6-23, Setembro, 2018.

MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.). *Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade*. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

NAGLE, Courtney. Transitioning from introductory calculus to formal limit conceptions. *For the Learning of Mathematics*, v. 33, n. 2, p. 2-10, 2013.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: FROTA, M.C.R.; NASSER, L (Orgs.). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009, p. 43-58.

NASSI-CALÒ, L. Teses e dissertações: prós e contras dos formatos tradicional e alternativo [online]. SciELO em Perspectiva, 2016 [viewed 06 February 2018]. Available from: <http://blog.scielo.org/blog/2016/08/24/teses-e-dissertacoes-pros-e-contras-dos-formatos-tradicional-e-alternativo/>

OKEEFFE, Lisa. A framework for textbook analysis. International Review of Contemporary Learning Research, v. 2, n. 1, p.1-13, 2013.

PARK, Jungeun. Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. Educational Studies in Mathematics, v. 91, n. 3, p. 395-421, 2016.

PEPIN, Birgit; GUEUDET, Ghislaine; TROUCHE, Luc. Investigating textbooks as crucial interfaces between culture, policy and teacher curricular practice: two contrasted case studies in France and Norway. ZDM, v. 45, n. 5, p. 685-698, 2013.

REMILLARD, Janine T.; HECK, Daniel J. Conceptualizing the curriculum enactment process in mathematics education. ZDM, v. 46, n. 5, p. 705-718, 2014.

RAMOS, A., FARIA, P. M., FARIA, A. Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação. Rev. Diálogo Educ., Curitiba, v. 14, n. 41, p. 17-36, jan./abr. 2014.

ROH, Kyeong Hah. An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε -strip activity. Educational Studies in Mathematics, v. 73, n. 3, p. 263-279, 2010.

SACCOL, Amarolinda Zanela. Um retorno ao básico: compreendendo os paradigmas de pesquisa e sua aplicação na pesquisa em administração. **Revista de Administração da UFSM**, v. 2, n. 2, p. 250-269, 2009.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez. Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. 2017. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da Universidade Federal da Bahia e da Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador - BA.

SIERPIŃSKA, Anna. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational studies in Mathematics, v. 18, n. 4, p. 371-397, 1987.

SFARD, Anna. On Two Metaphors for Learning and the Dangers of Choosing Just One Educational Researcher .First Published March 1, vol 27, n. 2, p. 4-13, 1998.

SFARD, Anna. There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics*, v. 46, n. 1, p. 13-57, 2001.

SFARD, A. *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. P. 352. Series editor EMERITUS.

SFARD, A. On the need for theory of mathematics learning and the promise of "Commognition". 13th International Congress on Mathematical Education Hamburg, 24-31 July 2016

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, v. 12, n. 2, p. 151-169, 1981.

TALL, David. Students' difficulties in calculus. In: proceedings of working group. ICME, p. 13-28, 1992.

VIIRMAN, Olov. The functions of function discourse—university mathematics teaching from a commognitive standpoint. **International journal of mathematical education in science and technology**, v. 45, n. 4, p. 512-527, 2014.

ZUCHI, I. A. *Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional*. Florianópolis, UFSC, 2005.

WILLIAMS, Steven R. Predications of the limit concept: An application of repertory grids. *Journal for research in mathematics education*, p. 341-367, 2001.

CAPÍTULO 2

Artigo 1

Neste artigo, desenvolvemos um estudo documental sobre os conflitos discursivos que se manifestam na comunicação do conceito de limite, tanto no contexto do seu ensino quanto no contexto da sua aprendizagem. Para tanto, utilizamos a teoria discursiva de Anna Sfard com a qual analisamos 33 artigos relativos ao período de 2009 a 2018, selecionados em periódicos da área de Educação Matemática. Os achados indicam a existência dos seguintes conflitos discursivos: o conflito do limite como aproximação; o conflito processo-objeto do limite; o conflito do limite como o valor da função; o conflito da dualidade do símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$; e o conflito da inversibilidade dos discursos *x para y* e *y para x* da definição formal de limite.

CAPÍTULO 3

Artigo 2

No presente artigo, desenvolvemos um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de limite. Para a sua elaboração, utilizamos a teoria discursiva de A. Sfard e a noção de Estudo do Conceito. Os dados foram obtidos a partir da análise de 27 artigos que investigam problemas referentes ao ensino e a aprendizagem da noção de limite, publicados em periódicos da área de Educação Matemática e selecionados com base no sistema de classificação de periódicos Qualis/Capes. Como método de análise dos dados utilizou-se o estudo documental. O modelo, construído a partir das realizações da noção de limite, foi estruturado em quatro cenários: limite como aproximação; limite como modelo para investigar o infinito; limite como taxa de variação instantânea; e limite como objeto matemático formal. Os achados evidenciam o quão variadas são as realizações do conceito de limite e como o conhecimento/desconhecimento destas, por parte do professor, pode impactar a qualidade da aprendizagem estudantil, uma vez que o sucesso desta está diretamente ligado à habilidade do estudante em transitar entre as diferentes realizações do referido conceito.

CAPÍTULO 4

Artigo 3

No presente trabalho, foram examinadas duas coleções de livros didáticos de matemática utilizadas na educação básica brasileira, uma relativa ao ensino fundamental e outra ao ensino médio. O foco foi identificar, nestes livros, rotinas matemáticas potencialmente úteis para a exploração da noção de limite neste seguimento de ensino. Para tanto, utilizamos a teoria discursiva de Anna Sfard e combinamos o método de estudo documental com a noção de imaginação pedagógica de Skovsmose, a fim de coletar, analisar e desenvolver imaginações pedagógicas envolvendo a noção de limite a partir das rotinas selecionadas. A análise identificou dez rotinas potenciais, as quais foram organizadas nas categorias *limite aritmético*, *limite algébrico* e *limite geométrico*, com base nas quais foram desenvolvidas três imaginações pedagógicas, uma de cada categoria.

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

Diferente de outros trabalhos em que a pesquisa é conduzida em função de um objetivo geral, neste trabalho foi desenvolvido um macro projeto de pesquisa em torno de três objetivos independentes envolvendo o discurso de limite. Portanto, não é nossa intenção, neste capítulo final, globalizar os resultados obtidos nos estudos produzidos, mas sumarizar os principais achados, destacando eventuais aproximações e afastamentos que caracterizam possíveis relações entre eles. Ao final, tecemos considerações sobre as contribuições deste trabalho, suas limitações e campos de estudos em aberto.

1. Discussão

Neste trabalho, empregamos a abordagem comunicacional de Sfard (2008) para estudar o discurso de limite a partir de três perspectivas: a perspectiva dos conflitos discursivos envolvidos na sua comunicação; a perspectiva de suas realizações; e a perspectiva das rotinas matemáticas em livros da educação básica que podem ser utilizadas para explorar a noção de limite. Para efeitos metodológicos e operacionais, cada uma destas perspectivas gerou um objetivo, cada um deles corporificando-se na forma de um estudo. A seguir, discutimos os resultados de cada um desses estudos.

O primeiro destes estudos – Artigo 1 – examinou os usos de palavras e mediadores visuais na comunicação do conceito de limite e o impacto destes usos na geração de conflitos discursivos. A análise revelou a existência de duas principais fontes geradoras de conflitos, as concepções oriundas dos usos cotidianos da palavra *limite*, e as concepções dinâmicas/processuais causadas por expressões e mediadores visuais que transmitem ideias de movimento, tais como as expressões, “quando x tende a a , $f(x)$ tende a L , ou “ $f(x)$ se aproxima de L , quando x se aproxima de a ”, e seus correlatos mediados pelo símbolo \rightarrow (*tende a*): “se $x \rightarrow a$, $f(x) \rightarrow L$ ” e “ $f(x) \rightarrow L$ quando $x \rightarrow a$ ”.

Além do mediador icônico \rightarrow , outra fonte geradora de conflitos discursivos envolvendo limite são os mediadores tabelares e gráficos, os primeiros devido à natureza discreta com que são desenvolvidas as rotinas de aproximação ao limite, as quais transmitem a ideia de que o

limite nunca é alcançado, e os últimos por conta de abordagens inadequadas quando da presença de ‘saltos’ ou ‘buracos’ no gráfico no ponto de avaliação do limite, levando à ideia de que somente funções contínuas tem limite.

As concepções de limite discutidas acima, são as bases para o *conflito do limite como aproximação*, o *conflito processo-objeto do limite* e o *conflito do limite como o valor da função*.

Outros dois conflitos identificados são: o *conflito da dualidade processo-objeto do símbolo* $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e o *conflito da inversibilidade dos discursos x para y e y para x* . No primeiro caso, o conflito deriva do fato de o mediador simbólico $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ trazer embutida as ideias de *processo* e *objeto* do conceito de limite (GÜÇLER, 2014; FERNÁNDEZ-PLAZA; SIMPSON, 2016). Processo, devido à presença do mediador $x \rightarrow a$ (x tende a a) no primeiro membro da igualdade, transmitindo as ideias de movimento, aproximação e inalcançabilidade do limite; e objeto, em virtude do número L no segundo membro da igualdade, o qual designa o limite da função, ou seja, o objeto limite (FERNÁNDEZ-PLAZA; SIMPSON, 2016).

Já o *conflito da inversibilidade dos discursos x para y e y para x* , é uma consequência de que, enquanto no processo de determinação de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ opera-se atribuindo-se a x valores próximos do ponto a e verificando-se os correspondentes valores de $y = f(x)$, nas rotinas de validação do limite, opera-se no sentido inverso, isto é, a partir de uma diferença especificada entre $f(x)$ e L ($|f(x) - L| = \varepsilon$), deve-se mostrar que existe δ tal que $|x - a| < \delta$. Ou seja, na determinação do limite, opera-se de x para y , enquanto na validação opera-se no sentido inverso, y para x (SWINYARD; LARSEN, 2012).

No segundo estudo – Artigo 2 -, foi construído um modelo teórico de Matemática para o Ensino - MpE do conceito de limite, a partir de realizações documentadas em artigos da área de Educação Matemática. Para a sua elaboração, utilizamos o quadro analítico do Estudo do Conceito de Davis e Renert (2014) em conjunto com a estrutura de análise discursiva de Sfard (2008).

O modelo produzido está estruturado em quatro cenários - *limite como aproximação*; *limite como modelo para investigar o infinito*; *limite como taxa de variação instantânea*; e *limite como objeto matemático formal* - os quais foram organizados levando-se em conta a natureza das realizações, as palavras, as rotinas, os mediadores visuais e as narrativas utilizadas, características que demarcam um conjunto realizações do conceito de limite. O modelo também inclui a ênfase *vínculos*, a qual explicita as possíveis associações e implicações lógicas que

podem potencializar ou limitar a compreensão de conceitos matemáticos relacionados às diferentes realizações de um mesmo cenário.

Santos (2017), considera que uma das vantagens de um modelo de Matemática para o Ensino, é a disponibilização de visões macro e micro das realizações do conceito estudado. No nosso caso, é possível apreciar as visões macro e micro a partir da árvore de realizações do conceito de limite desenvolvida com base no modelo criado, exibida na Figura 7 (pág 93 desta tese). A visão macro é representada pela própria árvore, que expressa o modelo como um todo, enquanto a visão micro se revela quando se observa as ramificações que partem de uma dada realização, indicando a geração de novas realizações. Isso mostra a profundidade e as conexões das realizações observadas, evidenciando a qualidade do modelo.

Como um vínculo entre este estudo e o Estudo 1, destacamos o fato de que nos três primeiros cenários do modelo de MpE aqui desenvolvido, predominam as realizações apoiadas em rotinas baseadas em aproximações discretas de limite, enquanto no último cenário estão as realizações mediadas algebricamente pelo símbolo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Essa hegemonia de realizações baseadas em aproximações discretas, talvez explique a frequente ocorrência de conflitos discursivos associadas à visão dinâmica/processual de limite que se observa na comunicação desse conceito, em comparação com os outros tipos de conflitos.

No terceiro estudo desta tese, foram desenvolvidas três imaginações pedagógicas (SKOVSMOSE, 2015) a partir de rotinas matemáticas selecionadas em livros didáticos da educação básica, visando viabilizar a exploração da noção de limite nos contextos dos ensino fundamental e médio.

Tal iniciativa encora-se no reconhecimento da centralidade do livro didático de matemática como o principal meio de implementação do currículo escolar e como dispositivo preferencial de alunos e professores na consulta ao conteúdo matemático. Neste sentido, as imaginações pedagógicas tomaram lugar a partir rotinas matemáticas envolvendo ideias associadas à noção de limite, como aproximação e infinito, e foram conduzidas visando criar uma ponte entre a forma como estas noções são abordadas na matemática básica e a forma rigorosa como as mesmas são conceituadas no contexto da matemática superior, pleiteando, assim, corrigir as concepções confusas e conflituosas desenvolvidas pelos estudantes em suas primeiras experiências com a noção de limite, como apontadas por Lovric (2012), Park (2016) e Kajander e Lovric (2017), entre outros.

Desta forma, as três imaginações pedagógicas construídas sobre a noção de limite, denominadas *limite aritmético*, *limite algébrico* e *limite geométrico*, foram elaboradas visando abarcar as principais realizações do conceito de limite ao incorporar narrativas matemáticas envolvendo processos aritméticos, algébricos e geométricos. Além disso, em maior ou menor grau, elas foram concebidas de modo a evidenciar os aspectos processuais que conduzem ao limite, separando- do seu resultado final, isto é, o objeto limite propriamente dito, seja ele representado por um número, uma expressão algébrica ou uma fórmula da geometria plana.

Para Sfard (2008), a construção de um conceito matemático consiste em um conjunto intrincado de ações, processos, algoritmos, etc., materializados por meio de variadas representações (*realizações*) utilizadas no endosso de narrativas envolvendo o conceito em estudo, as quais, quando tomadas em totalidade, possibilitam que o conceito possa ser concebido como um objeto matemático cuja existência independe de discursos individuais. A objetivação é, portanto, a finalidade das construções matemáticas.

2. Limitações

Como limitações deste trabalho, devemos destacar que as realizações utilizadas na construção do modelo de Matemática para o Ensino do conceito de limite, aqui apresentado, não abarcam uma lista completa das realizações deste conceito, seja pelas limitações de tempo, seja pela impossibilidade de acessar todas as publicações disponíveis sobre o ensino e aprendizagem de limite. Além disso, como um processo comunicacional, novas realizações são geradas constantemente, tanto como sub produto de realização já existentes, quanto como criação genuína dos membros da comunidade discursiva de limite, o que torna impossível capturar TODAS as realizações. Esse trabalho será sempre incompleto, o que implica que toda MpE de um conceito matemático é um retrato de um contexto demarcado no tempo e nas fontes consultadas.

Igualmente limitada, é a nossa categorização dos conflitos discursivos na comunicação do conceito de limite, pois além das restrições próprias de qualquer pesquisa – tempo, seleção de fontes, método de coleta de dados, etc -, devemos considerar que enquanto fenômeno comunicacional, os conflitos discursivos são dinâmicos e novos conflitos discursivos são gerados frequentemente, sendo impossível capturar todos eles.

Quanto às imaginações pedagógicas, as mesmas estão circunscritas às idiossincrasias pedagógicas e metodológicas dos seis autores, expressando suas visões sobre o que é a matemática, como se desenvolve e como a mesma deve ser ensinada. Assim, outros autores, partindo de outras rotinas, certamente desenvolverão outras imaginações pedagógicas acerca da noção de limite.

3. Contribuições

Apresentamos aqui algumas contribuições desta pesquisa. Para o campo científico, destacamos: (a) apresentação, em um único trabalho, de três estudos envolvendo aspectos diferentes sobre o discurso de limite, ampliando o uso de abordagens comunicacionais na pesquisa em Educação Matemática; (b) identificação e categorização dos principais conflitos que ocorrem na comunicação do conceito de limite, aumentando a compreensão que se tem sobre este tema; (c) organização sistemática, em um modelo teórico de Matemática para o Ensino, das principais realizações do conceito de limite, suas ramificações e vínculos.

Para o campo da formação inicial e continuada de professores, acreditamos que este trabalho possa propiciar reflexões sobre os problemas da comunicação em sala de aula, subsidiar as realizações do conceito de limite e servir de expiração na preparação das atividades escolares. Esperamos também, que o mesmo possa influenciar as escolhas dos editores e autores de livros didáticos da educação básica e superior na criação de atividades instrucionais.

4. REFERÊNCIAS

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. *The Math Teachers Know: profound understanding of emergente mathematics*. NY: Routledge, 2014.

GÜÇLER, Beste. The role of symbols in mathematical communication: the case of the limit notation. *Research in Mathematics Education*, v. 16, n. 3, p. 251-268, 2014.

FERNÁNDEZ-PLAZA, José Antonio; SIMPSON, Adrian. Three concepts or one? Students' understanding of basic limit concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 93, n. 3, p. 315-332, 2016.

KAJANDER, Ann; LOVRIC, Miroslav. Understanding and supporting teacher horizon knowledge around limits: a framework for evaluating textbooks for teachers. **International**

Journal of Mathematical Education in Science and Technology, v. 48, n. 7, p. 1023-1042, 2017.

LOVRIC, M. Collaboration between research in mathematics education and teaching mathematics: Case study of teaching infinity in calculus. In: Proceedings of the 2012 annual meeting of the Canadian mathematics education study group. Université Laval, p. 139-146, 2012.

PARK, Jungeun. Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. *Educational Studies in Mathematics*, v. 91, n. 3, p. 395-421, 2016.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez. Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, Universidade Federal da Bahia/Universidade Estadual de Feira de Santana. Salvador, 2017, p.165.

SFARD, Anna. Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. P. 352. Series editor EMERITUS.

SWINYARD, Craig; LARSEN. Sean Coming to Understand the Formal Definition of Limit: Insights Gained From Engaging Students in Reinvention Author(s). *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 43, n. 4, p. 465-493, 2012.