UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO, FILOSOFIA E HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS

OLMAR GÓMEZ

UM MODELO TEÓRICO DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL

SALVADOR
2017

OLMAR GÓMEZ

UM MODELO TEÓRICO DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia e da Universidade Estadual de Feira de Santana, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências, sob orientação do Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa.

SALVADOR – BA
2017

FICHA CATALOGRÁFICA FORNECIDO PELO SISTEMA UNIVERSITÁRIO DE BIBLIOTECAS (SIBI/UFBA) COM OS DADOS FORNECIDOS PELO AUTOR AUTOR

Gómez, Olmar Arley
Um modelo teórico da Matemática para o Ensino do conceito de variável / Olmar Arley Gómez. -- Salvador, 2017.
161 f. : il

Orientador: Jonei Cerqueira Barbosa.
Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências) -- Universidade Federal da Bahia, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, 2017.

1. Discurso. 2. Variável. 3. Realização. 4. Conceito. 5. Matemática para o Ensino. I. Cerqueira Barbosa, Jonei. II. Título.

OLMAR GÓMEZ

UM MODELO TEÓRICO DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências, na área de concentração Ensino de Ciências e Formação de Professores, Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, pela seguinte banca examinadora:

____

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa (orientador)

Universidade Federal da Bahia

____

Profa. Dra. Andreia Maria Pereira de Oliveira

Universidade Federal da Bahia

____

Profa. Dra. Rosiléia Oliveira de Almeida

Universidade Federal da Bahia

____

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo

Universidade Federal do Rio de Janeiro

____

Prof. Dr. Jhony Alexánder Villa Ochoa

Universidad de Antioquia

Este trabalho é dedicado à memória da minha avó Tulia Rosa Rivera de Gómez, que certamente se orgulharia muito pelas minhas conquistas, se ainda estivesse entre nós... eternas saudades.

AGRADECIMENTOS

São muitas as pessoas que contribuíram para a finalização desta tese. A todos elas ofereço um enorme agradecimento e espero retornar o carinho recebido nos últimos quatro anos.

Um agradecimento especial a minha família, principalmente a minha mãe Ligia Gómez Rivera. Todas as suas preocupações e cuidados, ainda na distância, me fizeram mais forte. Foi um suporte importante durante todo o processo do doutorado.

Também agradeço a minha irmã Georgina, à minha sobrinha Johanna e a minha tia Lucelly. Suas ligações e mensagens de carinho e de ânimo eram uma dose de energia e positivismo.

A Tércio Matos, um companheiro, um amigo, um apoio muito grande nesta grande conquista pessoal. Senti seu carinho todos os dias. Muito obrigado pela paciência nas múltiplas leituras e correções do português nos meus textos. Todas as sugestões e correções foram recebidas com muito carinho e respeito.

Um agradecimento aos meus amigos de Salvador, Victoria Flório, Luana Poliseli, Boris Guzmán, Laia González, Laura Chaparro, Rocío Seco, Giulia Pegna, Elizeu Pinheiro, Priscila Felipe, Luis Solano. Muito obrigado a Luana Poliseli por sua companhia nas belas noites desta linda cidade, e a Victoria Florio, pelas nossas conversas acerca das paixões e desamores da vida. Nossos cafés traziam as levezas necessárias nos dias de cansaço. A todos vocês amigos, sua alegria, seus convites e a sua companhia foram uma força vital muito importante que me revitalizou.

Agradeço aos meus amigos de Medellín, especialmente a Jhon Londoño e Jhonny Morales, pela presença permanente. Por me acompanhar e resolver tantos problemas na minha cidade. Vocês também foram parte importante de tudo o que aconteceu nestes últimos quatro anos. Muito amor para vocês.

Um agradecimento especial também para o meu orientador Jonei Barbosa, pela sua paciência. Muito obrigado Jonei por ter confiado em mim, por me fazer sentir que conseguiria levar esta tese adiante. Me sinto supremamente honrado e orgulhoso de ter pertencido ao grupo de pesquisa, por ter sido o seu orientando. Foi um grande privilegio.

Agradeço a todos os colegas do Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática (ENCIMA) pelo acompanhamento: Graça Dominguez, Ana Virginia Luna, Flávia Cristina Macedo, Jamille Villas Boas, Jaqueline Grilo, Jean Lázaro Coutinho, Maria Raquel Queiroz, Paulo Diniz, Roberta Bortoloti, Thaine Souza Santana, Analdinho Silva Filho, Ilvanete de Souza. Agradeço a todos pelos comentários às diferentes versões preliminares dos capítulos desta tese e pela companhia durante este processo.

Às professoras Andreia de Oliveira e Rosiléia Almeida, e aos professores Johnny Alexander Villa, Victor Giraldo, Luis Márcio pelos comentários e sugestões feitas no exame de qualificação e\ou de defesa. Muito obrigado pela leitura cuidadosa da tese.

Muito obrigado à Universidad Católica de Colombia, por ter aberto suas portas para desenvolver o curso com os professores nas suas instalações. Especialmente a Freddy Garay, por ter feito todas as gestões necessárias para que o estudo empírico que desenvolvi na universidade fosse bem sucedido.

Muito obrigado aos professores que participaram do curso empírico desenvolvido na cidade de Bogotá: José Israel Hernández, Ana Mercedes Márquez, Rubén Castañeda, Adrián Velasco, Lorenzo Zubieta, Nidia Castro, Ángela Jiménez, Marce e María Isabel González. Todos foram muito amáveis em ter assistido a todo o curso e ter permitido e disponibilizado os registros das classes para o desenvolvimento de minha pesquisa.

Também agradeço ao Programa de Alianças para a Educação e Capacitação (PAEC) da Organização dos Estados Americanos (OEA), o Grupo Coimbra de Universidades Brasileiras (GCUB), a Divisão de Temas Educativos do Ministério de Relações Exteriores do Brasil e à Organização Pan-americana da Saúde (OPS/OMS). A todas estas instituições muito obrigado por ter me aceitado na sua chamada de bolsas na sua segunda edição no ano 2013.

Agradeço a Secretaría de Educación de Medellin pelas licenças do meu trabalho obtidas no transcurso destes quatro anos.

Agradeço a Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) do Ministério da Educação e Cultura do Brasil (MEC), pelo apoio financeiro para desenvolver esta pesquisa.

Obrigado aos funcionários da secretaria do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (PPEFHC) pela atenção as solicitações feitas: Lucia Helena dos Santos, Marli Cabral, Marcos Paulo Silva, Priscila Mikulski, João Paulo Lyra.

A todos vocês, muito obrigado.

“[The Mathematics] can be compared to Heraclitus’s famous river: Although always in motion and unlikely to be the same the next time you step into them, they preserve their identities through the continuous transformations”.

Sfard (2008, p. 131)

RESUMO

O foco desta pesquisa foi a construção de um modelo teórico da *Matemática para o Ensino* ($\boldsymbol{M_pE}$) do conceito de variável. Trata-se de uma estrutura que apresenta teoricamente as formas como o conceito é – pode ser – comunicado nas atividades de sala de aula, descrevendo os diferentes olhares e argumentações ao respeito do seu ensino. O formato da apresentação desta tese é uma coleção de artigos, sendo que o primeiro deles analisa o conceito de variável a partir de suas *realizações* documentadas em artigos científicos, e a estratégia metodológica utilizada para sintetizar os dados foi uma análise documental. O segundo artigo apresenta um modelo teórico da *Matemática para o Ensino* do conceito de variável a partir das diretrizes curriculares da matemática, tanto do Brasil como da Colômbia, capturando as diferentes realizações da variável apresentadas nesses documentos. O terceiro artigo desta tese consiste na apresentação de um modelo teórico da *Matemática para o Ensino* do conceito de variável a partir de um estudo com professores, para analisar a variabilidade de realizações do conceito nas suas experiências em sala de aula. Finalmente, apresentamos um modelo teórico da Matemática para o Ensino do conceito de variável a partir das fontes utilizadas nos três primeiros artigos, constituindo-se em um quarto artigo. Nos resultados, estruturamos sete cenários em que a variável aparece: no primeiro cenário a variável aparece como incógnita ou quantidade indeterminada, e a analisamos como símbolo de valores desconhecidos; no segundo cenário analisamos a variável em uma relação de dependência de quantidades; o terceiro cenário apresentamos a variável como marcador de posição para definir narrativas associadas a sistemas numéricos ou para parametrizar rotinas matemáticas; em quarto lugar está o cenário que discute a variável como símbolo para nomear números ou grandezas; em quinto lugar está o cenário que realiza a variável como coleções de elementos; no sexto cenário analisamos a variável como nome de figuras geométricas; e no último cenário, a variável aparece para nomear proposições lógicas. Este modelo elucida as formas como a variável é ensinada na matemática escolar, cuja estrutura da análise pode ser útil para apoiar o trabalho dos professores e pesquisadores.

PALAVRAS-CHAVES: Discurso. Variável. Realização. Conceito. Matemática para o Ensino.

RESUMEN

El foco de esta investigación fue la construcción de un modelo teórico de las *Matemáticas para la Enseñanza* (***M$_p$E***) del concepto de variable. Se trata de una estructura que presenta teóricamente las formas como está siendo – o puede ser – comunicado el concepto en las actividades escolares, describiendo diferentes miradas y argumentos al respecto de su enseñanza. El formato para presentar esta tesis es una colección de artículos científicos. El primer artículo analiza el concepto de variable a partir de sus realizaciones documentadas en artículos científicos, y la estrategia metodológica utilizada para sintetizar los datos fue un análisis documental. En el segundo artículo presentamos un modelo teórico de las *Matemáticas para la Enseñanza* del concepto de variable a partir de las directrices curriculares de matemáticas, tanto de Brasil como de Colombia, capturando las diferentes realizaciones de la variable presentadas en esos documentos. El tercer artículo de esta tesis consiste en la presentación de un modelo teórico de las *Matemáticas para la Enseñanza* del concepto de variable a partir de un estudio con profesores, para analizar la variabilidad de realizaciones del concepto en sus experiencias en el salón de clase. Finalmente, presentamos un modelo teórico de las Matemáticas para la Enseñanza del concepto de variable a partir de las fuentes utilizadas en los tres primeros artículos, constituyéndose en un cuarto artículo. En los resultamos estructuramos siete categorías: en la primera categoría la variable aparece como incógnita o cantidad indeterminada, y la analizamos como símbolo para re-presentar valores desconocidos; en la segunda categoría analizamos la variable en una relación funcional; en la tercera categoría presentamos la variable como marcador de posición para definir narrativas asociadas a sistemas numéricos o para parametrizar rutinas matemáticas; en cuarto lugar está la categoría que discute la variable como símbolo para nombrar números o magnitudes; en el quinto lugar está la categoría que analiza la variable como una colección de elementos; en la sexta categoría analizamos la variable como nombre de figuras geométricas; y en la última categoría, la variable aparece para nombrar proposiciones lógicas. Este modelo elucida las formas como la variable es enseñada en las matemáticas escolares, cuya estructura de análisis puede ser útil para apoyar el trabajo de los profesores e investigadores.

PALABRAS CLAVE: Discurso. Variable. Realización. Concepto. Matemáticas para la Enseñanza.

ABSTRAC

This research focuses on the development of a theoretical model for *Mathematics for Teaching* the concept of variable ($\boldsymbol{M_pE}$). It is a structure that theoretically presents the ways in which the concept is - can be - communicated in classroom activities, describing different perspectives and arguments about his teaching. This thesis format presentation is a collection of articles, in which the first analyses of the concept of variable from their *realizations* documented in scientific articles, and the methodological strategy was used documentary analysis to integrate the data. The second article presents a theoretical model of *Mathematics for Teaching* of the concept of variable from curricular mathematic guidelines, both from Brazil and Colombia, capturing different realizations of the variable presented in these documents. The third article of this thesis consists in a theoretical model presentation of *Mathematics for Teaching* of the concept of variable originated from an inquiry with teachers, to analyses the variability of realizations of the concept in their classroom experiences. Finally, we present a theoretical model of *Mathematics for Teaching* of the concept of variable from established sources used in the first three articles, constituting a fourth article. In the results, we structure seven categories in which the variable appears: in the first category, the variable emerges as unknown or undetermined quantity, and we analyse it as symbol of unknown values. In the second category, we analyse the variable in functional relationship. The third category, we presents the variable as placeholder to define narratives associated with numerical systems or bound mathematical routines. In the Fourth category, we consider the variable as a symbol for identifying numbers or quantities. The Fifth category realize the variable as a name for a set of elements. In the sixth category, we analyse the variable as a name for geometric figures. In the last category, the variable appears to name logical propositions. This model illustrates the ways in which the variable is taught in school mathematics, of which its structure analysis may be useful to support the work of teachers and researchers.

KEYWORDS: Discourse. Variable. Realization. Concept. Mathematics for Teaching.

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS iv
RESUMO vii
RESUMEN viii
ABSTRAC ix
LISTA DE QUADROS, TABELAS E FIGURAS xiv
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS xviii

CAPÍTULO 1
ANTECEDENTES DA PESQUISA 1
1. INTRODUÇÃO 1
2. TRAJETÓRIA PESSOAL E PROBLEMA DA PESQUISA 1
3. O QUE É A VARIÁVEL E COMO SE APRESENTA NA MATEMÁTICA? 5
4. A MATEMÁTICA COMO FORMA DE COMUNICAÇÃO 8
   4.1. O conceito de variável no discurso matemático 13
5. MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL 15
6. OBJETIVOS 19
   6.1. Objetivos específicos 19
7. ORGANIZAÇÃO NO FORMATO COMO COLEÇÃO DE ARTIGOS 21
REFERÊNCIAS 23

CAPÍTULO 2 - ARTÍCULO 1
UN MODELO TEÓRICO DE LAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE A PARTIR DE ARTÍCULOS CIENTÍFICOS RELACIONADOS CON SU ENSEÑANZA 27
RESUMEN 27

ABSTRACT ... 27
1. INTRODUCCIÓN ... 28
2. EL CONCEPTO DE VARIABLE EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ... 30
3. MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE ... 33
4. PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS ... 35
5. REALIZACIONES, ESCENARIOS Y VÍNCULOS DE LA VARIABLE ... 37
5.1. Incógnita o cantidad indeterminada ... 38
5.2. Relación funcional ... 39
5.3. Marcadores de posición para definir narrativas asociadas a sistemas numéricos o para parametrizar rutinas matemáticas ... 42
5.4. Nomenclatura en el estudio de las magnitudes ... 44
6. CONSIDERACIONES FINALES ... 45
REFERENCIAS ... 47

CAPÍTULO 3 - ARTIGO 2
UM MODELO TEÓRICO DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL A PARTIR DAS DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO BRASIL E DA COLÔMBIA ... 51
RESUMO ... 51
ABSTRACT ... 51
1. INTRODUÇÃO ... 52
2. A VARIÁVEL COMO FERRAMENTA DE COMUNICAÇÃO ... 53
3. UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL ... 55
4. DELINEAMENTO METODOLÓGICO ... 56
5. REALIZAÇÕES, CENÁRIOS E VÍNCULOS DA VARIÁVEL ... 58
5.1. Incógnita ou quantidade indeterminada ... 59
5.2. Relação funcional ... 61
5.3. Marcador de posição para definir narrativas associadas a sistemas numéricos ou para parametrizar rotinas matemáticas ... 63
5.4. Nomenclatura no estudo das grandezas ... 65
5.5. Denominação de coleções de elementos ... 67
5.6. Nome de figuras geométricas ... 68
6. SÍNTESE DO MODELO ... 69

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS 71
REFERÊNCIAS 72

CAPÍTULO 4 - ARTÍCULO 3
UN MODELO TEÓRICO DE LAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE A PARTIR DE UN ESTUDIO CON PROFESORES 75
RESUMEN 75
ABSTRACT 75
1. INTRODUCCIÓN 75
2. EL CONCEPTO DE VARIABLE DESDE UNA PERSPECTIVA DISCURSIVA 77
3. MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE 79
4. CONTEXTO Y PARTICIPANTES EN LA RECOLECCIÓN DE DATOS 81
5. PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS 83
6. REALIZACIONES, ESCENARIOS Y VÍNCULOS DEL CONCEPTO DE VARIABLE . 84
6.1. Incógnita o cantidad indeterminada 84
6.2. Relación funcional 85
6.3. Marcador de Posición para definir narrativas asociadas a sistemas numéricos o para parametrizar rutinas matemáticas 89
6.4. Nomenclatura en el estudio de las magnitudes 90
6.5. Denominación de colecciones de elementos 92
6.6. Nombre de figuras geométricas 94
6.7. Lógica de predicados 96
7. CONSIDERACIONES FINALES 96
REFERENCIAS 98

CHAPTER 5 - SCIENTIFIC PAPER 4
A THEORETICAL MODEL OF THE MATHEMATICS FOR TEACHING OF THE CONCEPT OF VARIABLE 102
ABSTRACT 102
1. INTRODUCTION 102
2. MATHEMATICS AS A FORM OF COMMUNICATION 104
3. MATHEMATICS FOR TEACHING THE CONCEPT OF VARIABLE 107
4. METHODOLOGICAL OUTLINE 109

5. REALIZATIONS, LANDSCAPES AND ENTAILMENTS OF THE CONCEPT OF VARIABLE 114
5.1.The variable as an unknown quantity 114
5.2. The variable in the functional relationship 116
5.3. The variable as placeholder to define narratives regarding numerical systems or to parameterize mathematical routines 121
5.4. The variable as nomenclature of numbers or magnitudes 122
5.5. The variable as collection of elements 125
5.6. The variable to name geometric figures 127
5.7. The variable to name the logical proposition 129
6. SYNTHESIS OF A THEORETICAL MODEL OF MATHEMATICS FOR TEACHING THE CONCEPT OF VARIABLE 129
7. FINAL CONSIDERATIONS 133
REFERENCES 134

ANEXOS 138
ANEXO 1: TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO 139

LISTA DE QUADROS, TABELAS E FIGURAS

CAPÍTULO 1 – ANTECEDENTES DA PESQUISA

Quadro 1. Exemplo da reificação da variável.. 14
Quadro 2. Exemplo da alienação da variável.. 15

Tabela 1. Exemplos do uso dos símbolos literais na matemática.. 6
Tabela 2. Exemplos de discursos matemáticos.. 9

Figura 1. Conceito de variável.. 12
Figura 2. Re-presentação de dois sétimos.. 13
Figura 3. Fontes dos dados na pesquisa.. 18
Figura 4. Estrutura da tese.. 20

CAPÍTULO 2 – ARTÍCULO 1

Cuadro 1. Ejemplo de alienación…………………………………………………………….. 32
Cuadro 2. Ejemplo de acciones de conteo………………………..……………………….. 38
Cuadro 3. Cantidades correlacionadas………….………….……………………………... 39
Cuadro 4. Marcadores de posición en rutinas matemáticas…..……………………………… 42
Cuadro 5. Ejemplo de parámetros para construir definiciones…………...………………….. 43
Cuadro 6. Ejemplo de marcadores de posición.……………………………………………… 43
Cuadro 7. Ejemplo parámetros para definir propiedades……………………...……………... 43
Cuadro 8. Ejemplo la variable como magnitud………………………………………………. 45

Tabla 1. Ejemplo de la reificación………………………………………………………… 32

Tabla 2. Relación de artículos seleccionados para el estudio…………………………………… 36
Tabla 3. Tabla de valores……………………………………………………………………... 39
Tabla 4. Re-presentaciones de la relación funcional………………………………………….. 40
Tabla 5. Cantidad dependiente e independiente en sucesiones………………………………. 41
Tabla 6. Regla de formación de la secuencia………………………………………………… 41

Figura 1. Resumen del modelo teórico de las $\mathbf{M_pE}$ del concepto de variable a partir de los artículos científicos……………………………………………………………………… 46

CAPÍTULO 3 – ARTIGO 2

Quadro 1. Exemplo de alienação da variável.. 55
Quadro 2. Valor da incógnita.. 59
Quadro 3. Resolução da incógnita na inequação... 60
Quadro 4. Variável como incógnita na equação.. 60
Quadro 5. Variável em uma sequência numérica... 62
Quadro 6. Variável na solução de um binomio ao quadrado.. 64

Tabela 1. Exemplo da reificação da variável... 54
Tabela 2. Documentos do corpus da análise.. 57
Tabela 3. Re-presentação da variável na relação funcional... 61
Tabela 4. Síntese da M_pE do conceito de variável.. 71

Figura 1. Variável no ensino da taxa de variação média.. 63
Figura 2. Variável como grandeza.. 65
Figura 3. Variável como medidas estatísticas.. 67
Figura 4. Espaço amostral do evento *A*.. 68
Figura 5. Variável como vértices de um cubo.. 68
Figura 6. Síntesis do modelo da M_pE do conceito de variável... 69

CAPÍTULO 4 – ARTÍCULO 3

Cuadro 1. Re-presentación de la cantidad dependiente e independiente…………………….. 86
Cuadro 2. Ejemplo sobre cantidad dependiente e independiente…………………………… 86
Cuadro 3. Realización en las sucesiones…………………………………………………... 87
Cuadro 4. Ejemplo de marcadores de posición……………………………………………. 89
Cuadro 5. Ejemplo de identidades algebraicas…………………………………………….. 90
Cuadro 6. Ejemplo de unidades de medida…………………………………………………... 91
Cuadro 7. Ejemplo de patrones de medida………………………………………………… 91
Cuadro 8. Ejemplo de conjunto…………………………………………………………… 93
Cuadro 9. Ejemplo de matrices…………………………………………………………… 93
Cuadro 11. Ejemplo de entidades geométricas…………………………………………… 94
Cuadro 12. Ejemplo de entidades geométricas: vectores………………………………….. 95
Cuadro 13. Ejemplo de entidades geométricas: versores…………………………………… 95

Tabla 1. Actividades desarrolladas en cada semana de clase……………………………… 83

Figura 1. Operador transformador en las funciones………………………………………. 87
Figura 2. Re-presentación de la tasa de variación………………………………………… 88
Figura 3. Re-presentación del incremento………………………………………………… 89
Figura 4. Resumen del modelo de M_pE del concepto de variable…………………………... 97

CHAPTER 5 – SCIENTIFIC PAPER 4

Table 1. Presentation of articles selected for the study…………………………………… 110
Table 2. Curricular guidelines for mathematics studied…………………………………….. 111
Table 3. Re-presentations of specific unknowns…………………………………………….. 115
Table 4. Re-presentation of the covariant………………………………………………… 117
Table 5. Dependent and independent quantities in the successions…………………………. 118
Table 6. Synthesis of the theoretical model………………………………………………. 132

Figure 1. Concept of variable…………………………………………………………….. 106
Figure 2. Structure of the theoretical model……………………………………………… 108
Figure 3. Example of the unknown in inequalities………………………………………….. 116

Figure 4. Re-presentation of the transformer operator………………………………………… 119
Figure 5. Example of the realization as change…………………………………………….. 120
Figure 6. Example of the average rate change……………………………………………. 120
Figure 7. Example of the unit and standard of measurement……………………………….. 124
Figure 8*.* Example of the realization as set………………………………………………. 126
Figure 9*.* Example of the realization as matrix……………………………………………… 127
Figure 10*.* Example of the geometric entity………………………………………………… 128
Figure 11. Synthesis of the theoretical model of the M_fT of the concept of variable………. 130

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$\boldsymbol{M_pE}$	Matemática para o Ensino – Matemáticas para la Enseñanza
$\boldsymbol{M_fE}$	Mathematics for Teaching
CpE	Conocimiento matemático para la enseñanza
PCK	Pedagogical Content Knowledge
D.M.	Discurso Matemático
MEN	Ministerio de Educación Nacional de Colombia
MEC	Ministério da Educação e Cultura do Brasil
PPEFHC	Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências
ENCIMA	Grupo de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática
CAPES	Coordenadoria de Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior
RELIME	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
BOLEMA	Boletim de Educação Matemática
OEA	Organização dos Estados Americanos
PAEC	Programa de Alianças para a Educação e Capacitação
GCUB	Grupo Coimbra de Universidades Brasileiras
OPS/OMS	Organização Pan-americana da Saúde
COP	Peso Colombiano
SIU	Sistema Internacional de Unidades
A.D.	Anno Dómini - Después de Cristo

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES DA PESQUISA

1. INTRODUÇÃO

Neste primeiro capítulo apresento alguns acontecimentos da minha vida acadêmica e profissional que refinaram esta pesquisa intitulada *Um modelo teórico da Matemática para o Ensino do conceito de variável*. Este estudo analisa teoricamente as formas como a variável é apresentada, e a relação deste conceito com outros conceitos matemáticos, mobilizados exclusivamente nas atividades escolares da Educação Básica – dirigida a estudantes com idades entre 6 e 18 anos –. Os dados discutidos surgem da análise de diferentes produções a respeito do ensino da matemática, tais como: (1) artigos científicos da Educação Matemática; (2) as diretrizes curriculares que orientam a matemática ensinada na Educação Básica do Brasil e da Colômbia; e (3) a discussão do ensino da variável feita por um grupo de professores colombianos. Estas três fontes me levaram a formular e esclarecer os objetivos desta pesquisa, servindo como dados deste estudo.

Além disso, neste mesmo capítulo, também faço uma discussão da literatura, reconhecendo a importância do desenvolvimento deste estudo, mostrando algumas referências que contribuíram para a teorização e formação desta pesquisa. Finalmente, apresento a abordagem metodológica de cada um dos componentes desta tese e como os resultados foram estruturados.

2. TRAJETÓRIA PESSOAL E PROBLEMA DA PESQUISA

Antes de descrever minha trajetória profissional, que foi a base na formulação da presente pesquisa, considero importante me apresentar. Sou de nacionalidade colombiana nascido na cidade de Medellín. A minha cidade está localizada no noroeste do país, sendo a capital e maior cidade da província (departamento) de Antioquia. Cheguei ao Brasil no começo do ano 2014 para dar início ao doutorado na Universidade Federal da Bahia, cidade de Salvador. Este projeto de pesquisa, portanto, emerge da minha trajetória acadêmica e profissional na Colômbia e do encontro com novas experiências no Brasil.

A minha formação acadêmica, como professor de matemática, teve início em meio a mudanças na educação da Colômbia, que ocorreram no final da década de 1990. Nesses anos, o Ministerio de Educación Nacional regulou os programas de graduação em licenciatura oferecidos pelas faculdades de educação do país (MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998a). O interesse do *Ministério de Educación* era dar relevância à formação do professor em uma área específica: em Ciências Sociais, ou na Biologia, ou na Matemática, ou em Física. Foi assim que no ano 2000 nasceu o programa de Licenciatura em Educação Básica com ênfase na matemática da *Universidad de Antioquia* (Medellín - Colômbia). Um programa voltado para a formação de professores, especificamente, uma licenciatura focada no ensino da matemática na educação fundamental.

Os programas de graduação em Licenciatura na Colômbia são oferecidas nas faculdades de educação, de maneira que todas as suas disciplinas são específicas para a formação dos professores. Assim, as disciplinas dos cursos de licenciaturas atende a atividade do ensino, sendo distinta da proposta das disciplinas presentes nas grades curriculares dos cursos de bacharelado.

Ainda na década de 1990, as orientações do *Ministerio de Educación de Colombia* não só aconteceram com os programas de graduação. Nos anos 1998 e 2000 foram publicadas as diretrizes curriculares para o ensino da Matemática (MEN, 1998b, 2000). Esses documentos curriculares estruturaram todos os ciclos da Educação Básica. Além disso, influenciaram diretamente a formação dos professores, porque eles deviam atender as demandas do país contempladas nesses documentos oficiais.

Sempre foi fascinado pela matemática e seu ensino, por isso ingressei no curso de Licenciatura da *Universidad de Antioquia* no ano 2001. Lembro que uma das disciplinas que contribuiu em minha formação profissional foi o "*Seminário Integrativo: Didática da Álgebra*". Nesta disciplina foi discutida a importância da *variável* como símbolo literal usado em várias situações da matemática. Nessa disciplina, tive a oportunidade de compreender que os símbolos literais perpassam a diferentes aspectos da matemática: geometria plana, cálculo, trigonometria, etc. A *variável*, portanto, são símbolos usados transversalmente em toda a matemática, e é comunicada de diferentes maneiras em cada uma das situações em que se apresenta. Por exemplo, nas equações e inequações aparece como incógnitas, e nas funções, esses mesmos símbolos, comunicam quantidades correlacionadas, etc.

Quando recebi o título de licenciado, atuei como professor do sexto até o oitavo ano no ensino fundamental. Nesses níveis escolares, o uso dos símbolos literais é introduzido no ensino da matemática. Nesta experiência percebi que a sala de aula era um mundo mais complexo do que imaginava. O que eu tinha aprendido na faculdade era conflitante com o vivenciado na escola. Não conseguia conduzir o ensino da matemática, e o esforço que fazia como professor não era suficiente para motivar os alunos a apreenderem com a mesma paixão que eu tinha. Por essa razão, minha primeira experiência profissional me impactou negativamente. Nessa primeira experiência na escola, não consegui lidar com as expectativas dos estudantes. Sentia que eles não compreendiam aspectos básicos da matemática correspondentes ao nível escolar. Percebi que os estudantes usavam inadequadamente os símbolos literais na escrita de enunciados. Também não conseguiam aplicar adequadamente procedimentos para simplificar expressões simbólicas (aquelas que combinam números, símbolos literais e os símbolos das operações aritméticas). Enfim, foram várias dificuldades que observei nos estudantes. Essa experiência me deixou dúvidas sobre continuar exercendo a profissão de professor, e seis meses após a minha contratação, desisti do emprego.

Após minha demissão do ensino básico, lecionei por quatro anos em outras instituições. Atuei como professor universitário. Participei em cursos de formação para professores. Trabalhei em projetos educacionais fora do âmbito escolar, e após quatro anos nestes outros trabalhos, voltei a lecionar na Educação Básica em uma rede de ensino público.

Como professor dos últimos anos da Educação Fundamental (oitavo e nono ano), novamente o ensino da *variável* se mostrou desafiador. Os estudantes ainda apresentavam dificuldades para compreender a *variável*, especialmente porque as diferentes formas em que são comunicadas nos enunciados ou procedimentos matemáticos é uma das dificuldades na escola. Diante desta realidade, vi a necessidade de fortalecer a minha formação no ensino da matemática na Educação Básica. Este panorama me levou a contemplar a ideia de estudar uma pós-graduação. Por esse motivo, ingressei como mestrando na *Universidad Nacional de Colombia* a fim de focar o meu estudo no ensino da matemática.

No ano 2010 iniciei o curso profissional *Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*. A pós-graduação possibilitou minha especialização no ensino da matemática. O meu projeto de mestrado foi focado ao ensino da matemática para estudantes universitários. Neste estudo, reconheci que a *variável* não está ligada exclusivamente ao ensino das funções, das equações ou inequações, pois transita de uma forma complexa por vários aspectos da matemática: geometria, aritmética, cálculo, etc. A *variável* é um instrumento para referenciar números, conjuntos de elementos, formas geométricas ou proposições. Nesta parte, me refiro à *variável* de forma geral como símbolos literais usados na matemática que são mobilizados em sala de aula.

No meu trabalho de mestrado, analisei as dificuldades apresentadas pelos estudantes de engenharia da *Universidad Nacional de Colombia* (Campus Medellín) no primeiro semestre, especificamente nas áreas de geometria euclidiana, geometria analítica e trigonometria. Mesmo não tendo como foco o estudo da *variável* ou nas dificuldades do seu ensino, esta experiência contribuiu notavelmente em minha atual preocupação científica; reconhecer a necessidade da formação dos professores na matemática específica do ensino; e reconhecer que a *variável* é um conceito complexo e de difícil compreensão na escola.

Tendo concluído o mestrado, trabalhei como professor na Licenciatura em Matemática do *Instituto Tecnológico de Antioquia*. Nesta experiência, considerei a importância da atividade dos professores em sala de aula. Como professor universitário, apreciei a necessidade do aprofundamento no estudo da *variável*, que geralmente é ensinada de forma tácita nas equações ou funções, e etc. Pude perceber que os estudantes geralmente ingressam na universidade exibindo um conjunto de ideias confusas acerca da *variável*, acarretando dificuldades na compreensão de outros conceitos da matemática. Talvez uma sólida formação desde a escola no uso adequado dos símbolos literais, poderia ser uma forma de enfrentar o problema.

Essa abordagem do estudo do ensino despertou meu interesse de ser pesquisador na área da Educação Matemática. A pretensão de cursar um doutorado foi principalmente um projeto pessoal de me tornar pesquisador. Além disso, queria me aprofundar em alguns aspectos teóricos da Educação Matemática que contribuíssem para o exercício da minha profissão de educador. Tendo estas ambições, participei da chamada, no ano 2013, da *Organização dos Estados Americanos* (OEA) para estudar no Brasil. Nesse ano, desenvolvi uma proposta de pesquisa que posteriormente foi avaliada pelo professor Dr. Jonei Barbosa, quem me apoiou neste projeto acadêmico. Como parte do grupo de pesquisa *Ensino de Ciências e Matemática* – ***ENCIMA,*** refleti sobre o meu papel como pesquisador, sobre a projeção da minha pesquisa, e a responsabilidade social que assumia no doutorado: não só com o Brasil que me acolheu, mas também com a Colômbia, com os meus colegas professores de matemática, com os estudantes e com a Educação Matemática. Todos eles têm sido a inspiração para definir minha perspectiva como professor e pesquisador. Foi assim que construí as bases desta pesquisa.

De acordo com a minha participação nas reuniões no grupo de pesquisa e pelo diálogo permanente com o meu orientador, estabeleci o tema a investigar ligado ao ensino da *variável*. Especificamente, o meu interesse é *apresentar e discutir teoricamente as diferentes formas como a variável é comunicada no ensino*. O objetivo desta tese será delineado com maior profundidade mais adiante neste capítulo. Este estudo se foca exclusivamente na matemática no ensino mobilizada na Educação fundamental e media.

Quando defini o objeto de minha pesquisa, procurei referências e li estudos de Sfard (1998, 2001, 2007, 2012), Shulman (1986, 1987), Ball, Hill e Bass, (2005), e Davis e Renert (2012, 2014), entre muitos outros autores. A partir das minhas leituras, defini o caminho teórico desta tese. Por um lado, Sfard (2008) apresenta a ideia da matemática como algo que emerge das relações sociais, vinculada a uma determinada cultura. Para esta autora, os indivíduos e suas experiências estão num quadro de atividades compartilhadas. Os argumentos de Sfard (2008) se focam a mostrar a necessidade de substituir o ensino como atividade que individualiza, por uma ideia que fala sobre essa experiência como participação social. Por outro lado, Shulman (1986, 1987), Ball, Hill e Bass, (2005), e Davis e Renert (2014) me permitiram definir *Matemática para o Ensino* como instrumento teórico para organizar e modelar as diferentes formas como a *variável* é apresentada na atividade escolar. Intuitivamente podemos apresentar a *Matemática para o Ensino* como um campo de pesquisa focado à organização e estruturação da matemática que se mobiliza nas atividades escolares.

3. O QUE É A VARIÁVEL E COMO SE APRESENTA NA MATEMÁTICA?

Um dos temas centrais desta tese é o *conceito de variável*. Nesta sessão, usamos o termo *conceito* sem uma definição previa, por tanto, pedimos para o leitor tomar uma compreensão intuitiva dessa palavra, por enquanto, adiante detalharemos a sua definição. A *variável* é um recurso para simbolizar quantidades, formas e proposições[1]. O motivo desta simbolização é aglutinar informação, tornando-a mais fácil de compreender e manipular (SCHOENFELD; ARCAVI, 1988; SFARD; LINCHEVSKI, 1994). No entanto, para compreender o que é uma *variável* não podemos nos referir apenas à descrição da sua forma visual. Também não é suficiente mencionar como ela é utilizada em uma situação particular. Para compreender o conceito de *variável* é necessário descrever como ele é utilizado ao longo da matemática (VISEU; NOGUEIRA, 2014).

Quando estudamos matemática, geralmente observamos expressões como a seguinte: "*para todo* $x \in R$*, se x aumenta, então* $2/x$ *diminui*". Nessa expressão aparecem dois símbolos literais. Por um lado, o símbolo *R* refere-se ao conjunto dos números reais. Ou melhor, a letra *R* é usada exclusivamente para demarcar um conjunto numérico. Por outro lado, na expressão aparece também o símbolo *x* para descrever um número qualquer, e considerando que os números nunca aumentam ou diminuem, a característica de variação desse símbolo x deve ser interpretada metaforicamente (QUINO, 1960). Em outras palavras, o enunciado pode ser reinterpretado da seguinte forma: "*se temos dois números reais diferentes, por exemplo 3 e 7, então podemos verificar que ao fazer a divisão entre 2 e esses números, o quociente menor sempre vai ser obtido da divisão entre 2 e o número maior:* $2/3 = 0{,}6666\ldots$ *e* $\frac{2}{7} = 0{,}2857\ldots$". Do mesmo modo, poderíamos escrever simbolicamente o enunciado: "*Dados dois números reais diferentes* x *e* y*, se* $x > y$ *então* $2/x < 2/y$".

[1] Na sessão anterior, o texto está escrito em primeira pessoa no singular por se tratar da minha trajetória pessoal e académica. Agora adiante, escreverei o texto em primeira pessoa do plural, porque tanto a definição do lente teórico, assim como as ideias que apresentaremos neste texto têm sido produto das discussões com o meu orientador e o resto de membros do grupo de pesquisa.

Outro exemplo relacionado com a *variável*, associado à metáfora de variação, isto é, relacionado com quantidades que aumentam ou diminuem, pode ser observado no estudo das funções. Dada uma função quadrática, por exemplo $f(x) = x^2 + 3x + 4$, falamos de x em termos de uma quantidade que varia. Com essa função, expressamos que dado qualquer número real, então podemos obter um único resultado ao fazer a seguinte operação*: Após multiplicar um número real por ele mesmo, adicionamos ao resultado três vezes esse mesmo número, no final aumentamos o resultado em 4.* Neste exemplo, assim como no exemplo apresentado no parágrafo anterior, a *variável* descreve operações com números reais. Em ambos os exemplos, a estrutura é a mesma, inicialmente apresentamos uma quantidade qualquer nomeada com um símbolo literal, e posteriormente descrevemos alguma propriedade ou operação usando esse símbolo. Segundo Quino (1960), a mesma estrutura poderia ser visualizada em enunciados de outros aspectos da matemática, como mostramos nos exemplos a seguir (*Tabela 1*):

Se temos	*Um triângulo qualquer*	**Então**	*A soma das medidas dos seus três ângulos internos dará como resultado 180°*
	$\triangle ABC$		$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
Dados	*Dois conjuntos qualquer*	**Então**	*A união entre eles são todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos*
	Os conjuntos A e B		$x \in A \cup B \; se \; x \in A \; ou \; x \in B$

Tabela 1. Exemplos do uso dos símbolos literais na matemática. Fonte: autores.

Os exemplos dados até agora nos ajudam a mostrar que a *variável* expressam ações matemáticas sobre quantidades ou formas geométricas. A *variável* são um recurso matemático para definir uma generalidade, e só são entendidas em aspectos específicos da matemática que as utilizam. Por exemplo, na Tabela 1, o símbolo A só tem sentido quando o observamos dentro da situação que o referencia. Em um exemplo, o símbolo A é associado a um conjunto de elementos, e em outro exemplo, esse mesmo símbolo define um vértice de um triângulo.

Alguns autores definem *variável* unicamente como a quantidade dependente e independente da relação funcional. Em termos gerais, alguns pesquisadores só consideram a *variável* quando se relaciona com a metáfora da variação (quantidades que aumentam ou diminuem); o resto dos símbolos são apresentados como parâmetros, como incógnitas ou simplesmente como letras (SUÁREZ; ALEX; GÓMEZ, 2014; KÜCHEMANN, 1978). Contudo, há outros autores que trazem uma definição mais ampla do conceito de *variável*, estudando-o como um símbolo que perpassa por diferentes aspectos da matemática: incógnitas nas equações, quantidade dependente e independente na relação funcional, parâmetro, etc. (USISKIN, 1988; DOGBEY, 2015; ESCALANTE; CUESTA, 2012; JUPRI; DRIJVERS; HEUVEL-PANHUIZEN, 2014). Neste estudo, chamaremos de *variável* ao conjunto de todas as letras usadas na matemática para descrever enunciados em forma simbólica. Portanto, esclarecemos que este trabalho discute a *variável* em um sentido amplo, considerando-a como um instrumento para simbolizar diferentes enunciados da matemática. Assim, incluímos neste estudo as distintas situações discutidas na matemática, estudadas exclusivamente na Educação Básica, e que utilizam os símbolos literais.

Temos nos interessado na *variável* porque é fundamental no ensino da matemática, desde a educação elementar até a formação universitária (DOGBEY, 2015; ESCALANTE; CUESTA, 2012). Na medida em que os estudantes avançam nos diferentes anos escolares, eles passam a utilizar a *variável* de forma mais complexa. Tentando entender essa complexidade, alguns pesquisadores têm classificado as diferentes situações onde a *variável* aparece (KÜCHEMANN, 1978; USISKIN, 1988; SCHOENFELD; ARCAVI, 1988; TRIGUEROS; URSINI, 2003). Outros pesquisadores, por sua vez, têm analisado as dificuldades no ensino da *variável*, discutindo as possíveis situações que levam os estudantes a utilizá-la de maneira inadequada (LUCARIELLO; TINE; GANLEYD, 2014; GARCIA; SEGOVIA; LUPIÁÑEZ, 2014). Ely e Adams (2012), por exemplo, demonstraram que os estudantes não diferenciam as diferentes funções dos símbolos literais nas expressões matemáticas, e geralmente só falam de *variável* como quantidades fixas e desconhecidas em uma equação. Os professores também apresentam dificuldades para determinar o conceito em diferentes aspectos da matemática, como funções, geometria, etc. (JUÁREZ, 2011). Essas dificuldades que os estudantes e os professores apresentam com relação a *variável* têm sido atribuídas a diferentes fatores; por um lado, figura como tácita no ensino; e por outro lado, a sua natureza multifacetada faz que diferentes situações usem os mesmos símbolos literais, ou vice-versa.

Outros pesquisadores têm mostrado interesse na *variável* ensinada na Educação Básica, dando importância à transição da solução de problemas exclusivamente com números para a solução de problemas usando símbolos literais (VISEU; NOGUEIRA, 2014).

O ensino precisa ser aprofundado nas diferentes situações que utiliza a *variável* e as suas características. Esta forma de ver a *variável* para falar de diferentes aspectos corrobora a visão da matemática como algo complexo, como uma forma de comunicação, cujo os símbolos literais estão evolvidos na escrita especial. A nossa perspectiva teórica da matemática como forma de comunicação é o tema que apresentaremos na próxima sessão, cujas ideias nos ajudaram a demarcar melhor o conceito de *variável* no ensino da matemática.

4. A MATEMÁTICA COMO FORMA DE COMUNICAÇÃO

A comunicação é uma atividade social que serve para o entendimento entre os seres humanos. Sua dimensão social está relacionada ao fato de que ela é compartilhada por mais de um indivíduo. Quanto aos indivíduos, os chamaremos de *participantes* da comunicação. Sfard (2008) aprofunda essas ideias e apresenta a comunicação como uma atividade que combina ações e re-ações a partir de repertórios bem estabelecidos, por exemplo, quando chegamos a um lugar e dizemos para alguém "*bom dia!*", esperamos que essa pessoa responda (re-ação) a nossa ação com uma outra expressão escolhida de um repertório definido socialmente. No entanto, se a outra pessoa dá como resposta: "*são as três e meia da tarde*", poderíamos supor que ela não escutou corretamente o que dizemos. Portanto, a combinação de ações com re-ações não é casual e vai ser validada ou não no mesmo ato comunicativo pelos *participantes*.

Essa visão de comunicação explica as formas do fazer humano, não somente as coletivas, mas também as individuais. Para Sfard (2008), a atividade de *pensar* também é uma forma de comunicação, é "*uma comunicação consigo mesmo*" (SFARD, 2008, p. 82, tradução nossa). O *pensamento* é entendido como uma forma individualizada do processo de comunicação (SFARD, 2006). A *individualização* é dimensionada como um tornar próprio um fazer coletivo (SFARD, 2006). Dessa perspectiva, o pensamento e a comunicação interpessoal são diferentes manifestações do mesmo fenômeno.

A comunicação, portanto, governa o modo como os seres humanos atuam nos diferentes *contextos* (ROBINSON, 2012). Usamos a *palavra contexto* para nos referirmos ao conjunto de circunstâncias que acompanham uma situação. Não obstante, isso que nos governa emerge na mesma participação coletiva. O nosso atuar no mundo é o que possibilita a criação de diferentes formas para nos comunicar. Certamente, dispomos de múltiplos repertórios para falar de aspectos específicos da nossa atividade humana, e de acordo com Sfard (2008), chamaremos *discurso* a cada um desses repertórios de comunicação.

Então, como podemos diferenciar um *discurso* do outro? Cada repertório fala de um aspecto específico da nossa vida. Por exemplo, a Zoologia, a Química e a Historia podem ser definidas como *discursos* que falam acerca dos animais, das substancias químicas e do tempo e sociedades passadas, respectivamente (SFARD, 2008). Neste estudo, tal como foi feito por Sfard (2008), definimos a matemática como outro *discurso*, cujo repertório é específico para falar da relação entre quantidades e das formas que observamos no mundo. Assim, como qualquer discurso, a matemática se configura através das relações sociais, e os indivíduos participantes são quem definem o que se constitui como ações válidas dentro do *discurso*, assim como as re-ações que podem gerar. Portanto, o repertório do *discurso* matemático está em função do contexto em que é usado. Sfard (2008), por exemplo, apresenta três situações diferentes que podem ser categorizadas como parte do *discurso matemático* (Tabela 2): no primeiro exemplo apresentamos uma situação cotidiana da contagem; na segunda, apresentamos um extrato usado na Educação Básica para o ensino da matemática; e no terceiro exemplo apresentamos um fragmento de uma publicação científica:

<table>
<tr>
<td>Exemplo 1: Uma conversação com uma menina de 7 anos

Anna: Roni, qual a sua idade?
Roni: Sete.
Anna: O quão é mais velho?
Roni: Vinte.
Anna: Ela é mais velha que você? Quanto?
Roni: Eu não sei… Não tenho pensado sobre isto.
Anna: Tente pensar sobre isto agora.
Roni: Sete também?
Anna: O que você quer dizer?
Roni: Sete, oito, nove, dez, onze, doze [depois de cada palavra, ela curva um dedo]… Seis.</td>
<td rowspan="2">Exemplo 3: Um teorema

• Deixe F_q denote o campo infinito com q elementos, onde q é uma potência de um primo.
• Z = o inversível escalar 2 x 2 matrizes com entradas em F .
• Deixe PGL_2 (F_q) = GL_2 (F_q)/Z=A•Z|A está em GL2(F4), com multiplicação dada por Z Isto é o grupo projectivo linear sobre A•Z B•Z = A•B F
• LF(F4) é um grupo transformações fraccionárias lineares x (ax + b)(cx + d).

Reivindicação: Há um grupo de isomorfismo teorético entre PGL2 (F4) E LF(Fq).</td>
</tr>
<tr>
<td>Exemplo 2: Um problema escolar

Questão: O diâmetro de um círculo mede 3 centímetros. Qual é a medida da circunferência?
Solução: $C = \pi . d$, $C = 3{,}14. (3)$, $C = 4.92cm$</td>
</tr>
</table>

Tabela 2. Exemplos de discursos matemáticos (SFARD, 2008, pág. 132. Tradução livre)

As diferentes formas como o *discurso matemático* se apresenta evidencia que ele não é algo fixo. O *discurso* reflete o dinamismo das ações humanas (SFARD, 2012). Os exemplos da tabela 2 sugerem uma diferença entre o discurso matemático mobilizado na escola, o discurso que circula entre os matemáticos e o discurso matemático usado coloquialmente. Portanto, o repertório do discurso matemático é específico para as diferentes atividades. Daí que deixamos de nos interessar no desenvolvimento dos sujeitos individuais, para focarmos no desenvolvimento do discurso matemático, referindo-nos aos sujeitos em termos de *discursantes* ou *participantes* discursivos (SFARD, 2008). O termo *desenvolvimento*, tal como é entendido por Sfard (2012), refere-se a uma mudança na atividade discursiva.

Segundo Sfard (2008), para indicar se uma ação comunicativa pode ser considerada matemática, podemos fazer uso de quatro indicadores que nos ajudam a defini-la como parte ou não desse discurso, os quais descrevemos brevemente:

- Pelo uso das *palavras-chave*. Embora não seja algo exclusivo, geralmente se usa na matemática *palavras* especiais para nomear quantidades e formas. Entre elas poderíamos mencionar alguns exemplos: variável, três, triângulo, função, conjunto, fração, segmento, circunferência, etc.;
- Pelos *mediadores visuais*. Com este recurso, podemos comunicar ações do discurso matemático em forma escrita, usando caracteres numéricos ($1,\frac{2}{7}, 0, \widehat{34}$, etc.), símbolos literais ($x, a+b, y^2$, etc), operadores aritméticos ($+, \div, \{\}, [], \sqrt{}, \leq, \neq, =$), gráficos, etc.;
- Pelas *narrativas endossadas*, ou seja, proposições validadas socialmente pelos participantes do discurso, como teoremas, definições e regras de cálculo; e
- Pelas *rotinas*, entendidas como um conjunto sistemático de padrões que se repetem em determinados tipos de situações formando sequências.

Tanto o significado das *palavras-chave*, o uso dos *mediadores visuais* e o desenvolvimento de *narrativas* e *rotinas* estão vinculados intimamente a entendimentos compartilhados dentro de um grupo de participantes discursivos, trata-se de uma atividade pública. A participação no discurso matemático pode ser guiada por outros membros com mais experiência. Ensinar matemática é fazer com que os estudantes participem do discurso, isto é, usem adequadamente o repertório matemático (SFARD, 2006).

A partir de agora, queremos nos aprofundar nesse primeiro aspecto que Sfard (2008) considera para definir se uma ação – comunicativa – faz parte ou não do discurso matemático: o uso das *palavras-chave*. Esta ideia nos permitirá definir alguns aspectos teóricos fundamentais para a nossa pesquisa.

Na medida em que os participantes de um discurso se tornem mais experientes nessa forma de comunicação, frequentemente introduzem novas palavras e modificam os usos daquelas das que já tinham (ROBINSON, 2012). Usaremos simplesmente o termo *palavras*, para nos referir às *palavras-chave* usadas na matemática (como três, triângulo, proporção, função, etc). Por exemplo, nos primeiros anos escolares se introduz a palavra *número*, e posteriormente, nos anos seguintes, aparecem outras palavras como *proporcionalidade, variável, função, limite,* etc. Além disso, a mesma palavra *número*, que era utilizada inicialmente só para falar de números naturais, é ampliada para comunicar outras situações: *números inteiros*, *reais*, etc. Portanto, o significado das *palavras* depende da forma em que são usadas em contextos específicos da matemática (SFARD, 2008). Em resumo, rejeitamos a ideia de que as *palavras* do discurso matemático sejam uma referência para designar ou nomear a realidade, pelo contrário, o significado das *palavras*, por exemplo, *variável*, depende do contexto em que são usadas. As *palavras* do discurso matemático não podem se reduzir a definições estritas, porque o seu *significado* é seu *uso no discurso*. Por esse motivo, daqui para frente deixaremos de nos referir ao *significado das palavras* para falar melhor em termos de *usos das palavras* no discurso matemático. No entanto, saber como usar uma *palavra* não significa conhecer a sua definição. Por exemplo, se nos pedem para explicar o que é uma *variável* na matemática e damos uma definição em que só incluímos a ideia de *variação*, teríamos uma definição parcial dela. Contudo, a parcialidade na forma de definir as *palavras* não implica que o seu uso seja incorreto na prática. Ainda dando uma definição da variável ligada com a variação, tranquilamente poderíamos fazer uso da palavra para falar de uma quantidade desconhecida em uma equação (GARCIA; SEGOVIA; LUPIÁÑEZ, 2014; ESCALANTE; CUESTA, 2012; HERRERA; CUESTA; ESCALANTE, 2016; ELY; ADAMS, 2012). O mesmo acontece se damos uma definição de *variável* apelando para a ideia de *etiqueta*, porque claramente também as usamos como quantidades independentes ou dependentes da relação funcional (GARCIA; SEGOVIA; LUPIÁÑEZ, 2014; DOGBEY, 2015; VISEU; NOGUEIRA, 2014; WILKIE; CLARKE, 2015), e se definimos a *variável* como um valor desconhecido, estaríamos deixando de fora a nossa atividade de definir o valor posicional de um elemento dentro de uma sucessão, cujos símbolos também são chamados de *variável* (OCHOVIET; OKTAÇ, 2011; JUPRI; DRIJVERS; HEUVEL-PANHUIZEN, 2014; WILKIE; CLARKE, 2015).

Nossa intenção não é afirmar que é impossível definir o que é uma *variável*, também não queremos dizer que é *impossível* definir as *palavras* usadas no discurso matemático. Queremos enfatizar que ainda que as definições destas *palavras* não sejam apresentadas, elas podem ser utilizadas corretamente no discurso matemático. Além disso, o fato de existirem professores que têm dificuldades no ensino da *variável* (JUÁREZ, 2011), e estudantes que não reconhecem as diferenças entre os símbolos literais usados na matemática (LUCARIELLO; TINE; GANLEYD, 2014; GARCIA; SEGOVIA; LUPIÁÑEZ, 2014), não quer dizer que estas dificuldades se reduzem a não dispor de uma definição das mesmas. As pessoas com mais experiência no discurso matemático escrevem expressões usando diferentes símbolos, e reconhecem o que é uma *variável* e o que não é, e esse entendimento pode ser tácito, baseado na sua experiência. O que queremos dizer é que uma definição exata da *variável* não é necessária para apreciar o que implica.

Contrário a ver as *palavras* como nomes das coisas do mundo, entendemos que as *palavras* usadas na matemática têm sentido só dentro das situações em que são usadas (SFARD, 2008). Particularmente, o alcance comunicativo da *variável* depende do contexto em que aparece, e caso ela se apresentasse sem contexto careceria de sentido. Portanto, a *variável* não é só etiquetas que correspondem diretamente a alguma coisa, ela é ambígua e comunica diferentes coisas em diferentes situações.

O discutido até agora apresenta a matemática de forma dinâmica, e é nesse dinamismo que constantemente emergem novas alternativas para usar as *palavras* na matemática (SFARD, 2008).

Dogbey (2015), por exemplo, apresenta uma breve descrição para mostrar como o uso da *palavra variável* tem sido transformado ao longo da história. Inicialmente essa *palavra* era usada para descrever quantidades desconhecidas, e posteriormente foi usada para se referir a quantidades correlacionadas na relação funcional. Segundo este autor (DOGBEY, 2015), Diophantus (aproximadamente 250 A.D.) foi o primeiro matemático em utilizar um símbolo literal para falar de uma quantidade desconhecida na matemática, e antes desse período os problemas matemáticos eram expressados e resolvidos retoricamente, exclusivamente com frases. Após de Diophantus, Viete (1540 - 1603) usou consoantes do alfabeto para falar de magnitudes e vogais para indicar as incógnitas em uma equação. Posteriormente, Descartes usou, no começo do século XVII, letras do alfabeto para comunicar parâmetros e as quantidades da relação funcional. Esse surgir histórico da *variável* ilustra o uso da *palavra* no discurso matemático como formas dinâmicas de comunicação ligada ao nosso atuar no mundo, e particularmente, a *variável* está fortemente ligada a diferentes momentos históricos e contextos sociais das pessoas.

A cada uma das maneiras como usamos as *palavras* no discurso matemático as chamaremos de "*realização*". Neste estudo, uma *realização da variável*, por conseguinte, são as diferentes formas comunicativas que se associam ou podem se associar à *palavra variável* na matemática. Por exemplo, uma *realização* da *variável* é a incógnita (ELY; ADAMS, 2012; JUPRI; DRIJVERS; HEUVEL-PANHUIZEN, 2014; RADFORD, 2014; DOGBEY, 2015). Mas, em outras situações, a *palavra variável* é usada para descrever uma quantidade dependente e independente em uma relação funcional, e esta seria outra *realização* da *variável* (ELY; ADAMS, 2012; VISEU; NOGUEIRA, 2014; OCHOVIET; OKTAÇ, 2011). Segundo Sfard (2008), as *realizações* podem assumir a forma de *palavra* falada ou escrita, desenhos, ícones, objetos manipuláveis ou até mesmo gestos. Seguidamente, definimos *conceito* como um conjunto de *realizações* que pode ser associado a uma *palavra* do discurso matemático para as designar.

Para ilustrar a nossa definição de *conceito* no discurso matemático (D.M.), imaginemos o conjunto de todas as possíveis *realizações* associadas à *palavra variável*, como ilustramos na figura (*Figura I*).

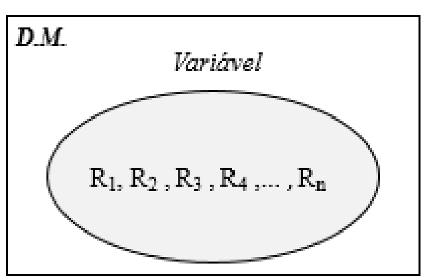


Figura 1. Conceito de *variável*

Na imagem, temos nomeado por R_i as diferentes *realizações* da *variável* presentes em diversos contextos ou situações da matemática. Todas essas *realizações* têm a forma de letras maiúsculas ou minúsculas do alfabeto romano ou grego. Conhecer a multiplicidade de *realizações* amplia as nossas possibilidades comunicacionais com esse *conceito*.

Vale ressaltar que uma mesma *realização* de um conceito pode ser apresentada a partir de diferentes mediadores visuais: de uma tabela, um gráfico, um desenho, um diagrama, etc. Essa ação de *apresentar* ou comunicar algo a partir de outro *mediador visual* chamaremos de *re-presentação*. Destacamos o prefixo "*re*" para indicar que é *apresentar* novamente uma ação – comunicativa –. Portanto, *re-presentar* neste estudo é o passo de um mediador visual a outro com o fim de comunicar novamente algo. Por exemplo, o enunciado: "*os dois sétimos de um número são 8*", poderia se *re-presentar* mediante um expressão simbólica: $\frac{2}{7}x = 8$; ou a partir de um desenho, como mostramos na *Figura II*:

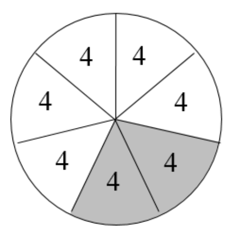


Figura 2. *Re-presentação* de dois sétimos

As vantagens relativas a cada uma das *re-presentações* depende da particularidade de cada situação. No exemplo anterior, a *re-presentação* simbólica prioriza o uso de rotinas para encontrar o valor da incógnita *x*. No caso do desenho, se gera uma melhor compreensão da proporção: *o oito corresponde às duas partes das sete em que foi dividida a quantidade desconhecida*.

Aqui nosso interesse é o *conceito de variável*. Queremos descrever as possibilidades comunicativas do seu conjunto de *realizações*. A seguir, nos aprofundamos no conceito de *variável* no discurso matemático, e na forma como se apresentam as suas *realizações* em diferentes situações estudadas na Educação Básica.

4.1. O conceito de variável no discurso matemático

As *realizações* da *variável* se apresentam como símbolos literais que comunicam diferentes aspectos do discurso matemático, a partir de dois movimentos discursivos estudados por Sfard (2008): *reificação e alienação*.

Por um lado, definimos o princípio de *reificação* como o ato de substituir ações por uma palavra ou um símbolo (SFARD, 2008). No caso da *variável*, as *realizações reificadas* surgem ao substituir frases por expressões escritas através de caracteres numéricos, operadores e símbolos literais. Nesse sentido, *reificar* é uma forma de *re-presentação* de frases mediante símbolos, como veremos a seguir:

Em uma sala de aula 10 alunos gostam de Matemática, 16 gostam de Arte, 5 gostam das duas disciplinas e 8 não responderam. Quantos alunos há nessa sala?

Nomearemos com A: o conjunto de alunos que gostam de Matemática; B: é o conjunto de alunos que gostam de Arte. Assim, substituímos a frase "*Alunos que gostam de ambas as matérias*" por $A \cap B$; e a frase: "Alunos que gostam de Matemática ou Arte" por $A \cup B$. Para responder a quantos alunos há nessa sala, resolvemos a expressão reificada $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, por tanto $n(A \cup B) = 10 + 16 - 5 = 21$.
Solução: Os alunos que gostam de Matemática ou de Arte são 21. Adicionando os 8 alunos que não responderam, temos 29 alunos nessa sala.

Quadro 1. Exemplo da *reificação* da *variável* (DANTE, 2014, p. 32)

No exemplo, vemos como se introduz um símbolo literal arbitrário para compactar uma ação – comunicativa – particular em uma narração simbólica. Portanto, é uma estratégia para *re-presentar* um enunciado de forma simplificada. A substituição de frases, tais como "alunos que gostam de arte" e "alunos que gostam da matemática", por símbolos simplifica em grande parte as narrações extremamente longas sobre essas agrupações. A *reificação* está longe de ser somente uma transformação local de uma frase ou um conjunto de ações pelo uso de uma única *palavra* ou de um símbolo literal, mas influencia todo o discurso, moldando novas narrativas associadas com esses *conceitos*. Vemos que uma vez *reificadas* as agrupações mediante as letras A e B, podemos escrever propriedades da forma: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Por outro lado, o princípio da *alienação* é aquele que usa as *realizações* da *variável* dissociadas de situações cotidianas, experimentando-as como se fossem independentes da atividade humana. Este movimento discursivo apresenta os *conceitos* de forma impessoal, como se estivessem acontecendo por si mesmos, sem a participação das pessoas, como se os *conceitos* estivessem desligados da atividade discursiva (SFARD, 2008). Uma vez *reificadas*, a *variável* pode se dissociar totalmente do ator, ou *alienar*. Ao eliminar as ações das pessoas, essas novas expressões aparecem como estruturas simbólicas, disfarçando eficazmente o fato de que são construções discursivas e, como tal, são feitas pelo humano, em vez de ser dados, ou seja, a *variável* aparecem sem nenhum nexo a um contexto específico. Por exemplo:

Dados x, e $x + h$ números reais, com $h \neq 0$, o número $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se **taxa de variação média da função f no intervalo** $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}]$.

Quadro 2. Exemplo da *alienação* da *variável* (DANTE, 2014, p.75)

Esses dois princípios contrastantes de *alienação* e *reificação* estão presentes em uma intricada rede de *realizações* que se deslocam em diferentes aspectos da matemática. O uso dos símbolos como algo que surge da simplificação de frases é o resultado da *reificação*, contrário à forma impessoal do discurso que temos chamado *alienação*. O papel do professor no ensino da *variável* é compreender e comunicar esses dois movimentos discursivos, por isso deve contemplar o esforço feito pela comunidade que constrói estratégias para definir as suas *realizações*; e conhecer as novas mudanças que são geradas no discurso (SFARD, 2007), não só em sala de aula, mas também nas pesquisas, nos livros didáticos, nas diretrizes curriculares, etc.

As formas discursivas *alienadas* são eficazes no que implica a geração de narrativas e rotinas associadas às *realizações* sobre estruturas simbólicas. Sfard (2008) também defende que as proposições *reificadas* tem, de fato, algumas vantagens comunicacionais únicas. No exemplo de *reificação* (*Quadro I*), vemos que a forma simbólica para nomear conjuntos de elementos permitiu criar definições e teoremas associadas com esses conceitos.

A visão da matemática como discurso, e a *variável* como um *conceito* que se *realiza* de múltiplas formas mediadas pelos movimentos discursivos de *reificação* e *alienação*, nos motivou a realizar esta pesquisa com o intuito de descrever as *realizações* da *variável* constituídas no ensino. A estruturação deste estudo nos conduziu ao campo de pesquisa chamado *Matemática para o Ensino* - $\boldsymbol{M_pE}$ (tradução nossa do inglês *Mathematics for Teaching*), o qual analisaremos na sessão a seguir.

5. MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL

A *Matemática para o Ensino* tem sido definida de acordo com certas posições epistemológicas, dando lugar a diferentes interpretações. No entanto, um consenso entre as diferentes posições reconhece que a base das teorizações está no trabalho de Shulman (1986, 1987). Este autor abordou o *conhecimento do professor*, referida aos domínios profissionais necessários para desempenhar a atividade do ensino. Shulman (1987) apresenta sete domínios: (1) conhecimento de conteúdo específico do ensino, (2) conhecimento pedagógico geral, (3) conhecimento do currículo, (4) conhecimento pedagógico do conteúdo, (5) conhecimento dos alunos e de suas características, (6) conhecimentos dos contextos educativos, e (7) conhecimento dos fins, propósitos e valores educacionais. Essas categorias contribuíram na caracterização do professor como profissional. Essa dimensão do trabalho do professor como algo especializado, implica uma formação específica no ensino, pois ele não só reproduz, ele também é responsável pela análise das aplicações e implicações na atividade escolar, e da reflexão sobre o currículo e aspectos metodológicos e didáticos do ensino.

Inspirados no trabalho de Shulman (1986, 1987), Ball e seus colaboradores (BALL; HILL; BASS, 2005; BALL; THAMES; PHELPS, 2008) desenvolveram subdomínios da categoria *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* especificamente no ensino da matemática. Estes autores conceituaram aquilo que é diferente na compreensão de um professor de matemática e na compreensão de um matemático.

Em contraste com as ideias de Ball (BALL; HILL; BASS, 2005; BALL; THAMES; PHELPS, 2008), que apresenta o ensino da matemática como a mobilização de diversos *Conhecimentos*, alguns pesquisadores têm argumentado que a matemática discutida em sala de aula é constituída na própria ação e participação discursiva dos professores (DAVIS, 2008, 2012; DAVIS; RENERT, 2009, 2012, 2014). Por um lado, Adler e Huillet (2008) afirmam que aquilo que é importante para o ensino da matemática tem uma natureza tácita, dificilmente identificável e mensurável. Por outro lado, Davis e Renert (2014, 2012b) apresentam a matemática dos professores como algo que emerge na prática discursiva, constituída socialmente pelo participantes no ensino da matemática.

Ainda que existam divergências para conceituar os elementos que circulam em torno do trabalho do professor, a ideia deste como profissional especializado no ensino é consensual. Assim como também é consensual a ideia de que não existe uma única forma de fazer matemática. É bem aceita a posição de que existe diferenças entre a matemática dos matemáticos, a matemática usada por outros profissionais, e a matemática usada pelos professores no ensino (DE PAULA, 2014).

Nesta pesquisa, chamaremos *matemática no ensino* à matemática especializada nas atividades escolares. A *matemática no ensino* é um tipo particular de discurso, cujo repertório está focado em uma complexa rede de *realizações* dos conceitos, assim como as rotinas e narrativas discutidas em sala de aula. Ainda que o professor seja responsável por conduzir os estudantes na participação desse discurso, esse repertório se configura socialmente a partir de diferentes experiências: tanto na mesma atividade dos professores, quanto na produção dos pesquisadores, como no desenho de materiais curriculares, de livros didáticos, nas avaliações a larga escala, nas diretrizes curriculares de matemática, e demais pessoas que voltam a sua atividade para a reflexão e produção de recursos para o ensino da matemática. Portanto, a estrutura conceitual da matemática que circula nas atividades escolares, assim como a forma de ensina-la, dá o caráter de profissional ao professor de matemática. Além disso, demarca o professor e demais participantes no discurso da *matemática no ensino* (pesquisadores, produtores de material didático, etc.) em um quadro de atividades compartilhadas, cujas ações particulares de cada um podem influenciar outros participantes.

Embasados nas fundamentações anteriores, a *Matemática para o Ensino*, cuja forma abreviada é $\boldsymbol{M_pE}$, é definida como modelos que apresentam o repertório discursivo da *matemática no ensino* (COUTINHO; BARBOSA, 2016; MEDUNI-BORTOLI, 2016; SANTOS; BARBOSA, 2016), isto é, a $\boldsymbol{M_pE}$ é toda re-presentação dessa matemática que se mobiliza em sala de aula. Agora, a palavra *modelo* é polissêmica. Comumente usamos o termo *modelo* para falar de um mapa, uma tabela, uma maquete, um desenho (como acontece com o modelo físico da estrutura do DNA na Biologia), etc. Aqui também falamos de *modelo* em um sentido amplo, para nos referirmos às formas de comunicação que apresentam algum tipo de atividade ou repertório discursivo. Por exemplo, um livro didático de matemática é uma $\boldsymbol{M_pE}$, porque nele se re-presenta uma estrutura de ensino da matemática, organizando e apresentando uma rede de *realizações* dos conceitos de acordo com o nível escolar. Além disso, o livro didático fala dos conceitos e propõe uma forma de conduzir o seu ensino. Outro exemplo de $\boldsymbol{M_pE}$ é encontrado nas perguntas e no conteúdo de uma prova a larga escada, porque nela se modelam os conceitos que devem ser ensinados em um determinado nível escolar, mas também define os aspectos da matemática relevantes, a forma como o professor deve questionar a um estudante, etc. Como outros exemplos de $\boldsymbol{M_pE}$, também poderíamos mencionar as diretrizes curriculares oficiais e a discussão de um grupo de professores, entre outros.

Além dos exemplos dados no parágrafo anterior, também podemos dimensionar a $\boldsymbol{M_pE}$ como um *modelo teórico*. O adjetivo teórico refere-se à re-presentação esquemática de alguma das nossas atividades discursivas. Por exemplo, há artigos científicos da Educação Matemática que também modelam conceitos matemáticos relevantes na escola. Os pesquisadores desses artigos discutem propostas de ensino ou analisam dificuldades dos estudantes para os utilizar, etc. Portanto, esses artigos científicos também podem se configurar como $\boldsymbol{M_pE}$.

Nesta pesquisa, particularmente, vamos a desenvolver um *modelo teórico da* $\boldsymbol{M_pE}$ *do conceito de variável*. O *modelo teórico* é a apresentação sistemática sobre como determinada classe de fenômenos ocorre. Nosso caso, o fenômeno que estamos apresentando são as *realizações* do conceito de *variável* na Educação Básica. Nosso interesse é sistematizar, organizar e estruturar as diversas *realizações* da *variável* da atividade escolar. Esta tese categoriza as *realizações* da *variável* discutidas e apresentadas em diversas produções relacionadas com o ensino da matemática. Quando falamos de categorizar, estamos nos referindo a relacionar as *realizações* de forma que possamos criar um panorama amplo acerca do conceito de *variável* ao longo da matemática. Portanto, nosso *modelo teórico* apresenta distintas categorias nas quais organizamos as *realizações* da *variável*, e discutimos a sua relação com outros conceitos da matemática.

A importância do desenvolvimento deste *modelo teórico* é organizar a variabilidade de produções que falam acerca da *matemática no ensino*, especificamente do conceito de variável: professores, pesquisadores, órgãos oficiais, etc. O *modelo teórico* será constituído a partir de multiplicidade de fontes a respeito do ensino da *variável*. Sistematizamos diferentes repertórios relacionados com o ensino do conceito de *variável*.

Consideramos importante esta pesquisa porque organiza como unidade discursiva o que se comunica em diferentes fontes acerca do ensino da *variável*. Este modelo teórico traz uma fonte do lado da outra, combinando as *realizações* em uma narrativa acerca da forma como é comunicado o conceito de *variável* em diferentes experiências de ensino**.**

Para desenvolver o modelo, elegemos como fonte para produzir os dados (1) artigos científicos da Educação Matemática acerca do conceito de *variável*, (2) as diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia, e (3) a discussão de um grupo de professores acerca da sua atividade em sala de aula, especificamente referida ao ensino da *variável* (ver *Figura III*).

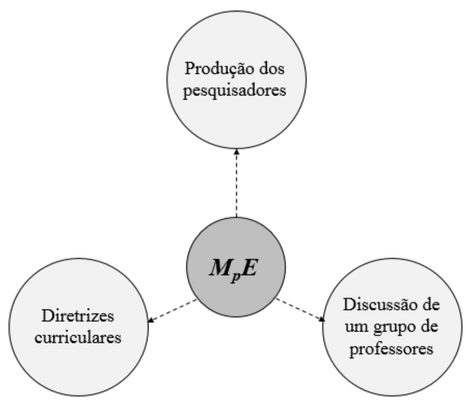


Figura 3. Fontes dos dados na pesquisa

A produção feita pelos pesquisadores têm discutido a característica da *variável* e as diferentes *realizações*, cujas ideias são importantes na configuração do nosso modelo. Por outro lado, as diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia definem os diferentes aspectos da matemática que devem ser discutidos em cada um dos níveis escolares, propondo orientações, perspectivas, guias e recomendações para a elaboração das grades curriculares, descrevendo as *realizações* da *variável* levadas a sala de aula de acordo com o grau escolar para leciona-las. A razão da delimitação das diretrizes curriculares exclusivamente de Brasil e Colômbia está explicitada mais adiante nos objetivos desta pesquisa. Finalmente, a discussão do grupo de professores gerou dados acerca das formas como eles ensinam a *variável*. De acordo com cada uma dessas fontes para produzir os dados do nosso modelo, definimos cada um dos objetivos específicos da pesquisa: *Construir um modelo teórico da Matemática para o Ensino -* $\boldsymbol{M_pE}$ *do conceito de variável.* O caminho para construir esse modelo, será explicitado na próxima sessão dos objetivos.

6. OBJETIVOS

O propósito geral desta pesquisa é *construir um modelo teórico da Matemática para o Ensino (M_pE) do conceito de variável*. As ações para alcançar este objetivo são apresentadas de forma pormenorizada e detalhada nos objetivos específicos.

6.1. Objetivos específicos

O ensino da *variável* tem sido discutido por pesquisadores na Educação Matemática, e por esse motivo organizamos os estudos relativos – artigos científicos – a este tema como fonte para o nosso modelo teórico. Escolhemos o *estudo documental* como estratégia para analisar os artigos científicos. A análise ou pesquisa documental é aquela realizada a partir de documentos considerados cientificamente autênticos (LUVEZUTE; SCHELLER; DE LARA, 2016). Entendemos por *documento* qualquer produção escrita.

Apesar de reconhecer a existência da multiplicidade e diversidade de fontes, nesta pesquisa documental enfatizamos os artigos científicos relacionados com o ensino do conceito de *variável*. Este estudo não discute os resultados obtidos pelos pesquisadores nos artigos científicos, somente seleciona as *realizações* da *variável* a partir dos exemplos, definições e expressões simbólicas no corpo dos artigos, por esse motivo consideramos tais artigos como *documentos* em vez de *literatura*. Assim, o nosso primeiro objetivo específico formula a integração da informação contida em diferentes artigos científicos, procurando descrever as *realizações* do conceito que aparecem nessas publicações. Formulamos o primeiro objetivo da seguinte forma:

- ***Construir um modelo teórico da Matemática para o Ensino - M_pE do conceito de variável a partir de dados documentados em artigos científicos relacionados com seu ensino.***

Outra fonte para produzir os dados são as diretrizes curriculares da matemática. Delimitamos esta fonte exclusivamente com dados do Brasil e da Colômbia. A escolha de ambos os países para produzir os dados corresponde ao lugar onde a pesquisa foi feita (Brasil) e o país de origem do autor desta tese (Colômbia), além da acessibilidade a informação dos dois países. As diretrizes curriculares se configuram como proposta curricular oficial para o ensino da matemática na Educação Básica tanto na Colômbia quanto no Brasil. Analisar os documentos curriculares de ambos os países nos fornece mais fundamentos para o nosso estudo. Escolhemos esta fonte de dados porque as diretrizes curriculares promovem e orientam o ensino da *variável* na Educação Básica, o que nos possibilita verificar o conceito demarcado nesses documentos. De acordo com isso, definimos o segundo objetivo específico da tese:

- ***Construir um modelo teórico da Matemática para o Ensino - M_pE do conceito de variável a partir das diretrizes curriculares da Matemática do Brasil e da Colômbia.***

Outra fonte para produzir os dados foi a reunião de um grupo de professores para discutir o conceito de *variável* no ensino. A estratégia para coletar os dados foi um curso com professores em exercício na Educação Básica. Essa atividade foi desenvolvida na cidade de Bogotá (Colômbia), como curso de extensão da *Universidad Católica de Colombia*. O curso teve uma duração de 60 horas distribuídas em 32 horas presenciais e 28 horas de trabalho independente. Esta atividade serviu como ferramenta para capturar e interpretar as *realizações* do conceito de *variável* que emergiram na discussão com os professores acerca das suas experiências em salas de aula. Assim, o objetivo específico que orientou este estudo foi:

- ***Construir um modelo teórico da Matemática para o Ensino - M_pE do conceito de variável a partir de um estudo com professores***.

Os modelos teóricos construídos como parte dos objetivos específicos dão uma compreensão parcial da $\boldsymbol{M_pE}$ do conceito de acordo com cada fonte analisada. A última parte desta tese, chamada *Considerações Finais*, relaciona teoricamente as diversas *realizações* da *variável* encontradas nas diferentes fontes. Este modelo teórico final é um panorama global acerca da $\boldsymbol{M_pE}$ do conceito de *variável*, construído a partir dos objetivos específicos, respondendo ao objetivo geral da tese, tal como mostramos no diagrama (*Figura IV*):

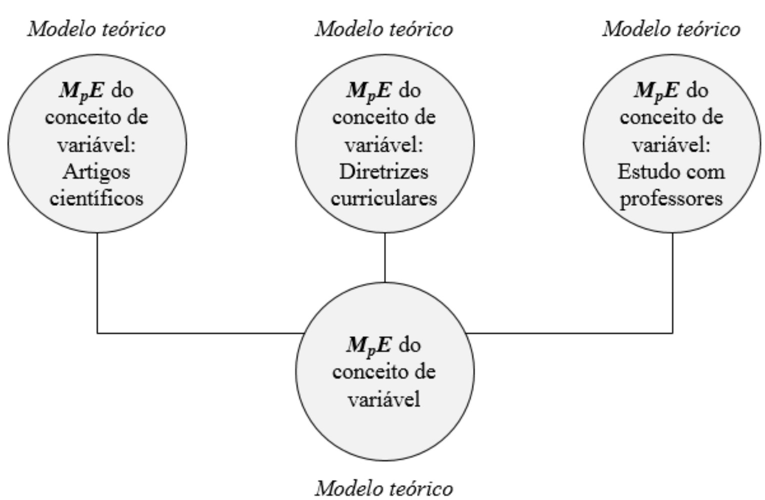


Figura 3. Estrutura da tese

O modelo teórico das Considerações Finais é delineado a partir das conclusões feitas nos artigos anteriores. Ressaltamos que os modelos não comunicam exaustivamente todos os elementos de uma situação, por isso entendemos que este recurso de comunicação é parcial. Qualquer modelo não esgota todos os aspectos envolvidos em uma situação, também não proporciona uma *re-presentação* dos fenômenos estudados de maneira completa e exata. Contudo, consideramos que um *modelo teórico* construído a partir de três diferentes fontes será um modelo mais refinado com respeito aos modelos teóricos anteriores.

A abordagem metodológica desta tese será apresentada mais adiante nos próximos capítulos à medida que relatarmos cada um dos estudos, por isso, a descrição de cada um dos objetivos são ideias preliminares que serão aprofundadas nos próximos capítulos. Finalmente, na última parte deste capítulo, apresentaremos e detalharemos como será a estrutura dos próximos capítulos.

7. ORGANIZAÇÃO NO FORMATO COMO COLEÇÃO DE ARTIGOS

Continuamente estão formando doutores em todos os países, e a escrita do relatório de pesquisa é uma parte essencial na formação desses doutorandos. Portanto, o número de teses publicadas está em constante crescimento. Por isso, consideramos que existe a necessidade de refletir acerca dos parâmetros que melhorem o uso e divulgação deste recurso. Duke e Beker (1999) argumentam que a avaliação prevalecente tem alternado a ideia de tese como instrumento de formação científica e como contribuição original e significativa à ciência. Nesse sentido, a tese deve permitir a socialização dos doutorandos na escrita científica, a apropriação de métodos de pesquisa e coleta de dados, e ao mesmo tempo contribuir com a ciência na publicação de artigos que gerem discussão na comunidade científica (DUKE; BECK, 1999). Contudo, em muitos casos, o público tradicional da tese é reduzido aos membros dos grupos de pesquisa, doutorandos do programa, talvez alguns colegas interessados na área e que podem ter sido persuadidos a ler.

Tentando resolver o problema do público limitado que leia a tese, atender a formação dos doutorandos e contribuir com o campo científico, adotamos o formato *coleção de artigos*, que consiste na escrita dos capítulos da tese como artigos independentes e prontos para sua publicação em uma revista. A este respeito, Duke e Beker (1999) referem-se a esta opção como a solução do problema do público limitado, tornando a tese acessível à toda comunidade científica e a todos os profissionais interessados na área.

A escrita da tese como *coleção de artigos* possibilita que seus resultados sirvam como uma peça autêntica de investigação, aumentando o impacto potencial sobre a pesquisa e a prática (DUKE; BECK, 1999). Além disso, a *coleção de artigos* é uma estratégia que possibilita que o pesquisador em formação aprenda a selecionar periódicos de acordo com a área de pesquisa, a preparar manuscritos que correspondam às normas editoriais das revistas, a resumir, condensar e dar sentido às ideias em pouco espaço, exercendo a capacidade de síntese, habilidades necessárias para o futuro doutor e pesquisador (BARBOSA, 2015). Escrever vários artigos com o acompanhamento do orientador e do grupo de pesquisa fornece experiências em redação científica que familiariza o pesquisador em formação com o discurso científico.

Em virtude disso, dividimos esta tese em cinco capítulos. O primeiro capítulo refere-se aos antecedentes da pesquisa, no qual apresentamos o objetivo e a relação deste com a trajetória pessoal do autor. Discutimos as contribuições das referências teóricas ao tema, e apresentamos a organização e escrita desta tese. Os próximos quatro capítulos seguintes correspondem aos quatro artigos a serem publicados, que tratam de temas particulares, mas que juntos se complementam para alcançar o objetivo geral da tese que é *construir um modelo teórico da Matemáticas para o Ensin*o - $\boldsymbol{M_pE}$ *do conceito de variável*.

Cada um dos artigos foi produzido de acordo com as normas editoriais da revista em que foram submetidos, incluindo a língua do periódico e a forma de citar as referências. Dessa forma, apresento o artigo um, segundo capítulo da tese, intitulado *Un modelo teórico de la Matemática para la Enseñanza del concepto de variable a partir de artículos científicos relacionados con su enseñanza*. Este artigo está escrito em espanhol para atender as normas editoriais da Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – (RELIME). O artigo dois, terceiro capítulo da tese, é intitulado *Um modelo teórico da Matemática para o Ensino* - $\boldsymbol{M_pE}$ *do conceito de variável a partir das diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia*, escrito em português para ser submetido no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA). O artigo três, quarto capítulo da tese, tem como título *Un modelo teórico de la Matemática para la Enseñanza* - $\boldsymbol{M_pE}$ *del concepto de varible a partir de un estudio con profesores*, escrito em espanhol conforme as instruções da Revista Educación Matemática. E finalmente, o artigo quatro e quinto capítulo da tese é intitulado *A theoretical model of the Mathematics for Teaching –* M_fT *of the concept of variable*, escrito em inglês conforme as normas editoriais da revista The Journal of Mathematical Behavior. Neste último artigo, apresento as considerações finais da pesquisa que surgiram na discussão transversal dos resultados apresentados nos artigos anteriores, considerando as possíveis contribuições da pesquisa e as implicações para a Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ADLER, J.; HUILLET, D. The social production of mathematics for teaching. In: WOOD, T. S., SULLIVAN, P. (Vol. Eds). *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 1. Sullivan, P., (Ed.), Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers, 2008. P. 195-222.

BALL, D. L.; HILL, H. H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, v. 29, n. 1, p. 14-46, 2005.

BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, V. 59, N. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, J. Formatos insubordinados de dissertações e teses na educação matemática. In: B. D'AMBROSIO, S.; LOPES, C. *Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática*. Campinas, SP: Vande Rotta Gomide, 2015. P. 347-367.

COUTINHO, J. L.; BARBOSA, J. Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, v.18, n.2, p.783-808, 2016.

DANTE, L. R. Matemática: Contexto e aplicações. Manual do professor. Segunda edição. São Paulo: Editora ática, 2014. Volume 1. Matemática (Ensino Médio).

DAVIS, B. Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM)*, v. 14, n. 2, p. 86-91, 2008.

DAVIS, B. Subtlety and Complexity of Mathematics Tecaher's Disciplinary Knowledge. In: 12th ICME (Eds.), International Congress on Mathematical Education, 12th, 2012, ICME (Memórias do evento) Seoul, Korea, 2012, p. 214-234.

DAVIS, B.; RENERT, M. Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

DAVIS, B.; RENERT, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, N. 82, p. 245-265, 2012.

DAVIS, B.; RENERT, M. The Math Teachers Know: Profound Understanding of Emergent Mathematics. Routledge. New York: *Editorial Routledge*, 2014. P. 141.

DE PAULA, E.F. Professor De Matemática, Matemático E Educador Matemático: Alguns Apontamentos Sobre Os Profissionais Que Ensinam Matemática. *Publicatio UEPG: Ciências Humanas, Linguistica, Letras e Artes*, V. 22, N. 2, p. 159-167, 2015.

DOGBEY, J. Using Variables in School Mathematics: Do School Mathematics Curricula Provide Support for Teachers? *International Journal of Science and Mathematics Education***,** V. 14, N. 6, p.1175-1196, 2015.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. *Educational Researcher.* Washington, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

ELY, R.; ADAMS, A. E. Unknown, placeholder, or variable: what is x? *Mathematics Education Research Journal***,** [s.l.], V. 24, N. 1, p.19-38, 2012.

ESCALANTE, J. E.; CUESTA, A. Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*. México, v. 24, n. 1, p. 107-132, 2012.

GARCIA, J.; SEGOVIA, I.; LUPIÁÑEZ, J. L. El Uso de las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1545-1566, 2014.

HERRERA, H.; CUESTA, A.; ESCALANTE, J. E. El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educación Matemática*. México, v. 28, n. 3, p. 217-240, 2016.

JUÁREZ, J. A. Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*. México, v. 76, p. 83–103, 2011.

JUPRI, A.; DRIJVERS, P.; HEUVEL-PANHUIZEN, M. D. Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal***,** [s.l.], V. 26, N. 4, p. 683-710, 2014.

KÜCHEMANN, D. E. Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, V. 7, N. 4, p. 23-26, 1978.

LUCARIELLO, J.; TINE, M. T; GANLEYD, C. M. A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior, v*. 33, p. 30– 41, 2014.

LUVEZUTE, R. M.; SCHELLER, M.; DE LARA, D. La investigación documental sobre la investigación cualitativa: conceptos y caracterización. *Revista de Investigaciones UNAD*, V. 14, N. 2, p. 55-73, 2016.

MEDUNI-BORTOLOTI, R. A. *Um estudo sobre a Matemática para o Ensino de Proporcionalidade*. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2016.

MEN - MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO NACIONAL. *Decreto 272 do 11 de fevereiro de 1988*. Bogotá - Colombia. 1998a.

MEN - MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO NACIONAL. *Estándares curriculares de matemáticas*. Bogotá - Colombia, 2000.

MEN - MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO NACIONAL. *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá - Colombia, 1998b.

OCHOVIET, C.; OKTAÇ, A. Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado: Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Educación Matemática*, v. 23, n. 3, p. 91-121, 2011.

QUINO, W. V. Variables explained away. *Proceedings of the American Philosophical Society*, v. 104, n. 3 p. 343-347, 1960.

ROBINSON, J. Wittgenstein, sobre el lenguaje. *Departamento académico de relaciones internacionales, ITAM, estudios 102*. México: v. 10, p. 7-32, 2012.

SANTOS, G. L.; BARBOSA, J. Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de um estudo com professores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 48, p. 143-167, 2016.

SCHOENFELD, A.; ARCAVI, A. On the meaning of the variable. In *Mathematics Teacher*, v. 81, n. 6, p. 420-427, 1988.

SFARD, A. Introduction: Developing mathematical discourse: Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, [s.l.], v. 51-52, p.1-9, 2012.

SFARD, A. On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, V. 27, N. 3, p. 4-13, 1998.

SFARD, A. Participacionist discourse on mathematics learning. In: MAASZ, J; SCHLÖGLMANN, W (Edits). New Mathematics Education Research and Pratice. Roterdã: Sense Publishers, 2006. P. 153-170.

SFARD, A. There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. In: ANNA SFARD (Autora). *Learning Discourse.* Springer Netherlands, 2002, p. 13-57.

SFARD, A. Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. P. 352. Series editor *EMERITUS*

SFARD, A. When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of Learning Sciences*, p. 565-613, V. 16, N. 4, 2007.

SFARD, A.; LINCHEVSKI, L. Between Arithmetic and Algebra: in the search of a Missing link the casa of equations and inequality. *Rendiconti del Seminario Matematico - Univertià e Politecnico Di Torino - RSMUPT*, v. 52, n. 3, p. 279-307, 1994.

SHULMAN, L.S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SHULMAN, L.S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SUÁREZ, J. G.; ALEX, I. S.; GÓMEZ, J. L. L. El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*. Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1545-1566, 2014.

TRIGUEROS, M.; URSINI, S. Starting college students' difficulties in working with different uses of variable. *Research in Undergraduate Mathematics Education. American Mathematical Society*, vol. 5, 2003.

USISKIN, Z. Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In: BARBARA MOSES (Edit). Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 1999. P. 7–13.

VISEU, F. A.; NOGUEIRA, D. Desenvolvimento do pensamento algébrico de uma aluna do 10.º ano. *REVEMAT: Revista Electrónica De Educação Matemática*, Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 23-56, 2014.

WILKIE, Karina J.; CLARKE, Doug M. Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, [s.l.], v. 28, n.2, p. 223-243, 2015.

CAPÍTULO 2

UN MODELO TEÓRICO DE LAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE A PARTIR DE ARTÍCULOS CIENTÍFICOS RELACIONADOS CON SU ENSEÑANZA

RESUMEN: Este artículo desarrolla un modelo teórico de las *Matemáticas para la Enseñanza* del concepto de *variable*, el cual corresponde a una estructura teórica que describe la forma como es comunicada la *variable* en la actividad escolar. Los datos se obtuvieron de 17 artículos científicos seleccionados sistemáticamente, teniendo como base la clasificación oficial de la agencia para el fomento de la educación brasilera - CAPES en el año 2016, y los cuales presentan estudios específicos sobre el concepto de *variable*. La estrategia metodológica para sintetizar los datos es un análisis documental. Este modelo se presenta a partir de cuatro categorías que organizan las situaciones escolares que usan el concepto de *variable*: como incógnita o cantidad indeterminada; en la relación funcional; como marcador de posición; y como nomenclatura en el estudio de la medida. Este modelo puede subsidiar investigaciones que se focalicen en la enseñanza del concepto de *variable*, así como el trabajo de delineadores de materiales didácticos y en la formación de profesores.

PALABRAS CLAVE: Discurso. Variable. Realización. Concepto. Matemáticas para la Enseñanza.

ABSTRACT: This scientific paper develops a theoretical model of the Mathematics for Teaching of the concept of variable, which corresponds to a theoretical structure that describes how the variable is communicated in the school activity. The data were obtained from 17 scientific papers systematically selected, based on the official classification of the agency for the promotion of Brazilian education - CAPES in 2016, and which present specific studies on the concept of variable. The methodological strategy to synthesize the data is a documentary analysis. This model presented four categories that organize school situations using the concept of variable: as an unknown quantity; in functional relationship; as placeholders, and as nomenclature associated with a number or magnitude. This model can support research that focus on teaching the concept of variable, as well in the work of eyeliners of didactic materials and teacher training courses.

KEYWORDS: Discourse. Variable. Realization. Concept. Mathematics for Teaching

1. INTRODUCCIÓN

La *variable* es un recurso usado en la enseñanza de las matemáticas para simbolizar cantidades y formas. El motivo de tal simbolización es aglutinar información, haciéndola más fácil de comprender y manipular (Schoenfeld & Arcavi, 1988; Sfard & Linchesky, 1994). Sin embargo, describir la *variable* no se reduce hablar de su forma visual, sino de la forma como aparece a lo largo de las matemáticas (Viseu & Nogueira, 2014).

La *variable* es fundamental en la Educación Básica (con estudiantes entre 6 a 18 años), y es un vínculo entre diferentes aspectos de las matemáticas, como aritmética, álgebra, geometría, etc. (Schoenfeld & Arcavi, 1988). Es quizás por ese motivo que este concepto ha sido de interés para investigadores en Educación Matemáticas, quienes han desarrollado una serie de producciones científicas que analizan sus características (Küchemann, 1978; Usiskin, 1999; Ursini, 2011); han discutido las dificultades en su enseñanza (Lucariello, Tine & Ganleyd, 2014; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014; Escalante & Cuesta, 2012); o desarrollado propuestas para que su enseñanza sea más efectiva (Wilkie & Clarke, 2015; Ely & Adams, 2012). En esta sesión usamos el término *concepto* sin una definición previa, y le pedimos al lector comprenderlo intuitivamente que más adelante se detallará su significado.

Ahora bien, algunos autores definen la *variable* únicamente como símbolo literal asociado a cantidades que están sujetas a algún cambio, como ocurre con las cantidades dependiente e independiente de la relación funcional (García, Segovia & Lupiáñez, 2014, Küchemann, 1978). Sin embargo, hay otros autores que traen una definición más amplia del *concepto de variable*, interpretándolo como símbolos literales que aparecen en diferentes aspectos de las matemáticas (Usiskin, 1999; Dogbey, 2015; Escalante & Cuesta, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014). En este estudio, llamaremos *variable* a toda letra usada en las matemáticas que permite describir enunciados en forma simbólica. Por lo tanto, aclaramos que este trabajo discute el *concepto de variable* en un sentido amplio, considerándolo como instrumento para simbolizar diferentes aspectos de las matemáticas.

En este artículo desarrollaremos un *modelo* a partir de la categorización de las distintas situaciones matemáticas, estudiadas en la Educación Básica, donde aparece la *variable*. Nos referimos por *modelo* a todo esquema que presenta de forma simplificada una variedad de situaciones. Específicamente, construiremos un *modelo teórico* donde se discute la *variable* en ciertas situaciones matemáticas. Los datos para desarrollar este *modelo* serán obtenidos en diferentes producciones bibliográficas que hablan cerca de las matemáticas específicas para la enseñanza, por lo que relacionamos este estudio con el campo de investigación llamado *Matemáticas para la Enseñanza.*

Matemáticas para la Enseñanza, del inglés *Mathematics for Teaching*, la cual abreviaremos $\boldsymbol{M_pE}$, es un campo de investigación que se viene consolidando desde hace tres décadas y en el que se han hecho diversas publicaciones (Adler & Davis, 2006; Adler & Huillet, 2008; Chapman, 2013; Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014), cuyo foco es definir y demarcar las matemáticas que se movilizan y se producen en diversas actividades relacionadas con la enseñanza. Ahora bien, si los conceptos matemáticos estudiados en la escuela se configuran en diferentes experiencias, ya sea en grupos de profesores, en artículos científicos, en directrices curriculares, en libros didácticos, etc, cuyas producciones son las que llamamos $\boldsymbol{M_pE}$, entonces podríamos decir que existe una variabilidad de $\boldsymbol{M_pE}$ que habla específicamente del *concepto de variable*, donde se desarrollan formas particulares de hablar de ese concepto. Un ejemplo de esta producción es el trabajo de Escalante & Cuesta (2012), quienes presentan la *variable* como símbolos literales usados en diferentes situaciones matemáticas, ya sea como incógnitas, como relación funcional o como números generales; y esa visión de la *variable* contrasta con la discusión teórica que presenta Ely & Adams (2012), quienes hablan, en forma general, de *letras algebraicas*, destacando específicamente como parte de ellas la *variable*, definida por estos autores como un rango de valores en una relación funcional. Esa forma de entender la *variable* por parte de los investigadores, quizás tenga cosas en común o se distancie de la forma como es presentado *el concepto de variable* en libros didácticos, en directrices curriculares, en pruebas estandarizadas, etc. Por ese motivo, este *modelo teórico* propone la combinación, sistematización y organización de diversas formas de presentar el concepto de *variable* en las producciones científicas, específicamente que hablan de su enseñanza en la Educación Básica.

En este estudio hemos hecho un recorte, y analizaremos y organizaremos el *concepto de variable* presentado en artículos científicos de la Educación Matemática, y a partir de esos datos desarrollaremos un *modelo teórico* del *concepto de variable*, inspirados en los estudios de Coutinho & Barbosa (2016) relacionados con *el concepto de combinación simple*, Menduni-Bortoloti (2016) con *el concepto de proporcionalidad* y Santos & Barbosa (2016) con *el concepto de función*. La importancia de este *modelo teórico* está en la organización sistemática de las $\boldsymbol{M_pE}$ presente en artículos científicos, específicamente en lo que dicen al respecto de la *variable.* Así, actualizamos el objetivo de esta pesquisa: "*Construir un modelo teórico de las Matemáticas para la Enseñanza del concepto de variable a partir de artículos científicos*". Debido a la importancia que tiene para nuestro estudio el *concepto de variable* y la definición de *Matemáticas para la Enseñanza*, abordaremos estos tópicos con mayor profundidad en próximas sesiones.

Esperamos que la caracterización que presentamos en este estudio sirva como base para la formación de profesores, por ser ellos quienes movilizan este concepto en el salón de clase. El modelo puede servir para dar visibilidad, durante la formación de profesores, a las diversas formas de presentar el concepto de *variable.* Igualmente, puede servir para delineadores de materiales didácticos. Este modelo teórico presentado aquí llama la atención sobre la diversidad de formas de abordar el concepto de *variable* en la matemática escolar. Además, esta estructura teórica puede ser utilizada para el análisis de datos en investigaciones en Educación Matemática que se focalicen en el concepto de *variable*.

2. EL CONCEPTO DE VARIABLE EN EL DISCURSO MATEMÁTICO

Como presupuesto inicial partimos de la idea de que la comunicación es una actividad social que sirve para el entendimiento entre las personas, y con la cual hablamos de todas nuestras acciones humanas. Por lo tanto, las posibilidades comunicativas son innumerables, llevándonos a construir repertorios de comunicación que hablan de diferentes aspectos de nuestra vida. Por ejemplo, entre nuestras expresiones podríamos distinguir formas de comunicación que hablan acerca de acciones de medida, ya sea del tiempo, de distancias, volúmenes, etc., cuyo repertorio emerge y es producto de las múltiples transformaciones a través del tiempo – histórica –. Ciertamente, las acciones comunicativas que usábamos para hablar de la medida hace un par de siglos atrás son diferentes a nuestra actividad de hoy. Estas acciones métricas son usadas en diferentes situaciones, como en la actividad de un químico o un físico, que necesitan de instrumentos y acciones precisas de medición, lo cual contrasta con el uso de la medida en situaciones cotidianas: cuando cocinamos, cuando hablamos de nuestra edad, etc., la cual no requiere de tanta aproximación métrica.

De acuerdo con Sfard (2008), llamaremos *discurso* a cada uno de los repertorios de comunicación. Así, la Biología, la Psicología y las Matemáticas podrían ser definidas como *discursos* que hablan de la vida, de la conducta humana y de las propiedades y relaciones entre cantidades y formas, respectivamente.

Según Sfard (2008), las matemáticas son un tipo particular de discurso que se diferencia de otros por el uso de una serie de *palabras clave*, como variable, tres, triángulo, función, conjunto, fracción, segmento, circunferencia, etc.; por los *mediadores visuales*, que son recursos para comunicar acciones en forma escrita: caracteres numéricos ($1, \frac{2}{7}, 0, \widehat{34}$, etc.), símbolos literales ($x, a + b, y^2$, etc), operadores aritméticos ($+, \div, \{\}, [], \sqrt{}, \leq, \neq, =$), gráficos, etc.; por las *narrativas* endosadas, es decir, proposiciones validadas socialmente por los participantes del discurso, tales como teoremas, definiciones; y las *rutinas*, entendidas como un conjunto sistemático de patrones que se repiten en determinado tipo de situaciones (comúnmente llamados algoritmos o fórmulas matemáticas). Tanto el significado de las *palabras clave*, como el uso de los *mediadores visuales*, así como el desarrollo de *narrativas* y *rutinas* matemáticas reflejan el dinamismo de las acciones humanas (Sfard, 2012).

Con respecto a las *palabras clave*, identificamos una diversidad de formas de usarlas. Por ejemplo, en la Educación Básica se introduce la *palabra clave* "*variable"* cuando los estudiantes alcanzan una edad entre 11 y 15 años aproximadamente; y posteriormente, en años siguientes, aparecerán otras *palabras clave* como función, límite, etc. De igual forma, al avanzar en los diferentes grados escolares, comienza a modificarse los usos de la *palabra clave* "*variable"* y ampliarse a otras posibilidades comunicativas. Las letras que fueron usadas como valor desconocido o incógnito en una ecuación (Juárez, 2011; Ely & Adams, 2012), pasan a ser usadas también para hablar de cantidades en una relación funcional (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Epp, 2011), entre otros usos. Por lo tanto, el significado de las *palabras clave* está en cada situación en que son usadas (Sfard, 2008). Por ello, las *palabras clave* del discurso matemático son formas dinámicas de comunicación, cuyos usos transitan constantemente en diferentes formas de comunicación, que de ahora en adelante llamaremos *realizaciones*. Según Sfard (2008), las *realizaciones* pueden tener la forma de palabras – habladas o escritas –, símbolos algebraicos, dibujos u objetos manipulables. Inspirados en Sfard (2008), definimos *concepto* como un conjunto de *realizaciones* que pueden asociarse a una *palabra clave* del discurso matemático para designarlas. En este estudio no concebimos *concepto matemático* como una instancia anterior o superior a las *realizaciones*, puesto que los conceptos se constituyen a partir de ellas.

Cuando hablamos del *concepto de variable*, por lo tanto, nos estamos refiriendo a un conjunto de *realizaciones* que pueden asociarse a la palabra *variable*. Entre más *realizaciones* conozcamos más amplia será nuestra posibilidad de comunicación. En otras palabras, la enseñanza se constituye como la inscripción de los estudiantes en la participación discursiva, como seres activos; y la tarea del profesor es ampliar las posibilidades de uso de los conceptos matemáticos al demarcar sus *realizaciones*.

Cada *realización* puede comunicarse usando diferentes *mediadores visuales*, como tablas, expresiones simbólicas, gráficos, dibujos, diagramas, objetos manipulables, etc.; y la acción de comunicar algo usando un *mediador visual* la llamaremos *re-presentación*. Destacamos el prefijo *re* para indicar que nos referimos a comunicar algo nuevamente. Esta definición se distancia de la idea de *re-presentación* que habla de una separación entre *mediadores visuales* y los entes re-presentados, tal como lo hace Duval (1993). Bajo nuestra perspectiva, no existe tal separación, porque las *re-presentaciones* corresponden a actividades dinámicas y sociales, las cuales se crean, se transforman y se enriquecen en la misma participación discursiva. Las *re-presentaciones* son formas de comunicación que emergen de la actividad social y no como un reflejo de algo independiente a las acciones humanas.

Las *realizaciones* de la *variable* están implicadas por dos movimientos discursivos estudiados por Sfard (2008), *reificación* y a*lienación*. Inspirados en Sfard (2008), definimos la *reificación* de las *realizaciones* de cualquier concepto, por tanto aplicable para las *realizaciones* de la *variable*, como la *re-presentación* de una acción discursiva en expresiones simbólicas. En el caso de las *realizaciones* de la *variable*, la técnica es introducir un símbolo –*una letra* - que ayuda a compactar una serie de expresiones en forma simbólica (Sfard, 2008). Para ilustrar esto, planteamos dos ejemplos (Tabla 1):

Proposición	**Reificación**
El doble de la edad de Carmen	$2x \rightarrow x$: la edad de Carmen
El perímetro de un rectángulo	$2m + 2n \rightarrow$ m, n: la medida de los lados

Tabla 1. Ejemplo de la reificación. Fuente: Autores

El símbolo literal es un instrumento para *re-presentar* simbólicamente enunciados, cuya *reificación* está lejos de ser simplemente una transformación local de una frase o un conjunto de acciones discursivas por el uso de símbolos. La *reificación* es una acción que influye en todo el discurso, moldeando nuevas narrativas asociadas a esas estructuras simbólicas emergentes (Sfard, 2008). Por ejemplo, la *reificación* de acciones discursivas en expresiones llamadas *ecuaciones* posibilitó el desarrollo de un repertorio discursivo, con *palabras clave* propias*, mediadores visuales, rutinas* y *narrativas* asociadas a esas estructuras simbólicas.

Por otro lado, definimos *alienación* como la disociación de las estructuras simbólicas de su origen discursivo, como si ocurrieran sin la participación de los seres humanos (Sfard, 2008). Particularmente, la *forma alienada* de las *realizaciones* de la *variable* desliga el símbolo literal de situaciones particulares, ocultando el hecho de que son construcciones discursivas, como vemos en el ejemplo (Cuadro 1):

Simplificar la expresión $\boldsymbol{3x + 2y - 9 + 4x + 6}$
$\boldsymbol{= (3x + 4x) + 2y + (-9 + 6) = 7x + 2y - 3}$

Cuadro 1. Ejemplo de alienación. Fuente: Autores

Vemos que los símbolos “x" y "y” no poseen referencia discursiva, es decir, no están asociados a ninguna situación particular. Por lo tanto, las *realizaciones* de la *variable* pueden emerger como *re-presentación* de un problema particular o pueden aparecer como estructuras simbólicas disociadas de acciones humanas.

Esta forma de dimensionar el concepto de *variable* como acción discursiva, nos lleva a enfocarnos exclusivamente en sus *realizaciones*. Específicamente, en las *realizaciones* movilizadas para la enseñanza de las matemáticas, y de ahí es que conducimos este estudio en lo que llamamos *Matemáticas para la Enseñanza* - $\boldsymbol{M_pE}$, lo cual analizaremos en la siguiente sesión.

3. MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE

$\boldsymbol{M_pE}$ han sido definidas a partir de las teorizaciones de Shulman (1986, 1987), quien elaboró un marco teórico para describir *los conocimientos del profesor*. Según Shulman (1986, 1987), el profesor transforma diferentes contenidos (curricular, pedagógico y disciplinar) en sus clases, cuya identidad epistemológica puede reconocerse a partir de la influencia de estos campos teóricos sobre su actividad. En la caracterización de los *conocimientos del profesor*, Shulman (1986, 1987) propuso una categoría llamada *conocimiento didáctico del contenido*, la cual es focalizada por Ball, Hill & Bass (2005) para elaborar la idea del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*. Esa categoría diferencia, por ejemplo, la comprensión que tiene un matemático a la de un profesor de matemáticas. Ball, Thames & Phelps (2008) definen los elementos necesarios para la enseñanza de las matemáticas como profesional que vivencia su especialidad en los procesos de enseñanza. De igual forma, Ball y sus colegas (Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames & Phelps, 2008) abrieron una puerta para que otros investigadores estudiaran la especificidad de las matemáticas practicadas por los profesores (Adler & Huillet, 2008; Davis & Renert, 2014; Adler & Davis, 2006; Chapman, 2013; Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014).

Esas teorizaciones acerca de la enseñanza traen elementos importantes para el desarrollo de las *Matemáticas para la Enseñanza* - $\boldsymbol{M_pE}$. Las ideas iniciales de Ball (Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames & Phelps, 2008) acerca del *conocimiento matemático para la enseñanza*, que llamamos simplemente de *matemáticas de la enseñanza*, el cual define el contenido matemático necesario para la enseñanza, son ampliadas por otros autores que presentan las *matemáticas de la enseñanza* como aquello que se constituyen en la acción y en la participación discursiva (Davis & Simmt, 2006; Davis, 2008; Davis & Renert, 2014; Adler & Huillet, 2008). Para Davis & Renert (2014), por ejemplo, las acciones del profesor no se reducen a la externalización de un contenido, en tanto los profesores no sólo portan y aplican, sino que crean y promueven cambios alrededor de su actividad.

En este estudio nos distanciamos de la visión de *matemáticas de la enseñanza* como aquello que necesitan los profesores para su desempeño en salón de clase. Para nosotros, las matemáticas movilizadas en la enseñanza se configuran en la propia actividad discursiva, y emergen en las diferentes actividades de sus participantes. Consideramos como participantes de este discurso a los estudiantes y profesores de licenciatura, quienes discuten en su ambiente universitario formas de conducir la enseñanza de las matemáticas; otros participantes de este discurso son los profesores de la Educación Básica, quienes se reúnen en espacios de formación y actualización docente para compartir experiencias de enseñanza de las matemáticas; otros participantes son los investigadores de la Educación Matemática, quienes definen marcos teóricos y desarrollan propuestas de enseñanza; también consideramos como participantes al personal que produce materiales educativos: libros didácticos, materiales manipulables, etc; también participan del discurso de las *matemáticas de la enseñanza* miembros de instituciones oficiales que regulan el currículo escolar; otros participantes son quienes formulan los cuestionarios de pruebas estandarizadas; y así sucesivamente podemos incluir como participantes discursivos todas las demás personas que reflexionan, teorizan, analizan y producen material para la enseñanza de las matemáticas. Todas esas diferentes experiencias no son actividades aisladas, ya que los *modelos* acerca de su comprensión de las *matemáticas de la enseñanza* confluyen en la configuración de ese repertorio discursivo, pudiendo influenciar la actividad del profesor en el salón de clase. Hablamos de *modelos* porque no es la enseñanza propiamente tal como ocurre emergentemente en el salón de clase, sino una descripción de lo que puede suceder. En ese sentido, las $\boldsymbol{M_pE}$ son cada uno de los *modelos* producidos en las diferentes experiencias de enseñanza.

En este estudio, construimos un tipo de modelo posible, un *modelo teórico,* para organizar las $\boldsymbol{M_pE}$ del *concepto de variable*, es decir, desarrollar un esquema teórico basado en las *realizaciones* de la *variable* discutidas en diversas $\boldsymbol{M_pE}$. En este artículo, particularmente, hicimos un recorte, y modelaremos las *realizaciones* del concepto de *variable* registradas en pesquisas en Educación Matemática. Diversos artículos científicos se han escrito con relación a este tema, con diferentes miradas acerca de la *variable*. Aclaramos que los artículos científicos no se basan necesariamente en los mismos referentes teóricos que adoptamos en este estudio, inclusive, la definición de *variable* puede ser diferente a la que hemos formulado, sin embargo, la discusión en términos de *realizaciones*, la definición de *variable* que hemos adoptado y la perspectiva de $\boldsymbol{M_pE}$ está bajo nuestras apropiaciones e interpretaciones teóricas, las cuales servirán de base para analizar los artículos científicos. Por eso aclaramos que lo que nosotros nombramos por *variable*, por *realización* y por $\boldsymbol{M_pE}$ no necesariamente estará definido de tal forma en los artículos originales.

Nuestro interés en las producciones científicas de Educación Matemática es porque ellas abarcan diferentes usos del concepto de *variable*, razón por la cual es un tipo de fuente fructífera para componer un corpus de datos para el presente estudio. Así que nos hemos preocupado por buscar esas producciones, haciendo una revisión detallada para capturar la información que será condensada en nuestro *modelo teórico*.

4. PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS

Para identificar las *realizaciones* que configuran el concepto de *variable* en los diferentes artículos científicos, hemos escogido como estrategia de análisis el estudio documental. El estudio documental extrae aspectos relevantes de los documentos analizados, siendo una estrategia en la cual se observa y se reflexiona sistemáticamente sobre su contenido, indagando, interpretando y presentando datos e información sobre nuestro tema de estudio (Baena, 2014). Notemos que a pesar del *corpus* estar compuesto por artículos científicos, no buscamos realizar un estudio de revisión sistemática. Nuestro interés fue solamente identificar las *realizaciones* del concepto de *variable*, razón por la cual el *corpus* se constituye, por la forma como fue utilizada, como documentos.

Los artículos científicos fueron seleccionados a partir de criterios de exclusión para garantizar la elección de estudios de mayor accesibilidad para la comunidad científica, y que presente una diversidad plausible de *realizaciones* del concepto de variable. De acuerdo a ello, uno de nuestros criterios fue seleccionar artículos científicos publicados en revistas de Educación Matemática o Enseñanza de las matemáticas, clasificados por la Coordinación de Perfeccionamiento del Personal de Nivel Superior – CAPES (Brasil) y cuya clasificación haya sido A1, A2, B1 o B2, ya sea en el área de Enseñanza o de Educación.. Tenemos en cuenta la clasificación oficial elaborada por la CAPES vigente en 2016, la cual se realiza en siete estratos: A1, A2, B1, B2, B3, B4, B5, C. Otros criterios de selección fue el año y el idioma de publicación, en este sentido, seleccionamos artículos de acceso libre para los investigadores que hayan sido publicados entre el año 1990 y el 2015, asumiendo que 25 años es suficiente para tener un amplio alcance de *realizaciones* del concepto, además, restringimos sólo aquellos estudios que hayan sido escritos en español, inglés o portugués. Esta revisión fue hecha directamente en la WebQualis de la CAPES, cuya página web se encuentra disponible en http://qualis.capes.gov.br/.

El proceso de búsqueda de estudios que presenteban *realizaciones* del concepto de *variable* se desarrolló en varias etapas. Lo primero que se hizo fue ingresar a la WebQualis y realizar una lista con las revistas seleccionadas, después de verificar los criterios de exclusión. A continuación accedimos a la página web de cada periódico para revisar todos los volúmenes y números publicados entre 1990 y 2015, por ser uno de los criterios anteriormente descritos. En segundo lugar, después de leer los títulos, palabras clave y resúmenes, se detectan los artículos que guardan relación con nuestra investigación. Finalmente, pasamos a leer de forma integral todos los artículos filtrados para determinar si ofrecen elementos importantes y necesarios para esta investigación. Nuestra selección se hizo exclusivamente de artículos que discuten directamente algún aspecto del concepto de *variable*, por ser el tema central de nuestro estudio. Al final, fueron seleccionados 17 artículos para el corpus de análisis, los cuales se relacionan en la siguiente tabla (Tabla 2):

Revista Seleccionada	Fuente	N° de Artículos
Bolema: Boletim De Educação Matemática	(García, Segovia & Lupiáñez, 2014)	1
Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa	(Matos & Da Ponte, 2008)	1
Educación Matemática	(Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Trigueros & Ursini, 2006)	3
International Journal of Science and Mathematics Education - Online First Articles	(Dogbey, 2015)	1
Educação Matemática Pesquisa	(Groenwald & Becher, 2010; Bianchini & Machado, 2010)	2
Revemat: Revista Eletrônica De Educação Matemática	(Viseu & Nogueira, 2014)	1
Educational Studies in Mathematics	(Malisani & Spagnolo, 2008; Graham & Thomas, 2000)	2
ZDM Mathematics Education	(Nie, Cai & Moyer, 2009; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005)	2
Mathematics Education Research Journal	(Ely & Adams, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014; Radford, 2013; Wilkie & Clarke, 2015)	4
Total de artículos		17

Tabla 2. Relación de artículos seleccionados para el estudio. Fuente: autores

A cada artículo seleccionado se le extrajo información importante acerca de las *realizaciones* de la *variable*, elaborando una lista detallada con definiciones y ejemplos. Finalmente, las relacionamos hasta llegar a una caracterización y síntesis de las $\boldsymbol{M_pE}$.

Para el análisis del corpus de dados nos hemos inspirado en la estructura desarrollada por Davis & Renert (2014) para la discusión con profesores, las cuales son llamadas *Estudio del Concepto*. Estos dos autores desarrollan su método de trabajo con actividades dirigidas a profesores, cuyo esquema en que presentan los resultados nos ha servido de inspiración para desarrollar nuestro diseño de análisis, enlazando las diferentes *realizaciones* encontradas en el análisis documental. En este estudio nos hemos apropiado de la estructura del *Estudios del Concepto* y la hemos transformado en nuestra estructura analítica. Davis & Simmt (2006) organizan su *Estudio del Concepto* en cuatro énfasis, sin embargo, dado que el último énfasis, llamado por los autores de *Mezclas*, se refiere al desarrollo de nuevas *realizaciones* a partir de las *realizaciones* encontradas, y ya que nuestro modelo teórico describe únicamente las *realizaciones* encontradas en los artículos científicos, nos inspiramos sólo en los tres primeros énfasis:

- ***Realizaciones***: En el trabajo original de Davis & Renert (2014) las *realizaciones* son comunicaciones traídas por los profesores participantes a partir de sus experiencias. En este estudio las definiremos como todas las definiciones, rutinas, metáforas, imágenes, ejemplos o aplicaciones que surgen en los artículos analizados.

- **Escenarios**: Son organizadores que relacionan las *realizaciones*, como un mapa a nivel macro del concepto. O sea, es encontrar el significado de cada uno de las *realizaciones* para organizarlas en conjuntos que guarden semejanzas discursivas.
- **Vínculos**: Cada *realización* involucra una serie de implicaciones con otros conceptos del discurso matemático. Por lo tanto, este énfasis se refiere al estudio de cada *realización* vinculada a otros conceptos, narrativas o rutinas matemáticas.

Cabe destacar que en la propuesta inicial de los autores, los énfasis son emergentes al trabajo colaborativo, y para nuestro caso es una estructura preestablecida. Para organizar los distintos escenarios, elaboramos una lista con las distintas *realizaciones* y para cada una definimos algunas narrativas y rutinas matemáticas con las cuales se asocian, y a partir de esas características definimos las semejanzas discursivas entre las *realizaciones*. Finalmente, organizamos los datos y los sintetizamos en el siguiente modelo.

5. REALIZACIONES, ESCENARIOS Y VÍNCULOS DE LA VARIABLE

Hay grandes diferencias entre las distintas *realizaciones*, las cuales son determinadas a partir de los diferentes escenarios en donde aparece el concepto (Davis & Simmt, 2006). Por ejemplo, la *variable* en el estudio de las funciones se realiza en toda narrativa que habla acerca de la relación de dependencia de dos cantidades, y también cuando se sigue una rutina para elaborar gráficas o para resolver problemas a partir de las funciones, etc; sin embargo, esta comprensión es limitada para analizar otras *realizaciones* en otros escenarios. Por lo tanto, los distintos escenarios que creamos para presentar las *realizaciones* de la *variable* surgieron ante la pregunta de cómo se relacionan entre sí las *realizaciones*, lo que nos obligó a ensamblarlas, y así describir la forma como aparecen dentro del discurso matemático y su relación con otros conceptos. En este estudio construimos cuatro escenarios: (1) la *variable* como incógnita o cantidad indeterminada; (2) la *variable* en la relación funcional; (3) la *variable* como marcador de posición para definir narrativas asociadas con los sistemas numéricos o para parametrizar rutinas matemáticas; y (4) la *variable* como nomenclatura en el estudio de las medidas. A continuación discutimos los diferentes escenarios y en cada uno hablamos de sus *realizaciones* y los vínculos con otros conceptos matemáticos.

5.1. Incógnita o cantidad indeterminada

Una característica en las *realizaciones* de la *variable*, que nos llevó a formular este primer escenario, fue observada en sus narrativas y rutinas matemáticas que hablan acerca de su relación con expresiones matemáticas que equiparan dos cantidades mediante el símbolo =, tal como mostramos en el siguiente ejemplo (Cuadro 2):

Un taxista cobra un valor fijo de R$3,50 más R $2,00 por cada kilómetro recorrido para realizar viajes dentro del municipio de São Paulo. ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer en el municipio de São Paulo un pasajero que tenga sólo R $25,50?

Cuadro 2. Ejemplo de acciones de conteo. Fuente: (Bianchini & Machado, 2010; Pág. 363)

El anterior enunciado puede interpretarse como una cantidad formada por dos agregados de objetos: (1) una tasa fija de $R\$3{,}50$ y (2) $R\$2$ que cobra el taxista por cada kilómetro recorrido. Esa suma está siendo equiparada con una segunda cantidad correspondiente al pago total del recorrido: $R\$25{,}50$. Hablamos de una comparación porque el enunciado busca encontrar cuándo el valor del recorrido es exactamente igual al dinero que tiene el pasajero para pagar el servicio. Además, podemos observar que en la primera cantidad, uno de los agregados es una cantidad desconocida, es decir, no sabemos cuántos kilómetros podrá recorrer dicho pasajero de acuerdo con su presupuesto. Ahora, si usamos la letra *x* para referirnos a los kilómetros recorridos por ese pasajero, podríamos *reificar* el enunciado de la forma $3{,}50 + 2x = 25{,}50$.

Como vemos en el ejemplo, definimos una *realización* de la *variable* a la que llamamos ***incógnita en las ecuaciones***, demarcada en varios artículos analizados (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Matos & Da Ponte, 2008; Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Trigueros & Ursini, 2006; Groenwald & Becher, 2010; Bianchini & Machado, 2010; Dogbey, 2015; Malisani & Spagnolo, 2008; Graham & Thomas, 2000; Viseu & Nogueira, 2014; Nie, Cai & Moyer, 2009; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005; Ely & Adams, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014; Radford, 2013). La *incógnita en las ecuaciones* se vincula a rutinas matemáticas que permiten encontrar el valor desconocido en ecuaciones y sistemas de ecuaciones, de tal forma que al sustituirlo por el símbolo se verifica que dicha igualdad sea correcta. El valor desconocido es llamado *solución* de la ecuación. Esta *realización* puede aparecer en forma alienada, es decir, sin asociar el símbolo a ninguna acción particular, o en forma *reificada*, como el ejemplo analizado, cuyo símbolo emerge de la simbolización de un enunciado o de una situación particular. Dogbey (2015) caracteriza la forma *reificada* de la *incógnita en las ecuaciones* como otra *realización*, específicamente cuando habla del símbolo usado para "*modelar problemas del mundo real*" (p. 11).

Sin embargo, en nuestro análisis tanto la forma *alienada* como *reificada* fueron analizadas como una sola *realización*.

Esta *realización* se vincula al estudio de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones; sin embargo, no se restringe únicamente a valores numéricos, pues la *incógnita en las ecuaciones* también puede designar vectores, valor de un ángulo, etc.

5.2. Relación funcional

Demarcamos en este escenario las *realizaciones* de la *variable* asociadas a narrativas y rutinas matemáticas que hablan de un tipo particular de comunicación en las que se expresa la relación entre dos cantidades en forma correlacionada, como observamos en el siguiente ejemplo (Cuadro 3):

> En una escuela hay seis veces más estudiantes que profesores. Refiriéndose por $\boldsymbol{a}$ al número de estudiantes y por $\boldsymbol{p}$ al número de profesores, escriba una ecuación que traduzca el problema.

Cuadro 3. Cantidades correlacionadas. Fuente: (Viseu & Nogueira, 2014, Pág. 34)

En el ejemplo se plantea una relación entre el *número de estudiantes* de una escuela con la *cantidad de profesores*, la cual podríamos resumirla de la siguiente forma:

$$\boxed{\text{Número de estudiantes}} = 6 \times \boxed{\text{Número de profesores}}$$

Por lo tanto, el problema podría ser *reificado* como $a = 6p$. La *cantidad total de estudiantes* está en relación de dependencia con el *número de profesores*. Si determinamos un número cualquiera de profesores, sólo bastaría hacer el cálculo aritmético para conocer el total de estudiantes. Por ejemplo, si en la escuela hubiera cinco profesores, la cantidad de estudiantes sería $6 \times 5 = 30$, y así sucesivamente podríamos definir una *cantidad cualquiera de profesores* y a partir de ese dato calcular el *número de estudiantes*, como lo mostramos en la siguiente tabla (Tabla 3):

Número de profesores	**Número de Estudiantes**
2	12
3	18
4	24
⋮	⋮

Tabla 3. Tabla de valores. Fuente: Autores

A esta *realización* de la *variable*, que involucra dos o más cantidades en una relación de dependencia con respecto a otra u otras cantidades, la hemos llamado ***cantidad dependiente e independiente*** (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Matos & Da Ponte, 2008; Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Dogbey, 2015; Trigueros & Ursini, 2006; Bianchini & Machado, 2010; Viseu & Nogueira, 2014; Malisani & Spagnolo, 2008; Nie, Cai & Moyer, 2009; Ely & Adams, 2012; Wilkie & Clarke, 2015). La expresión simbólica $a = 6p$ se le conoce como *función*, donde p está en relación de dependencia con la cantidad a. En este caso, a es conocida como *cantidad dependiente* porque su valor depende del valor que toma p. En ese orden de ideas, p sería la *cantidad independiente* en la expresión. Para describir de forma más apropiada la relación, decimos que a está *en función* de p, y dicha acción se escribe simbólicamente $a = f(p)$ (se lee "*f de p*").

La función obtenida en nuestro problema $f(p) = 6p$ podría ser *re-presentada* mediante diversos *mediadores visuales*, de los cuales planteamos algunos en la siguiente tabla (Tabla 4):

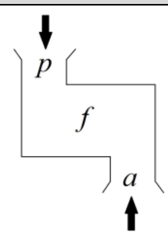
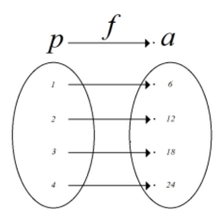
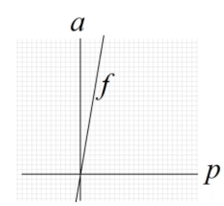
<table>
<tr><th>Símbolos</th><th>Pictográfica</th><th>Diagrama</th><th>Tabla de valores</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{f(p) = 6p}$</td><td>
</td><td>
</td><td><table><tr><th>P</th><th>A</th></tr><tr><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>12</td></tr><tr><td>3</td><td>18</td></tr><tr><td>4</td><td>24</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
</table>

Tabla 4. Re-presentaciones de la relación funcional. Fuente: Autores

Observamos cinco formas de *re-presentación* de las *cantidades dependiente e independiente* $a = f(p)$ y p: (1) inicialmente, la *forma simbólica* de la función habla acerca de la cadena de operaciones con la cual se relaciona ambas cantidades; (2) la segunda describe la relación como una *máquina*, cuyo valor de entrada es la *cantidad dependiente* p, que produce un valor de salida $a = f(p)$; (3) en tercer lugar, la función se define como un *diagrama* que describe dos conjuntos, el primer está conformado por todos los valores posibles que puede tomar p, llamado *dominio* de la función, y el segundo conjunto muestra los posibles valores que toma $a = f(p)$, llamado *rango*. Las flechas señalan la relación de dependencia entre los conjuntos; (4) de igual forma, se *re-presenta* la función en una *tabla de valores*, mostrando la relación de dependencia como pares ordenados (a, p); y (5) finalmente, mostramos la relación por medio de un *plano cartesiano*, cuyos valores aparecen en un continuo. El eje vertical comunica la *cantidad independiente* p y el eje horizontal la *cantidad dependiente* $a = f(p)$.

Un caso especial de esta *realización* es la *re-presentación* de situaciones asociadas a patrones de transformación. Por ejemplo, el cálculo de interés compuesto aplicado a depósitos de dinero en bancos, el cual consiste en una acumulación de intereses generados a partir de un capital inicial a una tasa de interés fija por un tiempo determinado, cuyos cambios podría resumirse en una función. Algunos autores llaman esta *realización* como *cantidad variando* (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Matos & Da Ponte, 2008; Dogbey, 2015; Viseu & Nogueira, 2014; Malisani & Spagnolo, 2008; Graham & Thomas, 2000; Nie, Cai & Moyer, 2009; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005; Ely & Adams, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014; Radford, 2013; Wilkie & Clarke, 2015). Sin embargo, en este texto, la *cantidad variando* es presentada como caso especial de la relación entre la *cantidad dependiente e independiente*. A continuación presentamos un ejemplo para ilustrar este caso especial (Tabla 5):

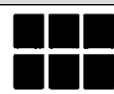
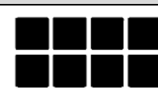
Posición		**1**	**2**	**3**	**…**	**100**	$\boldsymbol{n}$
Términos	**Forma**				…	¿?	¿?
	Número	4	6	8	…	¿?	¿?

Tabla 5. Cantidad dependiente e independiente en sucesiones. Fuente: (Radford, 2013, p. 271)

La *realización* de la *variable* como *cantidad dependiente e independiente* puede ser usada para *re-presentar* secuencias, ya sean verbales, numéricas o de figuras. La *cantidad independiente* indica la posición específica de un elemento dentro de una secuencia, y la *cantidad dependiente* indica la cantidad de unidades con que se elabora cada figura. En la secuencia anterior (Tabla 5), la figura se va formando a partir de cierta cantidad de bloques, tal como se ve en la siguiente tabla (Tabla 6):

Elementos de la secuencia	**Numero de bloques**
La figura 1 contiene 4 bloques	$4 = (1 + 1)(2)$
La figura 2 contiene 6 bloques	$6 = (2 + 1)(2)$
La figura 3 contiene 8 bloques	$8 = (3 + 1)(2)$
⋮	⋮
La figura n-ésima contiene $(\boldsymbol{n} + \mathbf{1})(\mathbf{2})$ bloques	$F(n) = (n + 1)(2)$

Tabla 6. Regla de formación de la secuencia. Fuente: Autores

La secuencia se *reifica* mediante la función $F(n) = 2n + 2$, siendo n el valor posicional de cada elemento de la secuencia. Este caso especial de la *realización* analizada, es nombrada en algunos artículos como *fórmula generalizada de un patrón* (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Matos & Da Ponte, 2008; Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Dogbey, 2015; Trigueros & Ursini, 2006; Bianchini & Machado, 2010; Viseu & Nogueira, 2014; Malisani & Spagnolo, 2008; Graham & Thomas, 2000; Nie, Cai & Moyer, 2009; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005; Ely & Adams, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014; Radford, 2013; Wilkie & Clarke, 2015).

Las *realizaciones* discutidas en este escenario se vinculan al estudio de las funciones: dominio y recorrido de la función, crecimiento y decrecimiento, continuidad, máximos y mínimos. Sin embargo, tampoco agotan el poder comunicativo de la *variable*, por eso formulamos un próximo escenario para ampliar este modelo teórico.

5.3. Marcadores de posición para definir narrativas asociadas a sistemas numéricos o para parametrizar rutinas matemáticas

Demarcamos este escenario a partir de las *realizaciones* de la *variable* que se caracterizan por comunicar simbólicamente narrativas y rutinas matemáticas en las que intervienen constantes arbitrarias, cuyos valores dan lugar a distintos casos de un problema.

En nuestro análisis, encontramos una *realización* de la *variable* que hemos llamado ***marcadores de posición***, nombrada por algunos investigadores como *generalizador de reglas y métodos* (Bianchini & Machado, 2010; Dogbey, 2015; Ely & Adams, 2012; Escalante & Cuesta, 2012; García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Graham & Thomas, 2000; Groenwald & Becher, 2010; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014; Malisani & Spagnolo, 2008; Matos & Da Ponte, 2008; Nie, Cai & Moyer, 2009; Ochoviet & Oktaç, 2011; Radford, 2013; Trigueros & Ursini, 2006; Viseu & Nogueira, 2014; Wilkie & Clarke, 2015). Esta *realización* permite sintetizar métodos y rutinas matemáticas, como por ejemplo, para definir las operaciones con números fraccionarios (Cuadro 4):

Sean $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ y $\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$ dos fracciones cualesquiera, con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Z}$, y con $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$. Si las deseamos sumar o restar podemos seguir la siguiente regla:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \pm \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \frac{\boldsymbol{ad} \pm \boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{bd}}$$

Cuadro 4. Marcadores de posición en rutinas matemáticas. Fuente: (Dogbey, 2015, p. 3)

Una vez *reificadas* las rutinas, nos encontramos con estructuras simbólicas que pueden reemplazarse por valores específicos. Es decir, en esta *realización* el símbolo aparece como si fuera un espacio vacío en el que puede ubicarse números. Sin embargo, los *marcadores de posición* también pueden aparecer como *parámetros*, cuyo argumento de entrada por el cual puede reemplazarse dicha símbolo es llamado parámetro real, y cuando esto sucede en un polinomio, los valores que toma son llamados coeficientes del polinomio, como mostramos en el siguiente ejemplo, en el que hablamos específicamente de los símbolos a, b y c (Cuadro 5):

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = o}$ es una ecuación cuadrática si $\boldsymbol{a \neq o}$

Cuadro 5. Ejemplo de parámetros para construir definiciones. Fuente: (Ely & Adams, 2012, p. 22)

En el caso de los *marcadores de posición* que definen *parámetros*, estos describen simbólicamente familias de acciones matemáticas – comunicaciones –. En el ejemplo, los símbolos a, b y c hablan de los coeficientes de la ecuación cuadrática. Si tenemos la ecuación cuadrática $2x^2 + 4x - 5 = 0$, por ejemplo, las cantidad $a = 2, b = 4$ y $c = -5$. Sin embargo, no siempre se necesitan reemplazar, y en ese caso se crean otras narrativas que hablan sobre la generalidad de esas estructuras simbólicas.

Por otro lado, los *marcadores de posición* también aparecen en la simplificación o amplificación de expresiones simbólicas mediante la aplicación de reglas fijas, y cuyo resultado puede hallarse por simple inspección (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Matos & Da Ponte, 2008; Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Dogbey, 2015; Trigueros & Ursini, 2006; Bianchini & Machado, 2010; Viseu & Nogueira, 2014), lo cual ilustramos con el siguiente ejemplo (Cuadro 6):

$$\boldsymbol{\frac{z^4}{c^2(a-b)} + \frac{z^4}{c^2(a+b)} = \left(\frac{z^4}{c^2}\right)\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right) = \left(\frac{z^4}{c^2}\right)\left(\frac{2a}{a^2-b^2}\right)}$$

Cuadro 6. Ejemplo de *marcadores de posición*. Fuente: (Viseu & Nogueira, 2014, p. 42)

También podemos recurrir a los *marcadores de posición* para describir enunciados matemáticos, generalmente para definir conceptos o axiomas en forma simbólica. Por ejemplo, para definir la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, podríamos escribir el enunciado de la siguiente forma (Cuado 7):

$$\boldsymbol{a(b+c) = ab + ac \iff \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}}$$

Cuadro 7. Ejemplo parámetros para definir propiedades. Fuente: (Matos & Da Ponte, 2008, p. 206)

Esta característica de la *realización* de la *variable* como *marcador de posición* es descrita por algunos autores como símbolo literal usado para expresar narrativas sobre conceptos matemáticos (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Matos & Da Ponte, 2008; Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Dogbey, 2015; Trigueros & Ursini, 2006; Groenwald & Becher, 2010; Bianchini & Machado, 2010; Viseu & Nogueira, 2014; Malisani & Spagnolo, 2008; Graham & Thomas, 2000; Nie, Cai & Moyer, 2009). En el ejemplo del cuadro 7, se usaron *marcadores de posición* para traducir en forma simbólica el enunciado: "*la multiplicación de un número real por una suma de números reales, es igual a la suma de las multiplicaciones de dicho número por cada uno de los sumandos*".

La *realización* de la *variable* discutida en este escenario se vincula a la producción de enunciados matemáticos (axiomas, teoremas, rutinas) mediante el uso de la notación simbólica.

5.4. Nomenclatura en el estudio de las magnitudes

Este escenario se define a partir de las *realizaciones* de la *variable*, cuya característica es nombrar elementos que intervienen en narrativas y rutinas matemáticas asociadas al cálculo de medidas.

En uno de los artículos analizados encontramos la descripción de los símbolos literales usados para nombrar números irracionales (García, Segovia & Lupiáñez, 2014). En dicho artículo se refieren a estos símbolos como constantes, y de tal planteamiento definimos una *realización* llamada constante ***irracional***, tales como el número π (pi), una de las constantes irracionales más importantes en la geometría, el cual emerge de la división entre la medida del perímetro de una circunferencia con su diámetro. Otro ejemplo es el número áureo o razón de oro, *re-presentado* con la letra griega ϕ (phi), famoso por ser la proporción usada por el pintor Leonardo da Vinci para trazar las dimensiones corporales de las personas. Esta *realización* fue incluida en este escenario porque su enseñanza está íntimamente relacionada con la medida, y el símbolo literal emerge al nombrar una cantidad de magnitud.

En este escenario describimos otra *realización* llamada ***magnitud,*** la cual es presentada y discutida en algunos artículos llamándola *etiqueta* (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Matos & Da Ponte, 2008; Escalante & Cuesta, 2012; Dogbey, 2015; Viseu & Nogueira, 2014; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg & Stephens, 2005). En esta *realización* generalmente se recurre al uso de palabras o abreviaturas para nombrar magnitudes, como por ejemplo (Cuadro 8):

Procedimiento para hallar el área de un triángulo ($\boldsymbol{A_t}$)	Procedimiento para hallar el área de un cuadrado ($\boldsymbol{A_c}$)
$\boldsymbol{A_t = bh}$ $\longrightarrow$ $\boldsymbol{b}$ = medida de la base del triángulo, y $\longrightarrow$ $\boldsymbol{h}$ = medida de la altura del triángulo	$A_c = l^2$ $\longrightarrow$ l = medida del lado del cuadrado

Cuadro 8. Ejemplo la variable como magnitud. Fuente: (Dogbey, 2015, pág. 12)

Los símbolos A_t, A_c, b, l y h son usados para definir la medida del área de un triángulo, medida del área de un cuadrado, medida de la base de un triángulo, medida del lado de un cuadrado y la medida de la altura de un triángulo, respectivamente. Hablamos de cantidad de magnitud porque la *variable* hace referencia al valor numérico obtenido después de una medición.

Estas *realizaciones* de la *variable* se vinculan a los estudios de las cualidades métricas de los objetos manipulables, y a los procesos de medición (cálculo de magnitudes, uso de instrumentos de medida, calibración, etc).

Una vez presentadas las diferentes *realizaciones* de la *variable* en los distintos escenarios matemáticos, hacemos un resumen general en la próxima sesión llamada consideraciones finales, donde presentamos nuestro modelo de forma simplificada.

6. CONSIDERACIONES FINALES

Nuestro objetivo era presentar un modelo teórico de las $\boldsymbol{M_pE}$ del concepto de *variable*, a partir de artículos científicos publicados en el campo de la Educación Matemática. Este análisis aporta significativamente a los estudios en la enseñanza de la *variable*, presentando las *realizaciones* discutidas por diferentes investigadores. Resumimos este modelo en el siguiente gráfico (Figura 1):

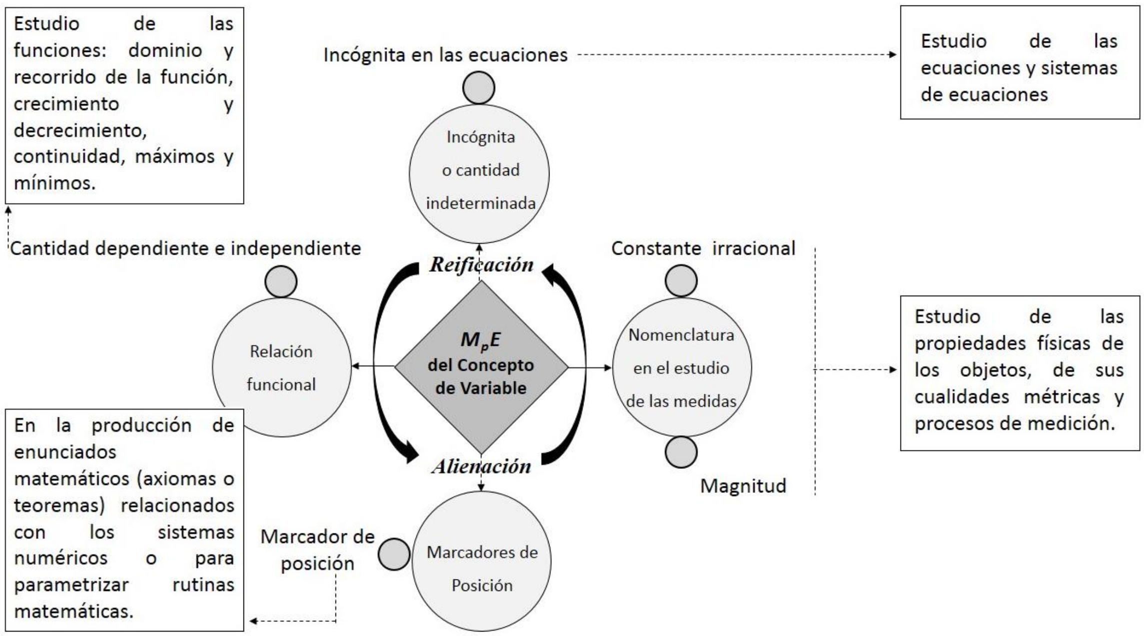


Figura 1. Resumen del modelo teórico de las $\boldsymbol{M_pE}$ del concepto de *variable* a partir de los artículos científicos. Fuente: Autores

En la imagen *re-presentamos* mediante círculos de mayor tamaño los cuatro escenarios donde se realiza la *variable* según las $\boldsymbol{M_pE}$ discutidas en los artículos analizados. Las *realizaciones* están definidas a partir de círculos más pequeños. Además, los rectángulos comunican los vínculos de cada *realización* con otros aspectos de las matemáticas.

Este estudio trae implicaciones importantes para el campo científico y el campo profesional. Con respecto al campo científico, destacamos que este modelo se constituye en una propuesta para organizar diversas producciones enfocadas a la enseñanza de las matemáticas relacionadas con el concepto de *variable*. Particularmente, diversos investigadores están publicando estudios donde discuten el concepto de *variable* desde diferentes perspectivas teóricas, lo cual lleva a definir el concepto de diversas maneras; por ese motivo, destacamos este estudio como una propuesta para organizar las $\boldsymbol{M_pE}$ del concepto de *variable*. Ahora bien, este modelo puede ser mejorado, dado que ningún modelo discute exhaustivamente un tema de estudio, es posible producir otros modelos de $\boldsymbol{M_pE}$ del concepto de *variable*, inclusive, dada nuestra selección sistemática de artículos es posible desarrollar otros modelos a partir de otras interpretaciones del concepto de *variable* u otras perspectivas teóricas. De igual forma, se podría ampliar la selección de artículos científicos a partir de otros criterios de selección y exclusión para ampliar los datos, y así realizar un modelo diferente al que hemos planteado; o tomar otras fuentes de análisis: libros didácticos, pruebas estandarizadas, etc, para describir las *realizaciones* de la *variable* presentes en dichos documentos. Este modelo también sirve de base para desarrollar otros modelos de las $\boldsymbol{M_pE}$ de otros conceptos, demarcando las *realizaciones* movilizadas en la actividad escolar.

Este modelo teórico, por lo tanto, abre un sinnúmero de posibilidades, creando una agenda de investigación acerca de las $\boldsymbol{M_pE}$ para discutir y organizar las producciones relacionadas con diversos conceptos matemáticos, y estimula el desarrollo de nuevos estudios en torno al desarrollo de otros modelos teóricos de las $\boldsymbol{M_pE}$ del concepto de *variable* a partir de otras fuentes relacionadas con experiencias de enseñanza.

Ahora bien, para el campo profesional, este modelo teórico trae diversas implicaciones relacionadas con la enseñanza y desarrollo de materiales educativos. En el caso de la enseñanza, queremos enfatizar en la importancia de los espacios de discusión con profesores acerca de las *realizaciones* de la *variable*, de tal forma que comuniquen en sus clases los diferentes escenarios discutidos en este estudio, y amplíen, así, las posibilidades comunicativas de los estudiantes al usar este concepto; y aportamos al campo de producción de materiales curriculares, no sólo en los recursos que desarrollan los profesores, sino también en la formulación de directrices currículos o en la producción de libros de texto, entre otros. Es importante que se movilicen las diversas *realizaciones* de la *variable*, y se usen en los diferentes escenarios, debido a que esto trae una mejor comprensión de diversos aspectos de las matemáticas y se amplían las posibilidades comunicativas de los estudiantes usando este concepto.

Por último, este estudio de las $\boldsymbol{M_pE}$ *del concepto de variable* también es interés en la formación de profesores, tanto en los cursos de formación universitaria como en cursos de formación y actualización docente, de tal forma que los profesores tengan espacios de reflexión y discusión acerca de los escenarios donde aparece el concepto de variable, correlacionando diferentes *realizaciones* y entendiendo las relaciones con otros aspectos del discurso matemático.

REFERENCIAS

Adler, J. & Davis, Z. (2006). Opening an other black box: Researching Mathematics for Teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in mathematics Education*, 37(4), 270-296.

Adler, J. & Huillet, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. En P. Sullivan & T. Wood (Eds), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 195-222). Rotterdam: Sense Publishers.

Baena, G. P. (2014). *Metodología de la Investigación. Serie integral por competencias*. Mexico: Grupo Editorial Patria.

Ball, D. L., Hill, H. H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-46.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bianchini, B. L., & Machado, S. D. (2010). A dialética entre pensamento e simbolismo algébricos. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(2), 354-368.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(4), 237 – 243.

Coutinho, J. L., & Barbosa, J. (2016). Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(2), 783-808.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM), 14*(2), 86-91.

Davis, B., & Renert, M. (2014). The math teachers know: Profound understanding of emergent mathematics. *Editorial Routledge*, New York: pp. 141.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, (61), 293-319.

Dogbey, J. (2015). Using variables in school mathematics: do school mathematics curricula provide support for teachers? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(6), 1175-1196.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Ely, R., & Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or *variable*: what is x? *Mathematics Education Research Journal*, 24(1), 19-38.

Epp, S. (2011). Variables in mathematics education. In Blackburn, P., Van Ditmarsch, H., Manzano, M. & Soler-Toscano, F. (Eds.), *Tools for Teaching Logic: Third International Congress*, Proceedings (pp. 54-61). Berlin/ Heidelberg: Springer

Escalante, J. E., & Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de *variable*: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24(1), 107-132.

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2014). El uso de las letras como fuente de errores de estudiantes universitarios en la resolución de tareas algebraicas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1545-1566.

Graham, A. T. & Thomas, M. O.J. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 265-282.

Groenwald, C. L, & Becher, E. L. (2010). Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do ensino médio. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(2), 242-270.

Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 76, 83-103.

Jupri, A., Drijvers, P., & Heuvel-Panhuizen, M. D. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 683-710.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *ZDM Mathematics Education*, 37(1), 68–76.

Küchemann, D. E. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.

Lucariello, J., Tine, M. T., & Ganleyd, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic *variable* misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 30-41.

Malisani, E. & Spagnolo, F. (2008). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 19-41.

Matos, A. & Da Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8° ano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 195-231.

Menduni-Bortoloti, R. A. (2016). Um estudo sobre a Matemática para o Ensino de proporcionalidade. Tese de Doutorado em Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

Mosvold, R., Jakobsen, A. & Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & Education*, 23(1), 47–60.

Nie, B., Cai, J., & Moyer, J. C. (2009). How a standards-based mathematics curriculum differs from a traditional curriculum: with a focus on intended treatments of the ideas of *variable*. *ZDM Mathematics Education*, 41(6), 777-792.

Ochoviet, C., & Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado: Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Educación Matemática*, 23(3), 91-121.

Radford, L. (2013). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277

Santos, G. L., & Barbosa, J. (2016). Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de um estudo com professores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (48), 143-167.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of the variable. *Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427.

Sfard, A. & Linchesky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2), 191-228.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge*, Cambridge University Press, Series editor EMERITUS

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse: Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51, 1-9.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Trigueros, M., & Ursini, S. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38.

Ursini, S. (2011). Il Modello 3UV: Uno strumento teórico a disposizione degli insegnanti di matemática. *QuaderniCIRD*, 2, 59-70.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. En Barbara M. (Ed). *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 7–13.

Viseu, F. A., & Nogueira, D. (2014). Desenvolvimento do pensamento algébrico de uma aluna do 10.º ano. *REVEMAT: Revista Electrónica De Educação Matemática*, 9(2), 23-56.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2015). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, 28(2), 223-243.

CAPÍTULO 3

UM MODELO TEÓRICO DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL A PARTIR DAS DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA DO BRASIL E DA COLÔMBIA

RESUMO: Neste estudo, apresentamos um modelo teórico da *Matemática para o Ensino* do conceito de variável. A estratégia metodológica adotada foi uma análise documental, cujas fontes são as diretrizes curriculares da Matemática do Brasil e da Colômbia. Esta estrutura teórica discute como pode ser apresentada a *variável* na atividade escolar, e categoriza as diferentes situações em que aparece esse conceito no ensino da matemática. Ao final, estruturamos seis categorias: na primeira estudamos a *variável* como quantidade incógnita ou indeterminada; na segunda, nos referimos à *variável* na relação funcional; na terceira categoria, a *variável* é estudada como marcador de posição para definir narrativas associadas a sistemas numéricos ou para parametrizar rotinas matemáticas; na quarta categoria, a *variável* é analisada como nomenclatura no estudo da medida; na quinta, apresentamos a *variável* como nome de uma coleção de elementos; e na sexta e última categoria, descrevemos a *variável* como nome de figuras geométricas. Este modelo pode subsidiar pesquisas que focalizem o ensino do conceito de *variável*, assim como no trabalho de delineadores de materiais didáticos e na formação de professores.

PALAVRAS CHAVES: Discurso. Variável. Realização. Conceito. Matemáticas para o Ensino.

ABSTRACT: In this study, we present a theoretical model for *Mathematics for Teaching* of the concept of variable. The methodological strategy adopted was a documentary analysis, whose sources are the curricular guidelines for Mathematics in Brazil and Colombia. This theoretical structure discusses how the *variable* is presented in the school activities, and categorizes the different situations in which this concept appears in the teaching of mathematics. In the end, we chose six categories: in the first category, we study the *variable* as an unknown or indeterminate quantity; in the second, we refer to the *variable* in a functional relationship; in the third category, the *variable* is studied as a placeholder to define narratives associated with numerical systems or to parameterize mathematical routines; in the fourth category, the *variable* is analyzed as nomenclature in measurement studies; in the fifth, we present the *variable* as the name of a collection of elements; and in the sixth and last category, we describe the *variable* as the name of geometric figures. This model can support research that focuses on the teaching of the concept of variable, as well as on the work of educational material designers and for teacher training.

KEYWORDS: Discourse. Variable. Realization. Concept. Mathematics for Teaching.

1. INTRODUÇÃO

Este estudo se centra na *Matemática para o Ensino do conceito de variável*, a qual definimos provisoriamente como *modelos* que apresentam a *variável* tal como pode ser realizada na sala de aula. A *Matemática para o Ensino* (a qual denotaremos com a sigla $\boldsymbol{M_pE}$) se configura a partir de diferentes experiências do ensino: na sala de aula, como nas pesquisas, na produção de material didático, nos cursos de formação de professores e em qualquer outra experiência que pode ser modelada. Nesta introdução, usaremos o termo *conceito* de forma intuitiva e mais adiante, na discussão teórica, sua definição será explicada de forma mais precisa. Por hora, vamos entender por *modelo* um esquema que apresenta um conjunto de ideias que explicam um tema específico.

Alguns pesquisadores têm construído modelos que apresentam a *variável* em diferentes situações do ensino (USISKIN, 1988; SCHOENFELD; ARCAVI, 1988; KÜCHEMANN, 1978; URSINI, 2011). Outros pesquisadores, como por exemplo Escalante e Cuesta (2012), têm dado importância à *variável* para analisar as relações entre os símbolos literais e as operações aritméticas. Outros modelos acerca do *conceito de variável* podem surgir a partir da discussão de grupos de professores, especificamente quando se reunem para falar sobre diferentes aspectos da matemática que usam os símbolos literais. Além dos modelos feitos pelos pesquisadores e pelos professores, existem outras produções que poderiam ser configuradas como modelos acerca do *conceito de variável*, como as avaliações em larga escala, as diretrizes curriculares da matemática, os livros didáticos e qualquer outro material educativo, documento ou atividade focada no ensino da matemática e que apresente este conceito.

Neste estudo, chamaremos de *variável* a todas as letras usadas na matemática que se referem às quantidades, formas geométricas ou proposições, e com as quais se podem descrever enunciados em forma simbólica. Portanto, esclarecemos que, neste artigo, discutimos o *conceito de variável* em um sentido amplo, considerando-o como instrumento para simbolizar diferentes aspectos da matemática.

O nosso interesse é capturar a variabilidade de formas de apresentação do *conceito de variável*, para criar um modelo que organize tal diversidade. Especificamente, queremos construir um modelo teórico, entendido como um esquema que apresenta uma discussão teórica acerca da *variável* e as relações dela com outros conceitos da matemática no ensino. Fizemos um recorte com o intuito de focar, particularmente, o conceito de *variável* delimitado nas diretrizes curriculares da matemática na Educação Básica do Brasil e da Colômbia, pois elas influenciam a geração das grades de estudo para a atividade em sala de aula. A escolha desses paises corresponde à nacionalidade dos pesquisadores deste estudo, e porque a união destes documentos darão mais sustentação para a nossa análise. Estas ideias serão ampliadas posteriormente na disussão teórica e no delineamento metodológico.

Assim, formulamos o objetivo da nossa pesquisa como *desenvolver um modelo teórico da Matemática para o Ensino -* $\boldsymbol{M_pE}$ *do conceito de variável a partir das diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia*. Este *modelo teórico* é útil para o campo profissional, tanto para ser discutido pelos professores e levar tais ideias à sala de aula, quanto para a produção de materiais educativos (como por exemplo livros didáticos), ou ainda para revisar a formulação das diretrizes curriculares relacionadas com o ensino deste conceito. No campo de pesquisa, este modelo serve como quadro analítico para situações de sala de aula, análises de materiais curriculares, etc.

A seguir, apresentaremos algumas características do conceito de *variável*, com um olhar da matemática como forma de comunicação, cujas ideias nos ajudarão a elucidar melhor a definição de $\boldsymbol{M_pE}$. Posteriormente, explicamos o delineamento metodológico, e finalmente apresentaremos o modelo construído.

2. A VARIÁVEL COMO FERRAMENTA DE COMUNICAÇÃO

Comecemos por localizar a perspectiva teórica que tomamos para o presente estudo. Como pressuposto inicial, olhamos a comunicação como uma atividade que se desdobra em uma diversidade de repertórios que falam de aspectos específicos da nossa atividade humana, os quais chamaremos de *discursos* (SFARD, 2008). Por exemplo, a *antropologia* é um discurso focado nas pessoas no sentido mais *lato*, cujo repertório fala das origens, evolução, desenvolvimentos físico e cultural, costumes sociais, crenças, etc.; a *química* é um discurso, cujo repertório comunica a constituição da matéria, suas propriedades, transformações e as leis que as regem, entre muitos outros repertórios discursivos. Assim, definimos a *matemática* como outro discurso, o qual se compõe por uma série de *palavras próprias*, como função, paralelepípedo, raio, polinômio, variável, cosseno, etc; pela sua *escrita especial* a partir de caracteres numéricos, símbolos literais, formas geométricas, gráficos no plano cartesiano, etc.; pelas *rotinas* – comumente chamadas de algoritmos –, entendidas como um conjunto sistemático de padrões que se repetem em determinados tipos de situações; e pelas *narrativas*, uma série de enunciados, verbais ou escritos, os quais são validados por um grupo de participantes do discurso – teoremas ou axiomas – (SFARD, 2008).

Outra característica do discurso matemático é que as *palavras* se desdobram em diferentes situações, comunicando diferentes – chamemos assim - *realizações*. Uma *realização*, segundo Sfard (2008), é cada uma das formas em que são usadas as *palavras próprias* do discurso matemático, as quais podem aparecer como palavras faladas ou escritas, desenhos, ícones, objetos manipuláveis ou até mesmo os gestos. Por exemplo, a palavra *variável* se *realiza* como incógnita em uma equação, ou em outras situações também se *realiza* como quantidade dependente e independente na relação funcional, etc. Inspirados em Sfard (2008), definimos *conceito* matemático como um conjunto de *realizações* que podem ser associadas a uma *palavra própria* do discurso que as designam.

Neste estudo, interessamo-nos no *conceito de variável*, quer dizer, no conjunto de *realizações* que podem ser associadas à palavra *variável*, as quais são reconhecidas na matemática pela sua escrita especial (letras maiúsculas ou minúsculas do alfabeto grego ou romano), e pelas *narrativas* e *rotinas* vinculadas a cada uma delas. Cada *realização* pode ser apresentada na matemática mediante diferentes *mediadores visuais*, como tabelas, expressões simbólicas, gráficos, desenhos, diagramas, etc. Chamaremos de *re-presentação* a ação de comunicar algo usando um *mediador visual.* Destacamos o prefixo *re* para indicar que *re-presentar* equivale a apresentar novamente uma *realização* fazendo uso de outro *mediador visual*.

Por outro lado, segundo Sfard (2008), o ensino das *realizações* de qualquer conceito está implicado por dois movimentos discursivos chamados *reificação* e *alienação*, portanto, também é válido para as *realizações* que configuram o *conceito de variável*. O princípio de *reificação*, por sua vez, apresenta as *realizações* da *variável* como ações comunicativas emergentes que transferem um enunciado verbal a outra forma de escrita simbólica -- *re-presentação* --. As *realizações* da *variável*, portanto, podem surgir do processo de *reificação* que *re-presenta*, em forma genérica, um conjunto de ações comunicativas em uma estrutura comum mediante uma notação simbólica. Por exemplo, em alguns problemas matemáticos, o professor introduz um símbolo literal – geralmente escolhido de forma arbitrária – e o substituí em um enunciado, tal como mostramos a seguir:

Enunciado	Re-presentação com símbolos literais	Reificação do enunciado
A idade atual de um pai é 20 anos mais que a idade do seu filho.	$\boldsymbol{p}$: Idade atual do pai $\boldsymbol{f}$: Idade atual do filho	$p = 20 + f$

Tabela 1. Exemplo da *reificação da variável* Fuente: Autores

Por outro lado, o princípio de *alienação*, tal como descrito por Sfard (2008), apresenta as *realizações* da *variável* como símbolos dissociados de referências específicas, percebendo-os como uma forma discursiva sem relação com as atividades humanas. Desta forma, as *realizações* da *variável* são apresentadas de maneira impessoal, como se estivessem acontecendo de maneira autônoma, sem estar associadas a uma situação específica (SFARD, 2008), tal como observamos no exemplo a seguir:

Simplificar a expressão $15a^2 + 2a - 8$
$15a^2 + 2a - 8 = 15a^2 - 10a + 12a - 8 = 5a(3a - 2) + 4(3a - 2) = (3a - 2)(5a + 4)$

Quadro 1. Exemplo de *alienação da variável*. Fonte: Autores

Embora estas ideias não sejam suficientes para entender a complexidade das *realizações*, os movimentos discursivos de *reificação* e *alienação* são instrumentos de compreensão importantes para o ensino da *variável*, cujas *realizações* aparecem em diferentes $\boldsymbol{M_pE}$, cujas ideias serão discutidas a seguir.

3. UMA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE VARIÁVEL

Na década de 1980, Shulman (1986, 1987) fez contribuições notáveis para o estudo do ensino, introduzindo o conceito de *conhecimento pedagógico do conteúdo* – PKC (do inglês *pedagogical content knowledge*), como um tipo de conhecimento exclusivo dos professores que se relaciona com a sua forma de ensinar (SHULMAN, 1986). Essas ideias geraram um conjunto de pesquisas que aprofundaram o PKC, e particularmente na Educação Matemática o ensino começou a ser discutido como campo especializado e professional do professor (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; DAVIS; SIMMT, 2006; EVEN, 1990; BALL; HILL; BASS, 2005; HUILLET, 2009; ROWLAND, 2008). A área de pesquisa chamada *Matemáticas para o Ensino* ($\boldsymbol{M_pE}$) surgiu a partir destas discussões. Por um lado, há quem defina a $\boldsymbol{M_pE}$ como a matemática dos professores que os levam a serem capazes de atender com sucesso às demandas da sua atividade profissional, ou seja, os conceitos a serem ensinados (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; BALL; HILL; BASS, 2005; STYLIANIDES; STYLIANIDES, 2014).

Adler e os seus colaboradores (ADLER; HOSSAIN; STEVENSON; CLARKE, 2013; ADLER; HUILLET, 2008), assim como Davis e Renert (2012, 2014), por sua vez, fizeram uma abordagem da $\boldsymbol{M_pE}$ em termos da matemática que emerge entre um grupo de professores, estabelecendo os conceitos como algo que emerge nas próprias experiências do ensino. Adler e Davis (2006) e Adler e Huillet (2008) explicam que entre os professores se tem configurado discursos específicos para o ensino da matemática, produzidos através do processo pedagógico e que estão em sintonia com diferentes necessidades e práticas culturais. Estes antecedentes teóricos, assim como outros que também falam da $\boldsymbol{M_pE}$ (RYVE; NILSSON; MASON, 2012; OSLUND, 2012; PREDIGER, 2010), teve implicações na perspectiva que entende o ensino como um trabalho profissional com a sua própria base teórica única (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Neste estudo, vamos definir a $\boldsymbol{M_pE}$ como uma atividade discursiva que modela a matemática que circula no ensino, quer dizer, são *re-presentações* da matemática dos professores. A $\boldsymbol{M_pE}$, por tanto, emerge nas diferentes experiências relacionadas com o ensino da matemática, como a discussão de um grupo de professores, publicações dos pesquisadores, nas diretrizes curriculares, nas provas de avaliação de larga escala, assim como qualquer outra atividade focada a discutir o ensino da matemática.

Embasados nestas fundamentações teóricas, desenvolvemos um modelo teórico para descrever a variabilidade discursiva relacionada com o *conceito de variável* nas diferentes $\boldsymbol{M_pE}$, recompilando em tais fontes as *realizações* do *conceito*, analisando as situações da matemática em que elas aparecem e as suas relações com outros conceitos. Sabemos que os *modelos* não são esquemas exaustivos, por isso, o que apresentamos neste estudo são ideias parciais, porém a sua importância repousa sobre sua potencialidade analítica e instrumental para discutir o ensino da *variável*, ao ser um modelo que organiza as *realizações* contidas em várias fontes e que descreve como o conceito é apresentado em sala de aula. Contudo, delimitamos como fonte de dados, especificamente, as diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia, o que detalharemos na seção do delineamento metodológico. Escolhemos as diretrizes curriculares do Brasil e da Colômbia porque nelas são propostas orientações, perspectivas, guias e recomendações para a elaboração dos sequenciamentos curriculares. Nestes documentos geralmente são descritas as *realizações* dos conceitos que devem ser discutidos em sala de aula. Por conseguinte, apresentamos o objetivo central deste artigo nos seguintes termos: *construir um modelo teórico da **MpE** do conceito de variável a partir de diretrizes curriculares da matemática do Brasil e Colômbia*. Os procedimentos metodológicos do estudo serão pormenorizados a seguir.

4. DELINEAMENTO METODOLÓGICO

Frente ao nosso objetivo, caracterizamos a presente pesquisa como um estudo documental, sendo uma estratégia na qual se observa e se reflete sistematicamente sobre o conteúdo de documentos, indagando, interpretando e apresentando dados e informação sobre um tema determinado (LÓPEZ, 2015; BAENA, 2014). O estudo documental consiste essencialmente na coleta, classificação, recuperação e distribuição de dados relacionados com um tema específico.

Escolhemos as diretrizes curriculares do ensino da matemática do Brasil e da Colômbia como fonte de dados, os quais se configuram como documentos oficiais para o ensino da matemática na Educação Básica em ambos os países. Tal como foi comunicado na introdução, este estudo foi delimitado com dados do Brasil e da Colômbia, por serem os países de origem dos pesquisadores do presente estudo. Esta análise não se trata de um estudo comparativo entre os países, a razão da escolha é para capturar maior número de *realizações* da *variável*.

O processo de procura, leitura e análise dos documentos do *corpus* deste estudo se desenvolve em várias etapas. Em primeiro lugar, acessamos, em outubro de 2016, a página Web do Ministério da Educação e Cultura do Brasil (http://portal.mec.gov.br) e do Ministério da Educação da Colômbia (http://www.mineducacion.gov.co ou http://www.colombiaaprende.edu.co) para levantar todos os documentos oficiais ou diretrizes curriculares, dirigidos ao ensino da matemática na Educação Básica. Finalmente, selecionamos nove documentos para o *corpus* de nossa análise, os quais apresentamos na tabela a seguir:

Documentos Selecionados	Fonte
Lineamientos Curriculares de Matemáticas	MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998
Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas	MEN, 2006
Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas versión 1	MEN, 2015
Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas versión 2	MEN, 2016
Parâmetros Curriculares Nacionais: primeiro e segundo ciclo do ensino fundamental	MEC – Ministério de Educação e Cultura do Brasil, 1997
Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental	MEC, 1998
Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio	MEC, 2000
Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais	MEC, 2012
Base Nacional Comum Curricular (versão em discussão)	MEC, 2015

Tabela 2. Documentos do corpus da análise. Fonte: Autores

Em segundo lugar, fizemos uma leitura integral de cada um dos documentos para conhecer como eles apresentam o *conceito de variável*. Nesta etapa, foram extraídas informações sobre as *realizações* da *variável* em cada um dos documentos selecionados, e posteriormente foram organizadas em uma lista para elaborar a caracterização e síntese do nosso modelo teórico. Esclarecemos que as diretrizes curriculares não foram necessariamente elaboradas com o mesmo referencial teórico que adotamos nesta pesquisa, de maneira que neste estudo o entendimento de *variável* pode divergir daquele concebido nos documentos analisados. Portanto, a discussão em termos de *realizações*, a definição de *variável* e a perspectiva da $\boldsymbol{M_pE}$ apresentada neste artigo estão sob as nossas interpretações teóricas, nos fornecendo a base para analisar as diretrizes curriculares de ambos os países. Por isso, o que nós nomeamos por *realizações* da *variável* não necessariamente será chamado de *realização* nos documentos originais do *corpus* da análise.

A terceira e última etapa foi a organização estrutural da análise. Para este processo, inspiramo-nos no que Davis e Renert (2012, 2014) nomearam como *Estudo do Conceito*. Estes dois autores desenvolveram o *Estudo do conceito* com atividades práticas direcionadas aos professores para discutir a forma como lecionar um conceito particular, porém, tal abordagem, e a forma como eles apresentam os resultados da sua pesquisa, nos serviu como estrutura analítica para organizar as diferentes *realizações* encontradas na pesquisa documental.

Davis e Renert (2014) definiram quatro ênfases. A última delas se refere às meta-percepções dos conceitos, entendidas como o desenvolvimento de novas *realizações* a partir das *realizações* encontradas. Como a nossa análise está baseada exclusivamente nas *realizações* apresentadas nos documentos, usamos apenas as três primeiras ênfases propostas por estes dois autores:

- **Ênfase 1 - Realizações**: São todas as ações comunicativas que podem ser nomeadas com a palavra *variável*. As *realizações* podem aparecer em parágrafos que falam especificamente da *variável*, ou em definições formais, em rotinas matemáticas, em metáforas, imagens, exemplos, ou aplicações que usem símbolos literais, etc.
- **Ênfase 2 - Cenários**: É uma forma de categorização, em que se agrupam as *realizações* que são semelhantes de acordo com as definições de *narrativa* e *rotina* definidas por Sfard (2008). Para definir os cenários, analisamos as características das *realizações* e a partir disso verificamos quais eram semelhantes discursivamente, quer dizer, quais *realizações* tinham *narrativas* e *rotinas* convergentes.
- **Ênfase 3 - Vínculos**: Cada realização envolve uma série de implicações lógicas e ligações com diferentes aspectos do discurso matemático. Esta ênfase forma a compreensão do conceito relacionando as suas *realizações* com outros conceitos matemáticos.

Desta forma, os cenários surgem como grandes enunciados que abarcam *realizações* semelhantes em termos discursivos, proporcionando uma visão diferenciada entre um e outro cenário, apresentando, através de sua análise, o conceito na matemática no ensino, atendendo o objetivo do estudo. Os cenários construídos serão discutidos na sessão a seguir.

5. REALIZAÇÕES, CENÁRIOS E VÍNCULOS DA VARIÁVEL

As *realizações* do *conceito de variável* que apareceram nos documentos analisados foram agrupadas em seis cenários: (1) como incógnita ou quantidade indeterminada, (2) na relação funcional, (3) como marcador de posição para definir narrativas associadas a sistemas numéricos ou para parametrizar rotinas matemáticas, (4) como nomenclatura no estudo das medidas, (5) como denominação das coleções de elementos, e (6) como nome de figuras geométricas. Os cenários serão detalhados nas próximas sessões.

5.1. Incógnita ou quantidade indeterminada

O propósito deste cenário é discutir as *realizações* da *variável* como quantidades "indeterminadas" nas equações e inequações. Uma *equação* poderia ser definida como uma declaração de que duas expressões são iguais – chamadas de *membros* –, *re-presentada* com o símbolo "$=$". No caso das *inequações*, a declaração diz que as expressões são desiguais, *re-presentadas* com os símbolos *menor que...* "$<$", *maior que...* "$>$", *menor ou igual* "$\leq$" ou *maior ou igual* "$\geq$".

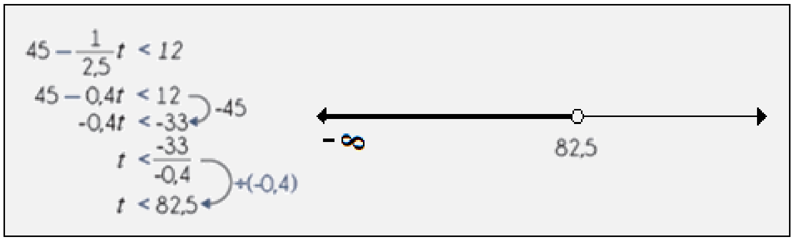
Podemos verificar que na equação ao adicionar ou multiplicar os dois membros por uma mesma quantidade a igualdade não é alterada (MEC, 2015). Esta propriedade é usada para definir as rotinas que podem ser utilizadas para encontrar as quantidades desconhecidas nas equações. Por exemplo, para encontrar o valor de x na expressão $7-3x=11$, podemos adicionar -7 a ambos os membros da igualdade, e posteriormente dividimos os resultados por -3 (MEN, 2014):

$$\begin{array}{ccc} & 7-3x=11 & \\ -7 & & -7 \\ & -3x=4 & \\ \div(-3) & & \div(-3) \\ & x=-\frac{4}{3} & \end{array}$$

Quadro 2. Valor da incógnita. Fonte: (MEN, 2014, p. 22)

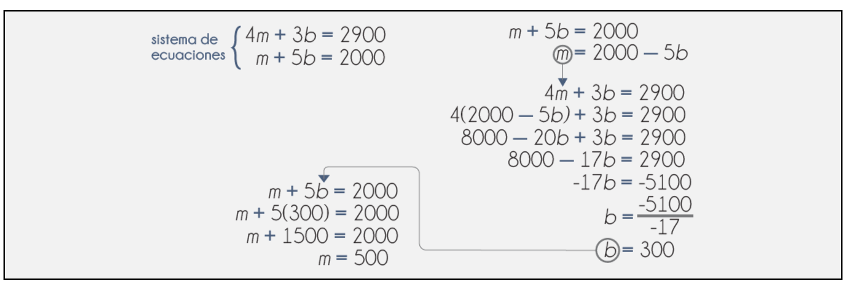
Analisando esta atividade, delimitamos uma primeira realização da variável chamada ***incógnita na equação***, símbolo usado para falar de quantidades desconhecidas em uma igualdade, calculada a partir da informação dada (ELY; ADAMS, 2012). O valor ou valores da *incógnita*, chamados de *solução*, são aqueles que podem ser substituidos pela letra, verificando que a equação seja verdadeira. No exemplo do *Quadro 2* existe um único valor $\left(-\frac{4}{3}\right)$ que faz a equação verdadeira: $7-3(-\frac{4}{3})=11$.

Por outro lado, nas diretrizes curriculares da matemática do Brasil (MEC, 2015), é proposto o ensino da solução e elaboração de problemas com inequações polinomiais, ideia que possibilitou a definição de outra realização chamada ***incógnita na inequação***. Nesta *realização*, os valores da *incógnita* são chamados *domínio da solução*, e podem ser definidos como um intervalo de números que satisfazem a *inequação*. Assim como as equações, as inequações são resolvidas aplicando propriedades da desigualdade, como se mostra no exemplo a seguir: $45 - \frac{1}{2,5}t < 12$.



Quadro 3. Resolução da *incógnita na inequação*. Fonte: (MEN, 2015, p. 29)

Estas duas forma de *realização* da *variável* (*incógnita na equação* e *incógnita na inequação*), podem aparecer em forma *reificada* ou *alienada*, quer dizer, elas emergem da *re-presentação* de um problema específico ou como uma estrutura simbólica desvinculada de uma outra situaçào particular. Destacamos um exemplo da forma *reificada* da ***incógnita na equação***, que apresenta um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas: *Quatro maçãs e três bananas custam COP$2900. Uma maçã e cinco bananas custam COP$2000 (COP refere-se à moeda colombiana). Quanto custa uma maçã? Quanto custa uma banana?* (MEN, 2015, p. 29). Se defirmos a letra m como o *número de maçãs*, e a letra *b* como o *número de bananas*, então poderiamos mostrar a seguinte solução:



Quadro 4. Variável como *incógnita na equação*. Fonte: (MEN, 2015, p. 29)

Existem inúmeras aplicações das equações e inequações, por isso são uma peça fundamental no ensino da matemática. No caso das diretrizes curriculares do Brasil (MEC, 1998), se expressa que embora nos graus iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente no final do ensino básico que o estudo das equações e inequações são aprofundados. Contudo, os valores indeterminados não são as únicas *realizações* da *variável* na escola, existem outras *realizações* escritas com os mesmos símbolos literais, mas com uso diferente, tal como é mostrado no cenário.

5.2. Relação funcional

Este cenário descreve a *variável* como uma forma de comunicação que fala da correlação entre duas ou mais quantidades. Nas diretrizes curriculares para o ensino da matemática no Brasil (MEC, 1997, 1998, 2000, 2012, 2015) e na Colômbia (MEN, 1998, 2006, 2015) se preconiza o ensino da relação funcional através de várias estratégias que incluem o uso adequado da notação simbólica, construção de diagramas ou tabelas, e o uso do plano cartesiano para relacionar as quantidades. De acordo com isso, demarcamos uma *realização* da *variável* que nomeamos ***quantidade dependente e independente***.

Para ilustrar a *quantidade dependente e independente*, analisamos o seguinte enunciado: *para fazer papel machê se umedecem tiras de papel de jornal com uma mistura feita de água e cola. Para cada três (3) copos de cola são necessário dois (2) copos de água*. Quantos copos de água são necessesários para 6 copos de cola? Quantos copos de cola são necessários para um copo de água? (MEN, 2015, p. 19). No enunciado há uma relação de dependência entre duas grandezas, o *número de copos de água* e o *número de copos de cola*, e uma varia em relação à outra. Escolhendo a letra x para falar do *número de copos de cola*, e a letra y para falar do *número de copos de água*, *reificamos* a expressão da seguinte forma: $y = \frac{2}{3}x$. Neste caso, x varia conjuntamente com y, sendo y uma *quantidade dependente* que é calculada de acordo com o valor de x; e x é a *quantidade independente*. Esta relação de dependência se escreve $y = f(x)$, daí podemos definir a função como $f(x) = \frac{2}{3}x$. Existem outras formas para *re-presentar* a relação entre as quantidades (MEC, 1998; MEN, 2006), as quais definimos na table a seguir:

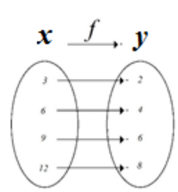
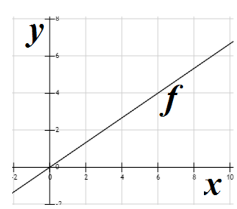
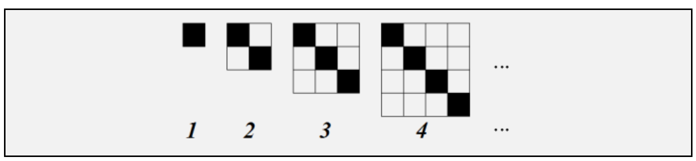
<table>
<tr><th>Diagrama</th><th>Tabela</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td><table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$\frac{2}{3}$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\frac{4}{3}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{8}{3}$</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
</table></td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Tabela 3. Re-presentação da variável na relação funcional. Fonte: Autores

Em primeiro lugar, apresentamos a relação de dependência em um *diagrama*: dois conjuntos cujos elementos são unidos por flechas unidirecionais. O conjunto da esquerda está formado por todos os valores possíveis da *quantidade independente* x, e é chamado de *domínio da função*; e o segundo conjunto da direita contém todos os valores da *quantidade dependente* $y = f(x)$, e é chamado *contradomínio da função*. Segundo os diretrizes curriculares do Brasil (MEC, 1998, p. 578), o professor deve ensinar "*as ideias de domínio, contradomínio e imagem, as suas re-presentações simbólicas e gráficas, e utilizá-las para analisar, interpretar e resolver problemas em contextos diversos"* (MEC, 1998, p. 578). Outro recurso para comunicar a relação de dependência é a *tabela* de valores, e nela associamos um par de números correspondentes aos possíveis valores da *quantidade dependente* em relação à *quantidade independente*, e cada par de números é conhecido como par ordenado – por exemplo $(3\,,2)$, $(4\,,8/3)$. Em terceiro lugar, apresentamos a relação entre as quantidades por meio de um *gráfico* em um plano cartesiano que mostra os valores em um contínuo, no qual o eixo vertical corresponde à *quantidade dependente* e o eixo horizontal à *quantidade independente*.

Um caso especial da *variável* na relação funcional é a *reificação* das sequências (verbais, numéricas ou figuras). As diretrizes curriculares da matemática (MEC, 1998, 2015; MEN, 1998, 2006, 2015, 2016) descrevem o ensino das funções na *reificação* de sequências numéricas, como podemos ver no exemplo a seguir:



Quadro 5. Variável em uma sequência numérica. Fonte: Brasil (MEC, 1998, p. 117).

A *quantidade independente* fala da posição das figuras na sequência, a qual nomeamos genericamente com a letra n, e nesse caso a *quantidade dependente* seria $f(n)$, *re-presentando* o número de quadradinhos brancos de cada figura. Ao *reificar* as transformações, o número de quadrinhos brancos em cada posição pode ser *re-presentado* por $f(n) = n^2 - n$, sendo chamada de *regra de formação* da sequência.

Podemos notar que nas *re-presentações* simbólicas das funções, a letra f é usada para nos referirmos à regra que relaciona as duas quantidades – dependente e independente –. Nesse caso, temos outra *realização* da *variável* que nomeamos como ***operador transformador***, definido como símbolo usado para falar das relações entre as *quantidades dependente* e *independente*.

Por outro lado, consideramos a ***variação*** como uma outra *realização* da *variável*, *re-presentada* pela letra grega delta maiúscula Δ, ou pela letra latina minúscula d, acompanhada de uma letra que *re-presenta* a quantidade que está variando. Por exemplo, para indicar a *variação* de um valor x, escrevemos da forma Δx, indicando a diferença entre o valor final x_f e o valor inicial x_i da respetiva *variação* ($\Delta x = x_f - x_i$). Encontramos esta *realização* associada ao conceito de *taxa de variação média*, caracterizada nas diretrizes curriculares da matemática onde é agumentado que seu ensino deve partir de certas rotinas associadas à resolução de problemas (MEN, 2006, 2015, 2016). A *taxa de variação* é entendida como a medida na qual uma quantidade modifica a outra na relação de co-variação. Se defirmos como a letra x a *quantidade independente*, e com a letra y a *quantidade dependente*, então a *taxa de variação* poderia ser escrita da forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ou $\frac{dy}{dx}$. Para ilustrar isto, apresentamos o seguinte exemplo: *o gráfico a seguir mostra a quantidade de peixes em um lago após a introdução de 800 espécimes* (MEN, 2015, p. 32).

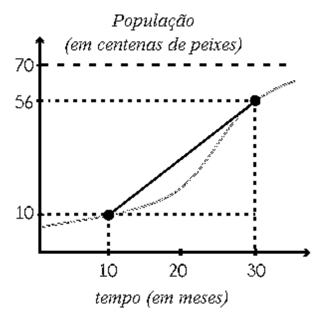


Figura 1. Variável no ensino da *taxa de variação média*. Fonte: (MEN, 2015, p. 32)

No gráfico ilustramos uma relação de dependência entre duas grandezas, a *população* (que chamaremos de p) e o *tempo* (que chamaremos de t). A *taxa de variação média* entre os meses 10 e 30 está dada por: $\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{5600-10000}{20} = 510$ peixes/mês.

O estudo das relações funcionais tem um papel central e estruturador no ensino da matemática (SANTOS; BARBOSA, 2016), porém, este cenário não esgota o poder comunicativo da variável. A seguir apresentaremos um novo cenário que explica outras formas de *realização* da *variável* da matemática.

5.3. Marcador de posição para definir narrativas associadas a sistemas numéricos ou para parametrizar rotinas matemáticas

Este cenário descreve a *realização* da *variável* na produção de *narrativas* (teoremas ou axiomas) associadas aos sistemas numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais, complexos, etc.), e como parâmetros em rotinas matemáticas. Por exemplo, no ensino dos deslocamentos das re-presentações gráficas das funções do plano cartesiano, o professor apresenta o que ocorre com o gráfico da função $f(x)$ ao transformá-la em $af(x), f(ax), f(x)+\ a;\ f(x+a)$, com $a \neq 0$ (MEC, 1998, p. 579). Nesta *re-presentação* simbólica de rotinas matemáticas, se apresenta uma *realização* nomeada por nós ***marcador de posição***. Um *marcador de posição* é um símbolo usado como ponto de referência ou de medida para observar algo.

No exemplo das transformações das funções, o símbolo *a* é um *marcador de posição* usado como se fosse um espaço vazio associados a números específicos em casos particulares; mas também pode ser interpretada como um símbolo que determina uma família de funções, e nesse último caso a letra não precisa tomar um valor determinado, pois é um *parâmetro* para falar dos deslocamentos da função quadrática na *re-presentação* gráfica. As diretrizes curriculares (MEC, 1998; MEN, 2006) propõem o ensino da notação simbólica para expressar generalidades e regularidades. Por exemplo, ensinar a fórmula geral $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ como método de solução da equação quadrática do tipo $0 = ax^2 + bx + c$ (MEN, 2015, 2016).

Para ilustar outro exemplo dos *marcadores de posição*, temos a função quadrática *da forma* $g(x) = ax^2$, da qual sabemos que sua *re-presentação* gráfica é uma parábola. O *marcador de posição* a, o qual cumpre uma função de *parámetro*, possibilita descrever o gráfico da função: *Dizemos que a abertura da função quadrática é para cima ou para baixo dependendo do sinal da letra* a*, e é mais aberta ou mais fechada que o gráfico da função* $y = x^2$ *segundo o valor da letra* a (MEN, 2015, p. 25):

Os *marcadores de posição* também aparecem nas *identidades algébricas*, as quais comunicam propriedades dos números reais e suas operações (MEC, 1998; MEN, 2006), como mostramos a seguir:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;\ \ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Quadro 6. Variável na solução de um binomio ao quadrado. Fonte: (MEN, 2015, p. 26)

Nós usamos o termo *marcador de posição* para nomear uma letra em lugar de um número que será fornecido em um determinado problema ou contexto, mas em casos específicos, os *marcadores de posição* poderão também ser vistos como parâmetros ou coeficientes. Contudo, este cenário se diferença de os outros porque este fala específicaente das operações e propriedades dos sistemás numéricos.

5.4. Nomenclatura no estudo das grandezas

Neste cenário, analisamos as *realizações* da variável usadas para etiquetar, designar ou nomear elementos matemáticos associados com a medida, tais como números, grandezas, unidades de medida, etc.

Denominamos a primeira *realizaçaõ* como ***constante irracional***, para nos referir ao símbolo literal usado para nomear alguns números irracionais, tal como a constante euclidiana obtida na divisão do comprimento do círculo com o seu diâmetro, nomeada com a letra grega π (conhecida como número *pi*). Outro exemplo é o número de Euler e, base dos logaritmos naturais; e o número áureo φ, obtido a partir de uma construção geométrica, indicando a relação ou a proporção entre dois segmentos de uma reta. As diretrizes curriculares da Colômbia (MEN, 2006) propõem demarcar a escritura decimal dos números reais, especialmente dos infinitos não periódicos, definindo as *constantes irracionais* na matemática (MEN, 2006).

As *constantes irracionais* estão intimamente relacionadas à medida, uma vez que o surgimento dos números racionais está marcado pela tentativa de definir a quantidade de uma grandeza e pela impossibilidade de encontrar números racionais que a definam. O ensino da medida é um aspecto fundamental na matemática, orientado ao estudo dos atributos mensuráveis (comprimento, área, capacidade, peso, etc.) e seu caráter de invariância, fazendo sentido ao padrão e a unidade de medida (MEN, 1998).

Na análise da medida, conceituamos outra *realização* da *variável* chamada de ***grandeza***. Por exemplo, podemos usar o símbolo *v* – minúsculo – para falar da velocidade; o símbolo *V* – maiúsculo –, para falar da medida do volume; a letra *A* poderia ser usada para falar da medida da área de uma figura geométrica; a letra *t* poderia ser usada para falar da medida do tempo; a letra *a*, poderia ser usada para falar da medida da aceleração; a letra *h*, geralmente é utilizada como medida da hipotenusa de um triângulo retângulo ou para nos referir à medida de uma altura, etc. A seguir outro exemplo:

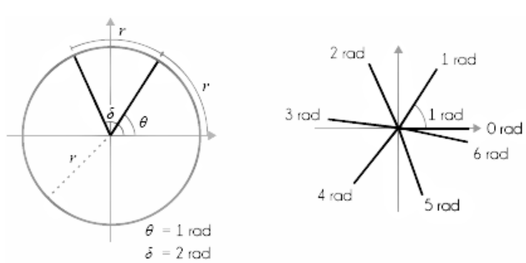


Figura 2. Variável como grandeza. Fonte: (MEN, 2015, p. 34)

A letra r foi usada como medida da medida do raio, definida como a distância do centro a um ponto qualquer da circunferência. Do mesmo modo, as letras gregas θ e δ podem *re-presentar* a medida de dois ângulos cuja unidade de medição são os radianes – *rad* –. Relembramos que esta *realização*, assim como outras *realizações* discutidas nesta análise, pode aparecer de forma *reificada* ou *alienada*, ou seja, os símbolos podem surgir na solução de um problema particular ou em estruturas simbólicas que falam das propriedades e relações geométricas de forma generica.

Nas diretrizes curriculares da matemática da Colômbia (MEN, 1998), é explicada a diferença entre *a unidade* e *o padrão de medida*. Quando definimos um centímetro quadrado ($1cm^2$), incluimos a possibilidade de existir um quadrado de um centímetro de lado, ou um disco com uma área de centímetro quadrado, ou ainda uma região do plano subdividida em triângulos equiláteros cuja área seja um centímetro quadrado, etc. No processo de medição, devemos ter uma unidade de área, esta não precisa estar ligada a um padrão particular. Por isso, é importante ensinar a medir, estimar e comparar comprimentos utilizando unidades de medidas como metro, centímetro, milímetro, etc., assim como qualquer outra unidade de medida não padronizada (MEC, 2015).

Denominamos outra *realização* da *variável* como ***padrões e unidades de medida***, a qual definimos como letras usadas para nomear unidades de medida. Por exemplo: *a unidade-padrão escolhida para medir a massa foi a quantidade de água contida em um cubo cuja aresta mede um decímetro (re-presentada por o símbolo dm), ou seja, de volume igual a um decímetro cúbico (dm^3)* (MEC, 1998, p. 133). A *realização* faz referência às letras usadas para etiquetar unidades de medida, geralmente padronizadas. A unidade-padrão de comprimento é nomeda metro e *re-presentada* pela letra m; a unidade-padrão do tempo é o segundo, simbolizado com a letra s; assim como quilograma (kg) é o nome da unidade-padrão da massa; o metro cúbico é a unidade-padrão do volume, e é simbolizado com a letra m^3, etc.

Como vimos até agora, estamos analisando neste cenário as *realizações* da *variável* que nomeiam elementos que surgem da medição, ação comunicativa para falar dos tamanhos dos elementos do nosso espaço. A estratégia é comparar duas grandezas da mesma natureza, para ver qual é a proporção de uma (quantidade da grandeza) com respeito à outra (unidade). Contudo, esse processo de comparação é suscetível a diversos erros, derivados das limitações nos instrumentos de medida ou da mesma natureza da grandeza. Na prática, o erro de medição pode se dar por vários fatores, como por exemplo as variações das condições ambientais, a calibração do instrumento de medição, etc. Em muitos casos é possível realizar múltiplas medições de uma grandeza, obtendo uma série de valores: $\{x1, x2, x3, \ldots. xn\}$, como por exemplo a temperatura de uma cidade que varia consideravelmente ao longo do dia. Daí, definimos outra *realização* da *variável* que chamamos de ***medidas estatísticas***, fazendo referência aos símbolos literais usados para comunicar valores que resumem a informação contida em um conjunto de dados (MEN, 2006, 2015, 2016). Neste caso, as *medidas estadísticas* resumem as medidas que são obtidas em diferentes medições. Se temos um conjunto de dados *re-presentados* no plano cartesiano, podemos medir à posição da distribuição deles em relação ao eixo horizontal do gráfico (*medida de posição: Média, mediana e moda*), entre outras medidas:

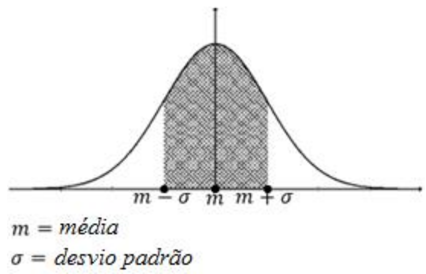


Figura 3. Variável como medidas estatísticas. Fonte: (MEN, 2015 p. 39)

Geralmente usamos a letra m para falar da *média* de um conjunto de dados, definida como o valor que aponta para onde os dados de uma distribuição estão mais concentrados; e σ *re-presenta* o *desvio padrão*, mostrando a medida da dispersão dos dados em relação à média. Na figura 4 são mostrados os dados (parte sombreada) que estão a menos de um desvio padrão da média.

As *realizações* discutidas nesta sessão apresentam a *variável* como nome de um número específico obtido na medida. A seguir apresentaremos outro cenário.

5.5. Denominação de coleções de elementos

Este cenário *realiza* a *variável* como um nome para diferenciar coleções de dados, de números ou objetos manipuláveis, para produr narrativas associadas às suas propriedades.

Uma *realização* da *variável* como nome de um conjunto de dados, é o ***evento aleatório***. Nesta *realização*, a letra comunica o conjunto dos possíveis resultados individuais de um experimento aleatório. Esta *realização* se vincula ao ensino do espaço amostral e ao conceito de probabilidade. Poderiamos utilizar o símbolo A para falar do *lançamento de dois dados, um vermelho e outro azul* (MEN, 2015, p. 31), cujo espaço mostral definimos na imagen a seguir (Figura 4):

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Figura 4. Espaço amostral do evento *A*. Fonte: (MEN, 2015, p. 31).

As *realizações* do conceito de *variável* vão tomando formas particulares em cada um dos cenários em que faz presença, como sucede no último cenário que apresentamos a seguir.

5.6. Nome de figuras geométricas

A geometria é uma forma de comunicação com a qual descrevemos as características do espaço, e a *variável* é um instrumento para nomear e estruturar as propriedades das formas desse espaço, como pontos, ângulos, retas, segmentos, etc. Por exemplo: *a figura 8 destaca o sólido que restou de um cubo de aresta a, após ter sido retirado dele o prisma* BC$YXFG$, *sendo* XY *paralelo a* AD (MEC, 2012, p. 112). Assim como no exemplo, conseguimos definir um conjunto de situações que *realizam* a *variável* como ***entidades geométricas***, usadas para nomear pontos, segmentos, retas, polígonos ou corpos geométricos (ELY; ADAMS, 2012).

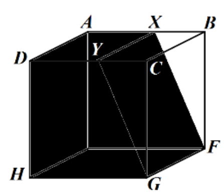


Figura 5. Variável como vértices de um cubo. Fonte: Brasil (MEC, 2012, p. 112)

As letras $A, B, C, D, E, F, G, H, X$ e Y *re-presentam* os vértices de um cubo e de um prisma. Para falar dos lados de ambas as figuras, usamos a união de dois pontos como segmentos, por exemplo XY e AD. A *realização* da *variável* na geometria, assim como as *realizações* discutidas até agora nos diferentes cenários, também é uma forma de *re-presentação* de expressões a partir do uso dos símbolos literais. A função principal desta notação simbólica é estabelecer e estruturar uma forma de escrita para *reificar* narrativas e rotinas de outros conceitos matemáticos, e particularmente neste cenário, o uso da *variável* permite comunicar de forma mais simples axiomas (proposição elementar que constitui a base de uma teoria) ou teoremas (enunciados demonstráveis) associados com as figuras geométricas. Assim, todas as *realizações* dos diferentes cenários sintetizam o nosso modelo, o qual resumiremos a seguir.

6. SÍNTESE DO MODELO

A análise da $\boldsymbol{M_pE}$ do conceito de *variável* nos levou a produzir uma série de vínculos com diferentes tópicos do discurso matemático e com as narrativas associadas a cada uma das *realizações*. Em particular, inspirados na estrutura da análise do *Estudo do Conceito* proposto por Davis e Renert (2014), conseguimos identificar como as *realizações* variam entre os diferentes cenários, formando uma estrutura que relaciona aspectos do discurso matemático, tal como a resumimos na seguinte figura:

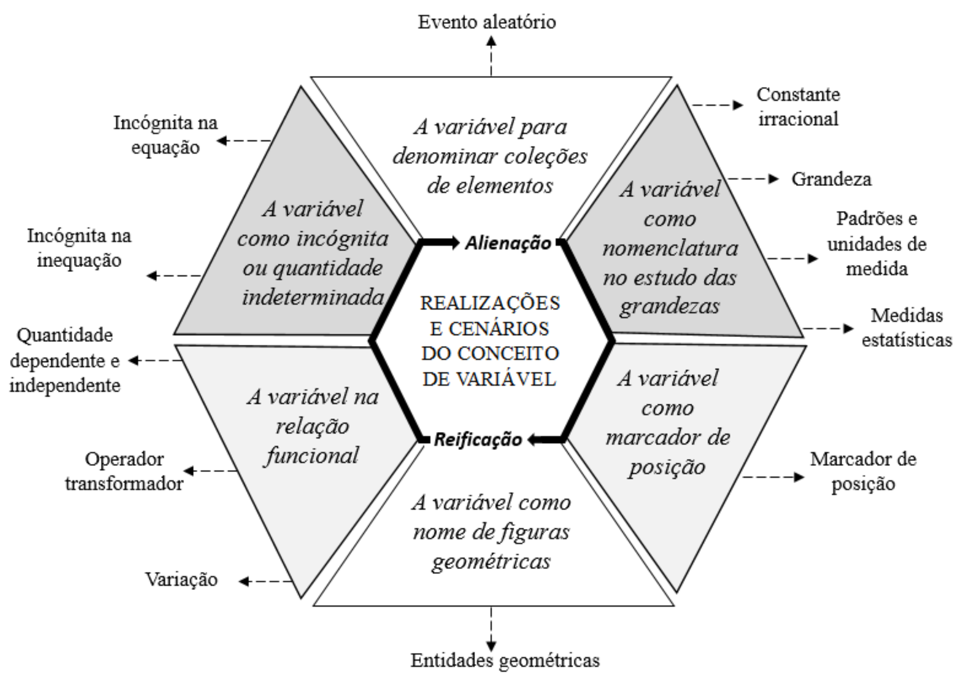


Figura 6. Síntesis do modelo da $\boldsymbol{M_pE}$ do conceito de variável. Fonte: Autores

Na *figura 6,* observamos resumidamente nosso *modelo teórico*. Neste gráfico apresentamos os cenários em seis quadriláteros – as cores só têm como função diferenciar visualmente um cenário do outro – e, com setas tracejadas, sinalizamos as distintas *realizações* da variável encontradas na análise documental, seja em forma *reificada* ou em forma *alienada*. A ordem dos cenários não corresponde a nenhuma forma hierárquica dos mesmos, simplesmente apresentam os aspectos discutidos neste artigo. Embora a dimensão gráfica dos seis cenários seja igual, cada um deles tem suas particularidades e demarcam aspectos específicos da matemática. Por exemplo, alguns deles apresentam a *variável* de forma mais complexa que outros, como é o caso da variável na *relação funcional* que discute as *realizações* "*quantidade dependiente e independiente*", "*operador transformador*" e "*variação*", a diferença do cenário chamado *nome de figuras geométricas*, que só discute a variável como "*entidade geométrica*". No centro de todos os cenários aparece um hexágono que os une, indicando que todos eles configuram o *conceito de variável* mobilizado na matemática no ensino. Estas características do modelo teórico podem ser observadas também de forma pormenorizada na tabela a seguir:

No cenário…	**A variável se realiza como…**	**Definida como símbolo (letra) usado...**	**A qual se vincula ao…**
Incógnitas ou valores indeterminados	*Incógnita na equação*	... para falar das quantidades desconhecidas em uma equação, cujo valor solução é aquele que faz com que a equação seja verdadeira.	... estudo das equações e sistemas de equações.
	Incógnita na inequação	... para re-presentar o intervalo de números (domínio solução) que satisfaem uma inequação.	... estudos das inequações e sistemas de inequações.
Relação Funcional	*Quantidade dependente e independente*	... para falar dos valores que estão em uma relação de dependência em uma função matemática.	... estudo das funções: gráfico de una função, dominio e, propiedades das funções, continuidade e discontinuidade, funções periódicas, simetrías, etc.
	Operador transformador	... para definir as operações que transformam ou relacionam as quantidades que covariam na função.	
	Variação	... incremento de uma quantidade que passa de um valor a outro.	... estudo da taxa de variação média e taxa de variação instantânea.
Marcador de posição	*Marcador de posição*	... como se fosse um espaço vazio na definição de características, axiomas ou propriedades dos conceitos.	... desenvolvimento de narrativas e rotinas matemáticas através da notação simbólica.
Nomenclatura no Estudo das Medidas	*Irracional trascendental*	... para nos referirmos ás constantes irracionais muito usadas na matemática.	... estudo dos números irracionais e na descrição de outros conceitos.
	Grandeza	... para nomear uma grandeza (atributo mensurável)	... estudo da medida: grandezas, medição, unidades e padróes de medida, intrumentos de medição, etc
	Padrões e unidades de medida	... para nomear unidades de medida padronizadas.	

	Medidas estatísticas	... para comunicar diferentes medidas entre os elementos em um conjunto de dados.	... estudo da estatística descritiva e inferencial.
Denominação de Coleções de Elementos	*Evento aleatório*	... para comunicar o conjunto de dados dos possíveis resultados de um experimento aleatório.	... estudo da estatística descritiva e inferencial, e da probabilidade.
Nome de Figuras Geométricas	*Entidades geométricas*	... para nomear espaços, planos, ângulos, pontos, segmentos, retas (ou semiretas), polígonos ou corpos geométricos.	... estudo das construções, axiomes e teoremas nos diferentes ramos da geometría: analítica, euclidiana, projetiva, projecção ortogonal, trigonometria, etc

Tabela 4. Síntese da $\boldsymbol{M_pE}$ *do conceito de variável*

A seguir apresentaremos as considerações finais do artigo, onde discutiremos as implicações deste modelo para o campo profissional e para o campo de pesqusia.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo, inspiramo-nos em alguns conceitos da teoria de Sfard (2008) para dar um olhar à matemática como campo discursivo e a *variável* como conceito que se distribui ao longo da matemática a partir de múltiplas *realizações*, as quais se apresentam como recurso para *re-presentar* ações discursivas em notação simbólica. Alem disso, usamos a proposta do *Estudo do Conceito* de Davis e Renert (2012) como dispositivo analítico para organizar e estruturar as distintas *realizações* que emergiram do nossa análise das diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia, dando forma coerente ao nosso modelo teórico a partir das três ênfases abordadas: *realizações*, *cenários* e *vínculos*. Estes elementos nos permitiram construir o modelo, cujas contribuições são direcionadas para o campo científico e para o campo profissional.

Por um lado, com este trabalho, contribuimos para o campo profissional. O nosso modelo contribui com ferramentas teóricas para a análise da *variável*, as quais podem ser discutidas e usadas pelos professores, tanto em cursos de graduações para a formação de professores como em cursos de atualização docente. Este modelo reconhece a *variável* como um conceito especializado e vivenciado na atividade escolar, e o quail é fundamental no ensino da matemática desde a formação elementar até a formação universitária, aparecendo nas diretrizes curriculares da matemática do Brasil e da Colômbia. Nossas reflexões a respeito da *variável* apresentam um olhar sistemático do uso do conceito na matemática dos professores, reconhecendo as suas *realizações* e propondo este modelo para fazer que se tornem explícitas nas atividades escolares. Dada a importância e a natureza multifacetada das *realizações* da *variável* na matemática, será positivo se os elaboradores das diretrizes curriculares da matemática começarem a dar maior importância à variável, ressaltando as *realizações*, os cenários, as narrativas e as rotinas vinculadas a elas. Esperamos que outras experiências profissionais relacionadas com o ensino da variável, como a elaboração de provas a larga escada, os delineadores de materiais curriculares como livros didáticos, recursos manipuláveis para o ensino da matemática, etc. também usem este modelo teórico para deixar explícitas nos seus modelos as *realizações* da *variável*.

Esperamos também que esta estrutura seja influenciadora do campo professional. Este modelo teórico se configura como base científica para analisar e discutir outros conceitos da matemática. Incluso, como dispositivo para analisar o conceito de variável em otras *Matemáticas para o Ensino*, tanto em livros didátivos, em provas a larga escada, em cursos universitários de formação de professores, etc., tal como propomos neste artigo, construir a $\boldsymbol{M_pE}$ como modelo que captura as *realizações* dos conceitos que são produzidos no próprio campo do ensino, o qual pode gerar uma genda de pesquisa, incluso para refletir acerca da definição de *variável* e criar outros modelos de este conceito.

REFERÊNCIAS

ADLER, J.; DAVIS, Z. Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 37, n. 4, p. 270 – 296, 2006.

ADLER, J.; HOSSAIN, S.; STEVENSON, M.; CLARKE, J. Mathematics for teaching and deep subject knowledge: Voices of Mathematics Enhancement Course students in England, *J Math Teacher Educ*, v. 17, n. 2, p. 129–148, 2013

ADLER, J.; HUILLET, D. The social production of mathematics for teaching. En P. Sullivan & T. Wood (Eds), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 195-222). Rotterdam: Sense Publishers, 2008.

BAENA, GUILLERMINA. Metodología de la investigación. Serie integral por competencias. Primera edición ebook. Grupo Editorial Patria. México, 2014

BALL, D. L.; HILL, H. H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, v. 29, n. 1, p. 14 - 46, 2005.

BALL, D.; THAMES, M.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, v. 59, n.* 5, p. 389 – 407, 2008.

DAVIS, B.; RENERT, M. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construc. *Educ Stud Math*, v. 82, n. 2, p. 245–265, 2012

DAVIS, B.; RENERT, M. The math teachers know: Profound understanding of emergent mathematics. *Editorial Routledge*, New York: pp. 141, 2014.

DAVIS, B.; SIMMT, E. Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, n. 61, p. 293 – 319, 2006.

ELY, R.; ADAMS, A. E. Unknown, placeholder, or *variable*: what is x? *Mathematics Education Research Journal*, v. 24, n. 1, p. 19 - 38, 2012.

ESCALANTE, J. E.; CUESTA, A. Dificultades para comprender el concepto de *variable*: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, v. 24, n. 1, p. 107 - 132, 2012.

EVEN, R. Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics*, n. 21, p. 521–544, 1990.

KÜCHEMANN, D. E. Children’s understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, v. 7, n. 4, p. 23 - 26, 1978.

LÓPEZ, SANDRA, T. Técnicas de investigación documental. Universidad Nacional Autonoma de Nicaragua. UNAM Managua – Farem Esteli. Estelí, 2015

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. Base Nacional Comum Curricular (versão em discussão). Brasília, 20015.

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. Parâmetros curriculares nacionais: matemática (Primeira à Quarta Série). Secretaria de Educação Fundamental - SEF. Brasília: 142p, 1997.

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental - SEF. Brasilia, 148 p, 1998.

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática (Ensino Médio). Secretaria de Educação Fundamental - SEF. Brasilia, 148 p, 2000.

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Brasília, 2012.

MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para lenguaje y matemáticas versión 1. Bogotá, 2015.

MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA): Matemáticas version 2. Bogotá, 2016.

MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Estándares curriculares de matemáticas. Bogotá, 2006.

MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá, 1998.

OSLUND, J. A. Mathematics-for-teaching: what can be learned from the ethnopoetics of teachers’ stories? *Educational Studies in Mathematics*, v. 79, n. 2, p. 293 – 309, 2012.

PREDIGER, S. How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, v. 13, n. 1, p. 73 – 93, 2010.

ROWLAND, T. The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, n. 69, p. 149 – 163, 2008.

RYVE, A.; NILSSON, P.; MASON, J. Establishing mathematics for teaching within classroom interactions in teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 81, n. 1, p. 1 – 14, 2012.

SANTOS, G. L.; BARBOSA, J. Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de um estudo com professores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 48, p. 143 – 167, 2016.

SCHOENFELD, A.; ARCAVI, A. On the meaning of the variable. *Mathematics Teacher*, v. 81, n. 6, p. 420 – 427, 1988.

SFARD, A. *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge*, Cambridge University Press, Series editor EMERITUS, 2008.

SHULMAN, L.S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v. 57, n. 1, p. 1 - 22, 1987.

SHULMAN, L.S. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Washington, v. 15, n. 2, p. 4 - 14, 1986.

STYLIANIDES, A.; STYLIANIDES, G. Viewing "mathematics for teaching" as a form of applied mathematics: Implications for the mathematical preparation of teachers. *Notices of the AMS*, v. 61, n. 3, p. 266 – 276, 2014.

URSINI, S. Il Modello 3UV: Uno strumento teórico a disposizione degli insegnanti di matemática. *QuaderniCIRD*, v. 2, p. 59 – 70, 2011.

USISKIN, Z. Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 1988

CAPÍTULO 4

UN MODELO TEÓRICO DE LAS MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE A PARTIR DE UN ESTUDIO CON PROFESORES

RESUMEN: Este estudio se enfoca en la construcción de un modelo teórico de la *Matemáticas para la Enseñanza* del concepto de variable, el cual describe la producción de diversas realizaciones del concepto de variable. Los datos se recolectaron en un curso con profesores de la Educación Básica en Colombia, donde se discutió acerca de las formas como ellos movilizan este concepto en sus actividades escolares. Los datos fueron organizados en siete categorías: la variable como cantidad desconocida o incógnita; la variable en la relación funcional; la variable como marcador de posición para definir narrativas asociadas a sistemas numéricos o para parametrizar rutinas matemáticas; la variable como nomenclatura asociada a un número o una magnitud; la variable como nominación de una colección de elementos; la variable como nombre de figuras geométricas; y, por último, la variable como nombre de una proposición lógica. El modelo clarifica las formas como es enseñada la variable en la matemática escolar, cuya estructura de análisis puede ser útil para apoyar el trabajo de profesores e investigadores.

PALABRAS CLAVE: Discurso. Variable. Realización. Concepto. Matemáticas para la Enseñanza.

ABSTRACT: This study focuses on the construction of a theoretical model of *Mathematics for Teaching* of the concept of variable, which describes the production of various realizations of the concept of variable. The data were collected in a course with teachers of Basic Education in Colombia, where they discussed the ways in which they mobilize this concept in their school activities. The data were organized into seven categories: the variable as unknown quantity; the variable in the functional relationship; the variable as a placeholder to define narratives associated with numerical systems or to parameterize mathematical routines; the variable as nomenclature associated with a number or a magnitude; the variable as a nomination of a collection of elements; the variable as the name of geometric figures; and, finally, the variable as the name of a logical proposition. The model clarifies the ways in which the variable is taught in school mathematics, whose structure of analysis can be useful to support the work of teachers and researchers.

KEYWORDS: Discourse. Variable. Realization. Concept. Mathematics for Teaching

1. INTRODUCCIÓN

Nos hemos interesado en estudiar el *concepto de variable* por ser un elemento estructurador de la Educación Básica (estudiantes con edades entre 6 y 18 años) hasta la formación Universitaria (Juárez, 2011; García, Segovia y Lupiáñez, 2014; Escalante y Cuesta, 2012). Aunque la palabra *concepto* es importante en nuestra discusión teórica, en esta introducción la usamos sin una definición previa, y le pedimos al lector hacer una comprensión intuitiva de este término que más adelante lo definiremos con mayor precisión. Ahora bien, debido a la importancia de la *variable* en la enseñanza de las matemáticas, consideramos necesario reconocer las diversas actividades escolares donde aparece este concepto.

Esa caracterización del *concepto de variable* no sólo es limitada en la actividad del profesor, puesto que también hemos observado que en diferentes estudios científicos de la Educación Matemática, así como en diferentes documentos oficiales que regulan el currículo escolar, no se dispone de una definición consistente para comprender, diferenciar y relacionar los términos: *letra* –o *símbolo literal*–, *incógnita, parámetro* y *variable* (Nie, Cai y Moyer, 2009). En algunos documentos y artículos científicos se considera que todas esas palabras significan lo mismo, mientras que otros las usan con diferentes significados. Según Radford (2013), Küchemann (1978) y Philipp (1992), la *variable* es un miembro no especificado de un conjunto de datos, definida en términos de una letra que comunica cualquiera o todos los miembros de ese conjunto. En ese caso, la *variable* es entendida como cantidad cuyo valor puede variar según las circunstancias, y desde esta perspectiva, equivale a muchos números simultáneamente. En esa línea, los investigadores Ely y Adams (2012) y Graham y Thomas (2000), por ejemplo, consideran que el término *símbolo literal* es una forma genérica que engloba *incógnitas*, *marcadores de posición* y *variables*, según la situación matemática en la que aparece, y, obviamente, desde ese punto de vista *letra*, *incógnita, parámetro* y *variable* son cosas distintas. Sin embargo, hay otros diversos estudios que considera el término *variable* como el nombre genérico de un conjunto de acciones y situaciones en las que se usan símbolos literales para hablar de diferentes aspectos específicos de las matemáticas (Epp, 2011; Freudenthal, 1983; Malisani y Spagnolo, 2008; Schoenfeld y Arcavi, 1988; Ursini, 2011; Ursini y Trigueros, 2006; Usiskin, 1999). Bajo esta última perspectiva, los investigadores caracterizan diversas formas de usar el término *variable* en las actividades escolares, apareciendo diversas clasificaciones (Usiskin, 1999; Küchemann, 1978; Epp, 2011). Como ejemplo de esa caracterización está el trabajo de Ursini y Trigueros (2006), quienes construyeron un modelo teórico denominado 3UV en el que discuten tres formas de entender la *variable* en las actividades escolares: ya sea como incógnita específica, como número generalizado o en la relación funcional. Debido a esa multiplicidad de miradas y comprensiones de la *variable*, queremos enfatizar que en este estudio consideraremos la *variable* como un conjunto de símbolos literales usados en diferentes aspectos de las matemáticas, y con los cuales se evocan números, proposiciones, magnitudes o formas geométricas para la construcción de propiedades, definiciones y algoritmos en notación simbólica.

Ahora bien, reconociendo la multiplicidad de producciones que presentan la *variable* desde diferentes ópticas, las múltiples interpretaciones y la variabilidad de constructos teóricos y esquemas de enseñanza de este concepto, proponemos el desarrollo de un *modelo teórico* que organice esas producciones, las cuales hemos denominado *Matemáticas para la Enseñanza*. Entendemos por *modelo teórico* de las *Matemáticas para la Enseñanza* del concepto de variable como una estructura que analiza y categoriza las distintas situaciones en que aparece la *variable,* así como sus conexiones con otros aspectos y conceptos matemáticos. Los procedimientos serán ampliados y justificados detalladamente en la sesión del diseño metodológico. En suma, Las *Matemáticas para la Enseñanza*, las cuales abreviaremos $\boldsymbol{M_pE}$, son las matemáticas que se producen para las actividades escolares. Es decir, son las matemáticas discutidas por algunos investigadores en sus planteamientos teóricos; o aquellas presentes en los materiales educativos como libros didácticos, guías o talleres de estudio; así como las que aparecen en documentos y directrices curriculares o en pruebas estandarizadas; o aquellas que emergen en la discusión de un grupo de profesores; entre muchas otras experiencias que hablan acerca de las matemáticas que circulan en el salón de clase. Debido a la existencia de diversas $\boldsymbol{M_pE}$ que abordan el *concepto de variable*, sean artículos científicos, directrices curriculares, pruebas estandarizadas, etc; hicimos un recorte y organizaremos el *concepto de variable* movilizado por un grupo de profesores de la Educación Básica, con la intención de describir las distintas formas como ellos comunican el concepto a sus estudiantes, tal como lo hicieron Coutinho y Barbosa (2016) con el concepto de combinación simple, Menduni-Bortoloti (2016) con el concepto de proporcionalidad y Santos y Barbosa (2016) con el concepto de función.

Todos estos puntos nos llevaron a configurar el objetivo de este estudio: "*Construir un modelo teórico de las Matemáticas para la Enseñanza del concepto de variable a partir de un estudio con profesores*". Las ideas que han sido presentadas en esta introducción y que sustentan nuestro objetivo son provisorias, las cuales serán delineadas más adelante con mayor profundidad. En la sesión siguiente profundizaremos en nuestra perspectiva teórica y discutiremos un poco más acerca del concepto de *variable*, y profundizaremos en las $\boldsymbol{M_pE}$, posterior a ello, definimos el diseño metodológico que guio este análisis, cuyos resultados serán presentados en la sesión subsiguiente.

2. EL CONCEPTO DE VARIABLE DESDE UNA PERSPECTIVA DISCURSIVA

Comencemos presentando la perspectiva teórica que orienta este estudio. Partimos de la idea de que somos participantes de un sinnúmero de formas de comunicación que hablan de aspectos específicos de nuestra actividad humana, y cada una de esas formas dispone de un repertorio de acciones que se validan a partir de la misma actividad comunicativa (Sfard, 2008). Para ilustrar estas ideas, podríamos analizar algunas expresiones cotidianas que hablan de conteos, cuyo conjunto de expresiones se configura como un repertorio de comunicación que transita en determinadas situaciones de formas diversas. Por ejemplo, las acciones de conteo usadas cotidianamente son diferentes a las que utiliza un Biólogo para calcular cuántos individuos hay de una especie en vía de extinción; y en cada una de esas experiencias, los participantes son quienes validan o no cada una de las acciones. De ahora en adelante, llamaremos por *discurso* a cada repertorio de comunicación, los cuales se delimitan entre sí por el conjunto de acciones válidas definidas en cada uno (Sfard, 2008).

Ese presupuesto inicial perfila las matemáticas como un discurso, caracterizadas por (1) un conjunto de *palabras especiales*, como conjunto, número, paralelepípedo, radio, polinomio, etc; (2) la *escritura especial* que combina caracteres numéricos, letras, símbolos de operaciones, formas geométricas, gráficos en el plano cartesiano, etc; (3) la *producción de narrativas*, definidas como una serie de enunciados que definen acciones del discurso; y (4) el *desarrollo de rutinas*, entendidas como un conjuntos de reglas que se repiten en determinado tipo de situaciones (Sfard, 2008). La naturaleza discursiva de las matemáticas enmarca sus *palabras especiales* como formas dinámicas de comunicación que se usan en varias situaciones de formas diversas, llamadas *realizaciones*. Por ejemplo, la palabra *variable* es usada para nombrar el valor desconocido de una ecuación, llamada *incógnita*, relacionada con una serie de rutinas matemáticas para encontrar el valor que satisface dicha ecuación (Matos y Da Ponte, 2008); de igual forma, usamos la palabra *variable* para hablar de un atributo medido en una población (English y Watson, 2015); y en el estudio de las funciones, usamos la palabra *variable* cuando nos referimos a la cantidad dependiente e independiente en la relación de covariación (Bianchini y Alcântara, 2010). De acuerdo con Sfard (2008), las *realizaciones* son cada una de las acciones matemáticas – comunicaciones – que pueden ser nombradas a partir de sus *palabras especiales*, las cuales son generalmente expresiones simbólicas, definiciones, dibujos, gráficos, diagramas, etc. De ahí, definimos *concepto* matemático como un conjunto de *realizaciones* que pueden estar asociadas a una misma *palabra especial* del discurso matemático para designarlas. Por lo tanto, por esta definición, no hay dos planos que separa el *concepto* de las *realizaciones*, porque estas últimas constituyen el propio concepto matemático.

Por lo tanto, cuando hablamos del *concepto de variable* nos estamos refiriendo a un conjunto de *realizaciones* que pueden ser nombradas con la palabra *variable*, las cuales se reconocen dentro del discurso matemático por su escritura especial, generalmente grafemas mayúsculos o minúsculos del alfabeto latino o griego, las cuales se diferencian entre sí por las narrativas construidas alrededor de ellas y por las rutinas vinculadas a cada una. Las distintas *realizaciones* que configuran *el concepto de variable* emergen a partir de dos movimientos discursivos estudiados por Sfard (2008): *alienación* y *reificación*.

Por un lado, el principio de *reificación* dimensiona las *realizaciones* de la *variable* como producto de acciones discursivas que movilizan enunciados hacia otras formas de *re-presentación* simbólica, compactando una serie de acciones verbales en una expresión matemática. En este estudio, entendemos *re-presentación* como el paso de un sistema de escritura a otro. En el caso de la *variable* se introduce un *símbolo literal* y posteriormente se reemplaza por un enunciado. Por ejemplo, si tenemos la expresión: "*la edad de María es el doble de la edad de Pedro*", podríamos reificar dicha expresión de la forma: $m = 2p$, eligiendo los símbolos *m* y *p* para hablar de *la edad de María* y *la edad de Pedro*, respectivamente.

Por otro lado, el principio de *alienación*, descrito por Sfard (2008), presenta a los conceptos matemáticos disociados de situaciones particulares, experimentándolos distanciadamente de las actividades humanas, como si fueran preexistentes al mundo. En el caso de la *variable*, los símbolos literales son presentados de forma impersonal, sin una conexión con situaciones particulares. Por ejemplo: "*encontrar el valor de la variable x en la ecuación* $5x + 2 = 12$".

Las formas *reificadas* o *alienadas* de las *realizaciones* de la *variable* nos sirven de fundamento para reflexionar acerca de la forma en que este concepto está siendo comunicado en distintas producciones acerca de la enseñanza de las matemáticas, las cuales están relacionadas con lo que hemos denominado $\boldsymbol{M_pE}$, en lo cual profundizaremos a continuación.

3. MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE VARIABLE

Para adentrarnos en el estudio del *concepto de variable*, primero partimos de la idea de que este concepto hace parte de las matemáticas específicas para la actividad educativa Esta forma de conceptualizar la matemática enseñada como un campo especializado tiene los cimientos en estudios de Shulman (1986, 1987), quien hizo notables contribuciones al estudio de la enseñanza, y elaboró un marco teórico para describir los *conocimientos del profesor*. Este autor describió el conocimiento específico del profesor, al que denominó *Conocimiento pedagógico del contenido* (*PCK*), el cual sería el conocimiento necesario para la enseñanza de un cierto tema, el cual se combina con el conocimiento del contenido y el conocimiento curricular.

Las ideas de Shulman (1987) fundamentaron el trabajo de Ball y sus colegas (Ball, Hill y Bass, 2005), quienes configuraron la idea de una matemática específica para la enseñanza, la cual llamaron *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*. Desde esta perspectiva, Ball y su grupo de investigadores (Ball, Thames y Phelps, 2008) profundizaron en una categoría llamada *conocimiento pedagógico del contenido*, propuesta inicialmente por Shulman (1986, 1987), para describir al profesor de matemáticas como un especialistas en la enseñanza. La importancia del marco teórico desarrollado por Ball (Ball *et al*, 2005; Ball *et al*, 2008) para la Educación Matemática está en el hecho de haber despertado el interés de otros investigadores para estudiar el conocimiento matemático del profesor como algo especializado (Adler y Davis, 2006; Adler y Huillet, 2008; Chapman, 2013; Mosvold, Jakobsen y Jankvist, 2014).

Cimentado en el trabajo de Shulman (1986, 1987) y de Ball y colegas (Ball y Bass, 2002; Ball *et al*, 2005; Ball *et al*, 2008), se desarrolló un campo de investigación llamado Conocimiento matemático para la enseñanza (***CpE***) o *Matemáticas para la Enseñanza* - $\boldsymbol{M_pE}$, el cual se ha enriquecido a partir de teorizaciones desde diferentes posturas epistemológicas. Por ejemplo, para Ball y Bass (2002) el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza*, para nosotros simplemente $\boldsymbol{M_pE}$, son un tipo de conocimiento especializado que utiliza el profesor en el salón de clase para enseñar matemáticas. Por su parte, Davis y Renert (2009) plantean que las $\boldsymbol{M_pE}$ son una disposición específica y abierta hacia las matemáticas distribuida en la comunidad de profesores. Ahora, independiente de la postura teórica con la cual se defina $\boldsymbol{M_pE}$, en todas ellas se parte del principio de que las matemáticas movilizadas en la enseñanza son una forma especializada, distinta a otras formas de matemática usadas por otros profesionales. En nuestro caso, definimos estas matemáticas como parte de un discurso, el cual se configura a partir de distintas experiencias, tanto en la formación de profesores, sea en la formación profesional o en cursos actualización docente, como en la producción científica de los investigadores, en las orientaciones curriculares, en el desarrollo de materiales educativos, incluyendo la producción de textos escolares, en las pruebas estandarizadas, y cualquier otra persona o grupos de personas enfocadas a discutir la enseñanza de las matemáticas. En cada una de esas experiencias se dimensiona una forma de entender la actividad escolar y se propone formas de conducir la enseñanza de las matemáticas, es decir, cada experiencia produce sus propios *modelos* para comprender la actividad del profesor. Cuando hablamos de *modelo* nos estamos refiriendo a esquemas que *re-presentan* acciones discursivas.

Ahora, definimos por $\boldsymbol{M_pE}$ como cualquier *modelo* producido en esas diversas experiencias de enseñanza, el cual habla acerca de la forma como es o debería ser conducida la enseñanza de las matemáticas en el salón de clase. En este estudio, particularmente, desarrollaremos un *modelo teórico* de las $\boldsymbol{M_pE}$ *del concepto de variable*, es decir, una discusión teórica en la que se organice las diversas *realizaciones* del *concepto de variable*. Por lo tanto, la fuente de los datos para ese *modelo* puede ser cualquiera experiencia de enseñanza que produzca información al respecto de las *realizaciones* de la *variable*; y en este caso, hemos definido como fuente de datos la discusión de un grupo de profesores acerca de su experiencia en la enseñanza de la *variable*. Las características de este estudio serán detalladas y explicadas con mayor detalle en las siguientes dos sesiones, que presentan el contexto de la recolección de datos y el diseño metodológico.

4. CONTEXTO Y PARTICIPANTES EN LA RECOLECCIÓN DE DATOS

Para recoger los datos de la investigación se desarrolló un grupo de discusión con profesores de Educación Básica para conocer las *realizaciones* de la *variable* movilizadas en sus actividades de clase. Esta actividad fue presentada como curso de extensión del Instituto de Ciencias Básicas de la Universidad Católica de Colombia, el cual se llamó "*Las realizaciones del concepto de variable en la enseñanza*", propuesto y orientado por el primer autor de este artículo, y desarrollado en la ciudad de Bogotá - Colombia. Aclaramos que los profesores que participaron de esta discusión no conocen necesariamente los referentes teóricos adoptados en este estudio, puesto que la teoría no fue discutida con ellos en ninguna sesión. Sin embargo, por efectos del título del curso, definimos intuitivamente *realización* como las diferentes formas como aparece el *concepto de variable* en sus actividades escolares, conforme sus relatos. Por lo tanto, el análisis de lo que expresaron los profesores, así como la discusión teórica de los datos está exclusivamente bajo nuestras apropiaciones e interpretaciones teóricas.

El curso tuvo una distribución total de 46 horas de trabajo, 16 horas de actividad presencial y 30 horas de trabajo independiente de cada participante. Los encuentros se desarrollaron dos veces a la semana entre el 12 de julio al 30 de agosto del año 2016, con una intensidad de dos horas cada encuentro. Las clases se realizaron en la misma sede de la Universidad.

El grupo se constituyó por nueve profesores, el cual se mantuvo a lo largo de las sesiones de trabajo, sin presentarse ninguna deserción. A cada uno de ellos se le preguntó por escrito, al inicio del curso, si deseaban aparecer en el presente informe, y en el caso que aceptaran eligieran un nombre personal para referenciarlos: Profesor José Israel Hernández, Profesora Ana Mercedes Márquez, Profesor Rubén Castañeda, Profesor Adrián Velasco, Profesor Lorenzo Zubieta, Profesora Nidia Castro, Profesora Ángela Jiménez, Profesora Marce y Profesora María Isabel González.

Para conocer el perfil de cada uno, entrevistamos a los nueve participantes para conocer su formación académica y los años de experiencia como profesores, y encontramos que todos los participantes son formados profesionalmente para la enseñanza de las Matemáticas y/o Física, con postgrado (especialización o maestría), y entre 10 a 38 años de experiencia docente en la Educación Básica y Universitaria. Hemos hecho esta descripción general de los perfiles de los participantes porque no son datos trascendentales para el análisis de este estudio.

Los profesores se organizaron en dos grupos. El primer grupo estaba compuesto por cinco profesores, cuyos encuentros se desarrollaron los lunes en las horas de la mañana durante las 8 semanas de clase; y un segundo grupo, compuesto por 4 profesoras, cuyas clases eran los martes en las horas de la tarde. La división de estos dos grupos se dio por demanda de los profesores, porque algunos tenían otras actividades en horarios opuestos.

Este estudio fue inspirado en el trabajo de Davis y Renert (2009, 2012,2014) llamado *Estudio del Concepto*, configurado como una estrategia de discusión con profesores. Estos dos autores usan este dispositivo para reflexionar acerca de las *realizaciones* de un concepto particular desde el punto de vista de su enseñanza, y cómo éste se relaciona con otros conceptos de las matemáticas. Según estos investigadores (Davis y Renert, 2014), la discusión entre un grupo de profesores genera amplias listas de *realizaciones* de los conceptos, razón por la cual decidimos inspirarnos en ese estudio. En esta actividad, el investigador es responsable de identificar y modelar las reflexiones que van surgiendo entre el grupo de profesores, por la generación de nuevos problemas y de la interpretación de tales ideas (Davis y Simmt, 2006).

En el primero encuentro (*Semana uno*) expusimos la propuesta de investigación y la forma de conducir del curso. Además, se leyó el *consentimiento informado* donde autorizaron grabar las clases y dejar reporte documental de todas sus actividades, para posteriormente ser publicadas. Se les entregó un formato, el cual fue firmado aceptando su participación.

En el siguiente encuentro (*Semana dos*) los profesores elaboraron una lista de temas donde usan la palabra *variable*. Para esta actividad se les dio 30 minutos. Después se abrió un debate acerca de las diversas formas como presentan la *variable* en sus clases.

A continuación presentamos en forma resumida la descripción de las siguientes sesiones.

Encuentro	Actividad desarrollada
Semana tres	De acuerdo con la lista de *realizaciones* de la *variable* construida, se le pide a cada profesor que seleccione tres de ellas, las que aparecen más en sus clases, y formule tres problemas. Cada profesor explica sus problemas y los resuelve al frente del grupo, y a partir de sus presentaciones se hace la discusión y se amplía la lista con otras nuevas *realizaciones*.
Semana cuatro	En esta sesión se continuó con la actividad anterior. Cada profesor explica sus ejercicios propuestos y los soluciona, y a partir de ello se hace un debate general para discutir nuevas *realizaciones* de la *variable*.
Semana cinco	Se hace una reflexión acerca de la importancia de la *variable* en la enseñanza de las matemáticas, y cada profesor habló acerca de su experiencia con este concepto. Posteriormente, se les pidió que trataran de construir un diagrama donde mostraran la relación entre las *realizaciones*, uniéndolas con flechas y describiendo las relaciones.
Semana seis	Se hizo una actividad en parejas, y a cada pareja se les entregó una carpeta con un cuadro, y en la primera columna aparecían todas las *realizaciones* discutidas por el grupo hasta ese momento. En ese cuadro, los profesores debían definir cada *realización*, explicar las convenciones de su escritura, las rutinas asociadas a cada una, y, finalmente, crear otro ejemplo para ilustrar esos procedimientos.

Semana siete	Se discutió la actividad desarrollada en la semana anterior, y a partir de ello se completa la lista de realizaciones nuevas. Al final de la sesión, se le pide a cada grupo que categorice las realizaciones, de acuerdo a un criterio definido previamente por ellos mismos.
Semana ocho	Se socializan las clasificaciones de cada grupo y se reflexionó acerca de la enseñanza del concepto de variable. Cada profesor habló de la importancia de cada realización para su actividad de enseñanza.

Tabla 1. Actividades desarrolladas en cada semana de clase. Fuente: Autores

A continuación presentamos los procedimientos metodológicos de la investigación y describimos los pasos que hemos seguido para el análisis de los datos.

5. PROCEDIMIENTOS METODOLÓGICOS

Como lo planteamos en la sesión anterior, para definir nuestra estrategia analítica y metodológica nos hemos inspirado en el *Estudio del Concepto*, cuya estrategia nos orienta la conducción de las actividades con los profesores. Para recolectar los datos utilizamos la producción escrita de los profesores, a quienes se les pidió que dejaran registro de sus actividades, y se grabó en audio las discusiones generadas en los grupos.

Para el análisis de datos, nos inspiramos en las categorías o énfasis propuestos por Davis y Renert (2014) en el *Estudio del Concepto*. Estos dos autores proponen cuatro énfasis llamados *realizaciones*, *escenarios*, *vínculos* y *mezclas* (del inglés *realizations*, *landscapes*, *entailments* y *blends*). Como el último de los énfasis se refiere a meta-percepciones de los conceptos, entendido esto como la modificación o combinación de *realizaciones* para crear nuevas formas de *realización* (Davis y Renert, 2014), decidimos sólo usar los tres primeros énfasis, puesto que nuestro modelo es construido exclusivamente a partir de las *realizaciones* movilizadas en las actividades de enseñanza y analizadas por el grupo de profesores. Por lo tanto, redefinimos los énfasis de acuerdo con nuestro filtro teórico:

- **Realizaciones**: Entendemos este énfasis como la captura de las distintas *realizaciones* de la *variable*, las cuales pueden aparecer en forma de expresiones simbólicas, algoritmo, gráficos o diagramas.
- **Escenarios**: Es una estrategia para agrupar *realizaciones* de acuerdo a su semejanza discursiva. En nuestro caso, nos hemos apoyado en la definición de narrativa y rutina de Sfard (2008), es decir, agrupamos las *realizaciones* de la *variable* de acuerdo a su semejanza en las narrativas y rutinas asociadas a éstas.
- **Vínculos**: Cada *realización* trae una serie de relaciones con diferentes conceptos matemáticos, por eso configuramos este énfasis como la descripción de las relaciones de cada *realización* de la *variable* con otros recursos discursivos de las matemáticas (definiciones, conceptos, rutinas, etc.).

Este estudio es una apropiación del *Estudio del Concepto* de Davis y Renert (2014), puesto que no fue aplicado bajo las mismas condiciones teorizadas por estos dos autores, cuyas diferencias podemos marcar en que: sólo elegimos los tres primeros énfasis para nuestro análisis y tanto la organización de los escenarios como el análisis de los vínculos fue elaboración de los investigadores y no de los profesores participantes. Además, en el trabajo original de los autores (Davis y Renert, 2014), los énfasis emergen de la discusión de los profesores y no corresponden a una estructura predeterminada como lo hemos tomado en este estudio.

6. REALIZACIONES, ESCENARIOS Y VÍNCULOS DEL CONCEPTO DE VARIABLE

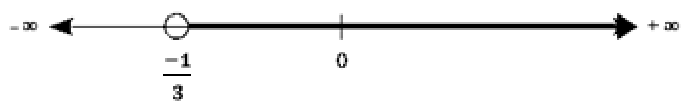
Las realizaciones emergentes en la discusión con los profesores nos permitieron ampliar el panorama acerca de las posibilidades comunicativas por las cuales se *realiza* el concepto de variable. Al estudiar las *realizaciones* y relacionarlas con algunas narrativas y rutinas, nos permitieron definir un perfil para agruparlas, el cual se consolidó en los siete escenarios matemáticos que presentamos en las próximas sub-sesiones, los cuales serán discutidos y delimitados. En esta parte sólo nombramos los siete escenarios que guían nuestro análisis: (1) como incógnita o cantidad indeterminada; (2) en la relación funcional; (3) en la parametrización de propiedades; (4) como nomenclatura en el estudio de las medidas; (5) como denominación de colecciones de elementos; (6) como nombre de figuras geométricas; (7) y como proposiciones lógicas. A continuación profundizamos en cada uno de ellos.

6.1. Incógnita o cantidad indeterminada

Este escenario trae un análisis de la *variable* como *re-presentación* de valores desconocidos. Hemos llamado a la primera realización ***incógnita en la ecuación***, traída a la discusión cuando las profesoras María Isabel González y Ángela Jiménez plantearon el siguiente problema: *¿Cuándo se hace verdadera la ecuación* $3x + 13 = 4$*?* En la expresión, vemos que el símbolo literal habla de un dato desconocido en la *ecuación*. Podríamos entender el término *ecuación* intuitivamente como expresión que define una igualdad entre dos cantidades, cuya *re-presentación simbólica* asocia operaciones aritméticas, números e *incógnitas*. Dado que la ecuación $3x + 13 = 4$ es verdadera o falsa dependiendo del valor por el cual se substituya la x, decimos que esta *realización* habla de los valores específicos que hacen que dicha ecuación sea verdadera, llamados *solución*. En ese sentido, *resolver una ecuación* es encontrar todos los valores de la *incógnita* que satisfaga la igualdad establecida. Es posible que no exista ningún valor que la haga verdadera, y en ese caso decimos que el conjunto de soluciones es vacío; o puede tener un único valor, o varios, y cada uno es una solución particular (Ely y Adams, 2012).

Por otra parte, la profesora María Isabel González plantea otra pregunta: *¿Será que la x en la expresión* $3x + 8 > 7$ *determina otra realización?* A partir de esa duda definimos la ***incógnita en la inecuación***, referida a una cantidad desconocida cuyo *dominio solución* puede expresarse en un continuo de valores, *re-presentado* por un intervalo real. El conjunto solución de las inecuaciones corresponde a todos los valores que pueden substituir la letra, haciendo la desigualdad verdadera (Sfard y Linchesky, 1994). La rutina matemática para encontrar la solución de una inecuación consiste en ir transformando la expresión inicial en otras equivalentes y más simples, hasta definir el resultado:

$3x + 8 > 7 \;\rightarrow\; x > \frac{7-8}{3} \;\rightarrow\; \boldsymbol{x} > \frac{-1}{3}$

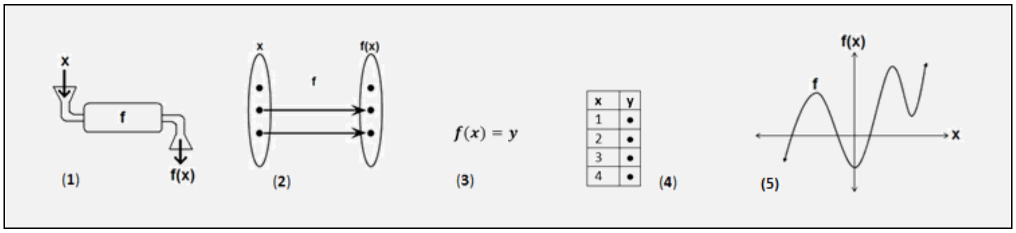


En el ejemplo, el *dominio solución* está definido por el intervalo abierto $(\frac{-1}{3}, +\infty)$, queriendo decir que x expresa todos los números reales mayores que $\frac{-1}{3}$.

Los ejemplos usados para ilustrar la *incógnita en la ecuación* y la *incógnita en la inecuación* aparecen de forma *alienada*, sin embargo, estas *realizaciones* también pueden emerger como *re-presentación simbólica* de situaciones particulares: forma *reificada*. Por ejemplo, cuando se busca la medida de un ángulo determinado, o cuando hay que obtener el área, el perímetro o la medida de algún componente de una figura geométrica, etc. El alcance comunicativo de la *variable* se va ampliando en la medida que van apareciendo los próximos escenarios, y todas sus *realizaciones* deben ser vistas dentro de las posibilidades discursivas de *alienación* y *reificación*.

6.2. Relación funcional

Otra posibilidad comunicativa de la *variable* es la *re-presentación* de cantidades que se encuentran en relación de correspondencia, y de ahí tenemos una *realización* llamada ***cantidad dependiente e independiente***. Esta *realización* fue analizada inicialmente por el profesor José Israel Hernández, quien usó como ejemplo el costo de producción de un artículo, calculado en términos de la cantidad de artículos producidos. Si simbolizamos con "*x*" el *número de artículos* y con "*y*" el *costo de producción*, podríamos *re-presentar simbólicamente* la relación de dependencia *x→y* entre las dos cantidades. Para tal caso, *x* es llamada *cantidad independiente* y cada valor *re-presentado* por esta letra se asocia a un único valor de la *cantidad dependiente y;* y en general, cualquier relación de este tipo puede ser llamada *real* cuando los valores de la *cantidad dependiente e independiente* son números *reales*, y eso lo podemos escribir como $f\colon \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, o $x \rightarrow \{y = f(x)\}$, a ese $f(x)$ se le denomina imagen de x en la función f (Epp, 2011). La profesora Nidia Castro complementó ese análisis y mostró al grupo cinco formas distintas para comunicar esa relación de dependencia:



Cuadro 1. *Re-presentación* de la *cantidad dependiente e independiente*. Fuente: Profesora Nidia Castro

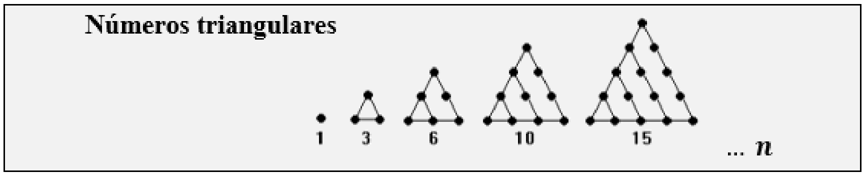
En el primer caso, (1) la relación es vista como una *máquina* que transforma un número de entrada x en otro número de salida y, de acuerdo a la regla expresada en la función f; (2) en el *diagrama*, las flechas indican la relación entre cada número del *Dominio* (conjunto de entrada de la función) con un elemento del *Rango* (conjunto de salida); (3) la *notación simbólica* explicita la regla que relaciona ambas cantidades; (4) la *tabla de valores* evalúa una cantidad limitada de valores x con respecto a la función $f(x)$; y, finalmente, (5) la *gráfica* muestra todos los puntos (x, y) en un continuo en el plano coordenado. Para ilustrar esta *realización*, el profesor José Israel Hernández plantea uno de los ejercicios que trabaja con sus estudiantes:

> Un fabricante produce grabadoras a un costo de US$40 cada una. Se estima que al vender las grabadoras a p dólares la pieza, los consumidores comprarían $x = 120 - p$ de estas. Encuentre la utilidad mensual del fabricante como una función de las ventas.

Cuadro 2. Ejemplo sobre *cantidad dependiente e independiente*. Fuente: Profesor José Israel Hernández.

La *ganancia bruta* es el dinero total obtenido después de la venta de las grabadoras, y la *utilidad* es definida a partir de la operación entre la *ganancia bruta* menos el *costo total de producción*. En el problema, la ganancia bruta es *px*, y el costo total de producción es *40x*, así, definimos la utilidad como $f(x) = px - 40x$. Como $x = 120 - p$, entonces $p = 120 - x$ (reduciendo a una sola variable). De ahí, tenemos que $f(x) = (120 - x)x - 40x = 80x - x^2$

Esta *realización* se vincula al estudio de las funciones, al análisis del crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos absolutos y relativos, simetrías, periodicidad, etc, y en ese intento de encontrar sus vínculos, el profesor Adrián Velasco presentó un caso especial.



Cuadro 3. *Realización* en las sucesiones. Fuente: Profesor Adrián Velasco.

En el ejemplo, la variable n comunica la posición ocupada por el número triangular. Si *re-presentamos* la posición de cada figura según el número de puntos que la conforman, surge la expresión $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, donde $f(n)$ se refiere al número de punto de cada figura. Por lo tanto, la *cantidad dependiente e independiente* también se vincula a las series y sucesiones.

Otra realización de la variable en este escenario es el ***operador transformador***, usado para nombrar la regla u operación que se efectúa sobre ciertas cantidades. En el ejemplo de la sucesión de los números triangulares, el símbolo f es un *operador transformador* indicativo de la regla con la cual se obtiene el número de puntos de cada número triangular, así como vemos en la figura:

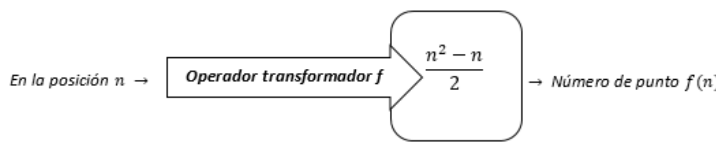


Figura 1. *Operador transformador* en las funciones. Fuente: Autores

En el caso de las derivadas de las funciones, se usan los *operadores transformadores* f' y f'' para hablar de la primera y segunda derivada, respectivamente.

Otra *realización* analizada por el grupo de profesores es el ***incremento***, presentada por el profesor Rubén Castañeda al explicar que este símbolo literal habla del cambio que sufre una cantidad, cuya acción es *re-presentada* con la letra griega delta, mayúscula Δ o minúscula δ, o su homónima del alfabeto romano *d*, además de la letra griega épsilon ε. Para indicar que una cantidad *x* pasa de un valor a otro se escribe el símbolo Δx, correspondiente a la diferencia entre el valor final x_f y el valor inicial x_i, en ese respectivo cambio. El resultado puede ser positivo o negativo, dependiendo si la cantidad aumenta o disminuye al pasar de un valor otro, y se *re-presenta* por $\Delta x = I[x_1, x_2] = x_2 - x_1$.

El profesor Rubén Castañeda plantea el siguiente ejemplo: "*si consideráramos el movimiento de una piedra lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo, y el instante inicial t_0 y el instante* *final t_1 de ese movimiento (t es usada para hablar del tiempo), entonces el incremento del tiempo podría escribirse como* $\Delta t = I[t_0, t_1] = t_1 - t_0$. Ahora, el desplazamiento ($f(t)$) de la piedra está en función del tiempo que va trascurriendo en su movimiento, así, si queremos hablar de la rapidez con la que se desplaza verticalmente la piedra usamos la *tasa de variación media*, y este es uno de los conceptos a los que se vincula la *realización incremento*, *re-presentado simbólicamente* como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y entendido como el cambio de altura en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$, por lo que quedaría escrita de la forma $TVM[t_0, t_1] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$. Para ilustra la situación, el profesor Rubén Castañeda la *re-presenta* en el siguiente gráfico:

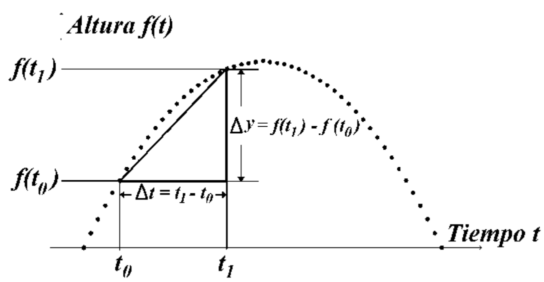


Figura 2. *Re-presentación* de la *tasa de variación*. Fuente: Profesor Rubén Castañeda

El análisis que vincula la *realización incremento* con la *tasa de variación media* nos permitió describir otro vínculo con el concepto de *intervalo de aproximación infinitesimal*. Según el profesor Rubén Castañeda, cuando se tiene, por ejemplo, la función $f(t) = y$ que describe el desplazamiento de la piedra lanzada verticalmente hacia arriba, situación detallada en el párrafo anterior, podríamos verificar la cantidad de desplazamiento en un intervalo de tiempo determinado. El *incremento* del tiempo desde el momento t_1 hasta un momento t_2, definido por Δt, produce un cambio en la cantidad dependiente $f(t)$, definido por $\Delta f(t) = f(t_2) - f(t_1)$. Si pensamos en ese instante desde el momento t_1 hasta t_2 como algo indefinidamente pequeño, podríamos usar la variable δ (delta) para describir ese intervalo de aproximación infinitesimal entre t_1 y t_2, el cual va a producir un desplazamiento $f(t)$ indefinidamente pequeño, llamado ε (épsilon).

La *realización incremento* puede estudiarse en una matemática infinitesimal, comúnmente *re-presentada* con las letras griegas ε y δ, para hablar de incrementos indefinidamente pequeños de la cantidad dependiente e independiente, respectivamente, como vemos en la imagen:

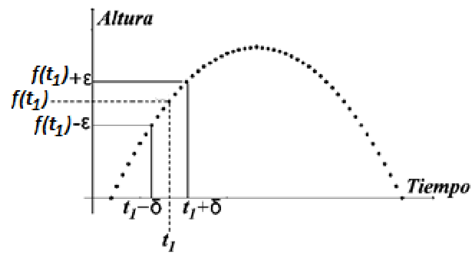


Figura 3. *Re-presentación* del *incremento*. Fuente: Profesor Rubén Castañeda

Todas las *realizaciones* discutidas en este escenario también están vinculadas al estudio de los límites, continuidad, derivada e integración de funciones reales.

6.3. Marcador de Posición para definir narrativas asociadas a sistemas numéricos o para parametrizar rutinas matemáticas

En este escenario describimos una *realización* de la variable usada para comunicar axiomas o teoremas acerca de los números y las relaciones entre ellos. Hemos nombrado ***marcadores de posición*** a los símbolos literales usados para *re-presentar* propiedades de números mediante notación simbólica. Esta *realización* emergió entre las reflexiones de los profesores cuando hablaban acerca de sus experiencias enseñando el *concepto de variable*. El profesor Adrián Velasco, por ejemplo, planteó que cuando sus estudiantes tienen más experiencia con las matemáticas, en vez de describir la propiedad asociativa en la suma de los números Reales, la plantea de la siguiente forma*:* $\forall a, b \wedge c \in \mathbb{R} \rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$.

La profesora Ana Mercedes Márquez y por el profesor Lorenzo Zubieta presentaron otro ejemplo relacionado con el tema de matrices. Los profesores explican que usan estos símbolos en sus clases también para parametrizar operaciones con matrices, por ejemplo: a_{ij} *re-presenta* las entradas de la matriz, los subíndices indican la ubicación del dato, el primero de ellos i indica la fila de la *entrada*, y el segundo, subíndice j, indica la columna. Así, la *Entrada* a_{23} está en la fila 2 y columna 3, como se observa en la imagen:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} & \cdots & \boldsymbol{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{m1}} & \boldsymbol{a_{m2}} & \boldsymbol{a_{m3}} & \cdots & \boldsymbol{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Cuadro 4. Ejemplo de *marcadores de posición*. Fuente: Profesores Ana Mercedes Márquez y Lorenzo Zubieta.

Esta parametrización posibilita la construcción de rutinas describiendo el conjunto de reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir matrices. Por ejemplo, para definir la suma de dos matrices diríamos que: "*dadas dos matrices de la misma dimensión* $A = (a_{ij})$ *y* $B = (b_{ij})$, *se define la matriz suma como:* $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$".

Los *marcadores de posición* también aparece cuando se estudian las *identidades algebraicas*, como se muestra en el ejemplo presentado por las profesoras Marce y Nidia Castro:

Para resolver el cuadrado de una suma de la forma $(\mathrm{a} \pm \mathrm{b})^2$, debemos aplicar la propiedad distributiva $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm ab \pm ab + b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Cuadro 5. Ejemplo de *identidades algebraicas*. Fuente: Profesores Marce y Nidia Castro.

La actividad que presentan las profesoras se configura como una rutina para encontrar expresiones equivalentes a una expresión dada, también llamada *identidades algebraicas*, usada para simplificar fracciones algebraicas (fracciones cuyo numerador y denominador son expresiones que usan letras, números y símbolos de operaciones), resolver ciertas clases de ecuaciones, etc.

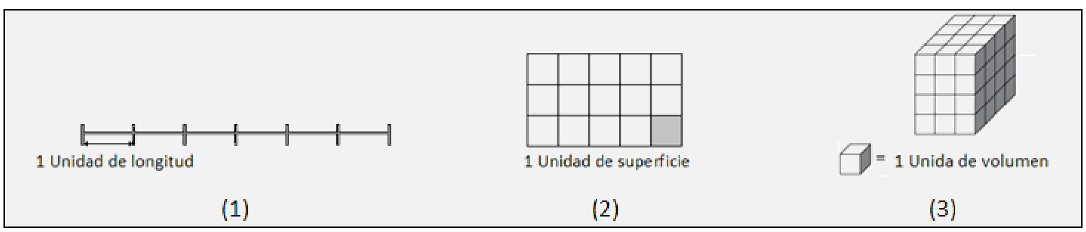
6.4. Nomenclatura en el estudio de las magnitudes

Este escenario hace referencia a etiquetas con las cuales se nombran algunos números, y se designan magnitudes o unidades de medida. Una primera *realización* en este escenario la hemos llamado ***constante irracional***, emergente de la reflexión acerca de los contextos de medida. El profesor Adrián Velasco habló acerca de la existencia de números que se *re-presentan* con símbolos literales cuya naturaleza es irracional. Como ejemplo tenemos el número π, cuyo valor aparece como cociente entre el perímetro de la circunferencia y la longitud de su diámetro; o el número e, también llamado número de Euler, usado como base del logaritmo natural y para realizar cálculos de interés compuesto; así como el número áureo o razón de oro, *re-presentado* con la letra griega ϕ (phi), famoso por ser la proporción usada por Leonardo da Vinci para trazar las dimensiones corporales de las personas en sus pinturas.

Otro motivo de *re-presentar* números con símbolos literales es por su naturaleza imaginaria, de ahí aparece otra *realización* que hemos llamado ***unidad imaginaria***, nombrada también por el profesor Adrián Velazco, cuyo símbolo es el literal "i", el cual sirve para hablar del resultado de $\sqrt{-1}$, y en general, para referirnos a las raíces pares de números negativos. Esta variable ha sido un recurso discursivo para definir el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$).

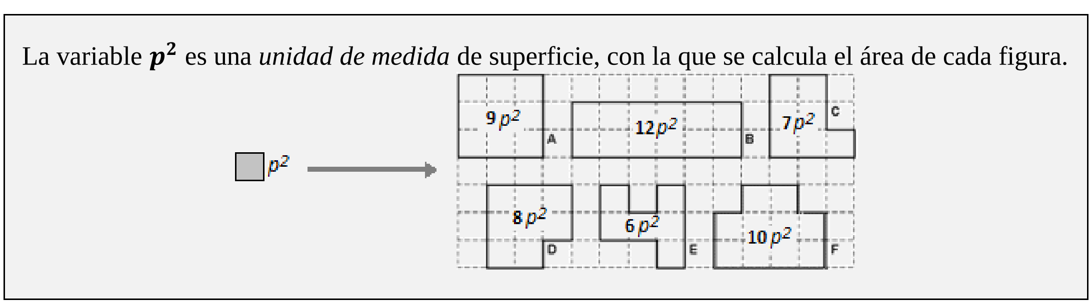
Cuando hablábamos acerca de la variable en contextos de medida surgió otra *realización* que llamamos ***magnitudes***, símbolos usados para etiquetar una magnitud o la cantidad de una magnitud en un problema dado. Los profesores hablan acerca de un acuerdo tácito para definir cómo *re-presentar* los datos de un problema, por ejemplo: generalmente se usa la letra "*V*" mayúscula para hablar de la magnitud volumen y la velocidad con "*v*" minúscula, la letra "*a*" habla de la aceleración, "*r"* define el radio de una circunferencia y la "*A*" etiqueta el área de una figura geométrica.

De igual forma, discutimos con los profesores acerca de la naturaleza de las *unidades de medida*, determinando que el establecimiento de *patrones* y *unidades de medida*, y los símbolos para nombrarlos son acciones para estandarizar una notación métrica. Una *unidad de medida* es una cantidad estandarizada de una determinada magnitud, que por lo general toma su valor a partir de un *patrón*, entendido como la *re-presentación* física de la *unidad de medida*. De esta forma, definimos la *realización* ***patrones y unidades de medida***, usada para nombrar la cantidad de magnitud que sirve de instrumento para comparar y definir una medida. La profesora Ángela Jiménez explica esto con la siguiente gráfica:



Cuadro 6. Ejemplo de *unidades* de medida. Fuente: profesora Ángela Jiménez

La profesora comenta que en sus clases, al iniciar el tema de la medida, los estudiantes eligen una unidad y un patrón para realizar actividades de medición, nombrándolos con símbolos arbitrarios. Por ejemplo, "p^2" es un *patrón* definido como un cuadrado de lado p, cuya unidad de medida permite calcular el área de figuras determinando cuántas veces cabe en cada una de ellas:



Cuadro 7. Ejemplo de *patrones* de medida. Fuente: Profesora Ángela Jiménez

Con esa actividad, la profesora enseña que la acción de medir supone la comparación entre la unidad de medida y otra magnitud de igual naturaleza. Posteriormente, introduce a sus estudiantes al uso del Sistema Internacional de Unidades - ***SIU***, en el que las unidades, patrones y símbolos son elegidos en consenso internacional. Algunos símbolos surgen de las iniciales de científicos importantes, como la unidad de fuerza, llamada Newton y simbolizada por la letra "*N*" en honor al físico y matemático Isaac Newton; o la unidad de presión llamada Pascal, simbolizada por "*Pa*", llamada así en honor al matemático y físico francés Blaise Pascal.

En esa misma intervención de la profesora Ángela Jiménez, emergió otra *realización* llamada ***medidas estadísticas***, definida por la misma profesora como letras usadas para nombrar un valor que sintetiza una medida. Según el grupo de profesores, ellos enseñan cuatro tipos de *medidas estadísticas*: (1) las *medidas de centralización*, para identificar los valores centrales o medios de la distribución, donde se define la *media*, *re-presentada* por la letra $\bar{x}$ acentuada; la *mediana*, *re-presentada* por la letra $\tilde{x}$ acentuada, y *moda*, simbolizada por *Mo*; (2) las *medidas de posición*, que miden la posición de los datos dentro del rango de valores, y entre ellas están los *cuartiles*, generalmente nombrados por Q_1, Q_2 y Q_3, respectivamente; o *percentiles*, *re-presentados* por P_1, P_2, ...P_{99}; (3) las *medidas de dispersión*, que miden qué tan separados están los datos entre sí, y entre ellas está el rango, *re-presentado* por *R*; la *varianza*, *re-presentada* por S_2; la *desviación típica muestral*, definida como *S*; la *desviación típica poblacional*, *re-presentada* por la letra griega σ; y (4) las *medidas de forma*, informando el aspecto que tiene la gráfica de dispersión, como la *asimetría*, *re-presentada* por *AS*; y la *curtosis*, nombrada con la letra *a*.

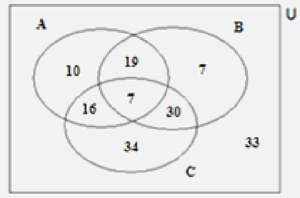
Conocer la forma como se *realiza* este concepto hace que nos especialicemos aún más en este campo discursivo, cuya potencialidad comunicativa no se agota ni con las *realizaciones* analizadas, ni con las que discutiremos en los próximos escenarios.

6.5. Denominación de colecciones de elementos

En este escenario nos disponemos hablar de agrupaciones de datos, y específicamente del uso de símbolos literales como recurso para etiquetarlas. Una de las *realizaciones* las hemos llamado ***conjunto***, letras que nombran una colección de elementos, los cuales se han agrupado por tener una característica común. La profesora Ana Mercedes presenta el siguiente ejemplo:

En un congreso internacional de Educación Matemática se aplicó una encuesta a un grupo de 156 estudiantes para conocer sus preferencias en el idioma al momento de leer un artículo científico. Los datos se presentan en un diagrama de Venn:

$A = \{x|x \text{ lee artículos científicos en portugués}\}$
$B = \{x|x \text{ lee artículos científicos en español}\}$
$C = \{x|x \text{ lee artículos científicos en inglés}\}$



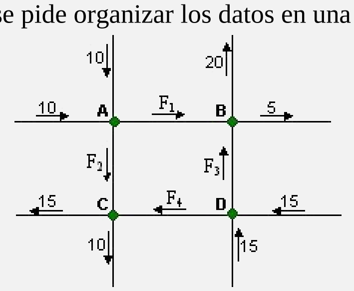
Cuadro 8. Ejemplo de *conjunto*. Fuente: Profesora Ana Mercedes

Esta realización posibilita la construcción de narrativas asociadas a las relaciones que se pueden establecer entre las distintas agrupaciones (unión, intersección, complemento, etc). En el ejemplo, podemos verificar que "*hay 37 estudiantes que prefieren leer los artículos en español y en inglés*" y "*hay 7 estudiantes que prefieren leer artículos en cualquiera de los tres idiomas: español, inglés y portugués*", lo cual se podría *re-presentarse* por $(B \cap C) = 37$ y $(A \cap B \cap C) = 7$, respectivamente.

En la aritmética se definen conjuntos numéricos con símbolos especiales: Con $\mathbb{N}$ se habla de los números naturales, con $\mathbb{Z}$ se habla del conjunto de los números enteros, $\mathbb{Q}$ *re-presenta* el conjunto de los números racionales, $\mathbb{R}$ nombra a los números reales y $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos.

En este mismo escenario hemos llamado a otra *realización* ***matrices***, para hablar de los símbolos que comunican cúmulos de datos interrelacionados, organizados en esquemas bidimensionales (filas y columnas). Para entender esta *realización*, los profesores Lorenzo Zubieta y Ana Mercedes Márquez presentan un ejemplo:

La figura corresponde a una red de tuberías de agua y se pide organizar los datos en una matriz.



Para resolver el problema se debe plantear las ecuaciones de cada nudo A, B, C y D en los que los flujos entrantes tienen que igualar a los salientes.

Nudo **A** $\rightarrow \mathbf{F1 + F2 = 10 + 10 = 20}$
Nudo **B** $\rightarrow \mathbf{F1 + F3 = 20 + 05 = 25}$
Nudo **C** $\rightarrow \mathbf{F2 + F4 = 15 + 10 = 25}$
Nudo **D** $\rightarrow \mathbf{F4 + F3 = 15 + 15 = 30}$

Y dicha información podría *re-presentarse* en una matriz de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & | & \mathbf{20} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & | & \mathbf{25} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & | & \mathbf{25} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & | & \mathbf{30} \end{pmatrix}$$

Cuadro 9. Ejemplo de *matrices*. Fuente: Profesores Lorenzo Zubieta y Ana Mercedes Márquez

Los datos organizados entre filas y columnas son usados para describir situaciones donde hay un flujo constante, como sucede con el tránsito vehicular entre distintas vías urbanas, cuyo estudio ayuda a la construcción de complejos sistemas de semáforos; o la producción, distribución y organización de empresas, etc. Esquematizar las anteriores situaciones generalmente se recurre a arreglos matriciales. Una matriz es nombrada con letras mayúscula del alfabeto romano.

Otra *realización* que emergió en la discusión con los profesores fue ***evento aleatorio***, para hablar del conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio. Esta *realización* fue explicada y presentada por la profesora Ángela Jiménez. La profesora enseña la *re-presentación* del *espacio muestral* con las letras E, S, Ω o U, y los resultados correspondientes a *eventos aleatorios* con letras mayúsculas del alfabeto romano ($A, B, C, ...$), como el siguiente ejemplo: "*Sea A el lanzamiento de dos monedas*", por lo tanto, la variable A está comunicando los posibles resultados de ese evento: $A =$ {sello y cara, sello y sello, cara y cara}.

6.6. Nombre de figuras geométricas

Entre las discusiones con los profesores, se generó un espacio de reflexión acerca de nuestros recursos comunicativos para hablar de nuestra relación con el espacio y los elementos que lo ocupan, ya sea verbal, a partir de gráficos o mediante la escritura simbólica. Esta última *re-presentación* le dio sentido a este escenario, y a otra *realización* que llamamos ***entidades geométricas***, letras que nombran elementos geométricos como puntos, rectas, semirrectas, segmentos, planos, figuras y cuerpos geométricos, posibilitando la descripción de axiomas y teoremas. Esta *realización* es ejemplificada por el profesor Rubén Darío Castañeda:

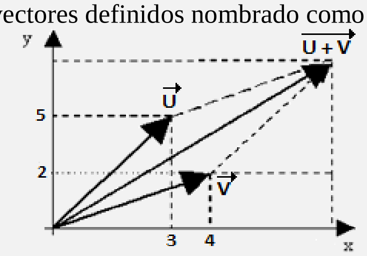
> Sean $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{l}$ dos rectas secantes que se cortan en el punto $\boldsymbol{A}$. Sean $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{M}$ dos puntos de la recta $\boldsymbol{d}$ diferentes de $\boldsymbol{A}$, y sean $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{N}$ dos puntos de la recta $\boldsymbol{l}$, también distintos de $\boldsymbol{A}$. Si las rectas $\overleftrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ y $\overleftrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ son paralelas, entonces se cumple que $\frac{\overline{\boldsymbol{AM}}}{\overline{\boldsymbol{AB}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{AN}}}{\overline{\boldsymbol{AC}}} = \frac{\overline{\boldsymbol{MN}}}{\overline{\boldsymbol{BC}}}$.

Cuadro 11. Ejemplo de *entidades geométricas*. Fuente: Profesor Rubén Darío Castañeda

Esta *realización* es usada para construir narrativas geométricas, como ocurre en la geometría analítica, que cada símbolo corresponde a puntos del plano cartesiano de la forma $A(x, y)$, o como $A(r, \theta)$ en el plano polar, mediante la distancia al centro (r) y la medida angular respecto al eje de referencia (θ). En la geometría euclidiana las *rectas* se nombran con una letra romana minúscula o dos mayúsculas, por ejemplo, la recta $\overleftrightarrow{AB}$ o la recta m. La *semirrecta* y el *segmento* se nombran con dos letras romanas mayúsculas, por ejemplo, la semirrecta $\overrightarrow{AB}$ o el segmento $\overline{AB}$. Por último, los planos suelen nombrarse con una letra del alfabeto griego: Alfa (α), Beta (β), Theta (θ) o Fi (φ), entre otras.

El profesor José Israel Hernández trae otro caso especial de esta *realización*, cuando se usan las *entidades geométricas* para describir *vectores*. En este caso, las *entidades geométricas* hablan de las fuerzas o eventos físicos que influencian la materia, usadas para analizar el movimiento cuando se transportan objetos de un lugar a otro. Las magnitudes vectoriales se nombran con letras acentuadas con una flecha, por ejemplo el vector $\vec{a}$, y en otros casos referenciando el origen y el extremo del segmento que las *re-presenta* geométricamente, por ejemplo $\overrightarrow{AB}$. El profesor José Israel Hernández presentó un ejemplo para el grupo de profesores:

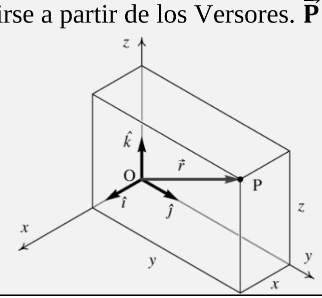
En la imagen aparecen tres vectores definidos nombrado como $\vec{\mathbf{U}}$, $\vec{\mathbf{V}}$ y el vector suma $\overrightarrow{\mathbf{U}+\mathbf{V}}$.



Cuadro 12. Ejemplo de *entidades geométricas*: vectores. Fuente: Profesor José Israel Hernández

El ejemplo posibilitó observar el alcance discursivo de esta *realización*, pues además de ser usada en la geometría euclidiana y en la geometría analítica, es trasversal a todo discurso matemático relacionado con el espacio, su métrica y sus fuerzas. El profesor Israel expresa que en sus clases moviliza esta *realización* también en forma de *versor*, llamados vectores de módulo o intensidad 1. Los *versores* suelen indicarse con letras minúsculas con acento circunflexo, en lugar de una flechita. Así, si tenemos un vector cualquiera podemos encontrar un *versor* que tenga su misma dirección y sólo basta multiplicarlo por su módulo:

$\vec{\mathbf{P}}$, puede construirse a partir de los Versores. $\vec{\mathbf{P}} = \frac{3}{2}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{7}{2}\,\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$.



Cuadro 13. Ejemplo de *entidades geométricas*: versores. Fuente: Profesor José Israel Hernández

Se le puede asignar un vector unitario a cada uno de los tres ejes de coordenadas que son respectivamente: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, y las coordenadas son $\hat{\imath}\,(1,0,0)$; $\hat{\jmath}\;(0,1,0)$; $\hat{k}\;(0,0,1)$.

Las *entidades geométricas* se vinculan al estudio de la Geometría Vectorial para hablar de geolocalizaciones, encontrar distanticas, equilibrio de fuerzas, cálculo medio del viento, y el desplazamiento y movimientos de fluidos, etc. Finalmente presentamos el último escenario, con el cual vamos dando forma a nuestro modelo teórico.

6.7. Lógica de predicados

Este escenario presenta la variable como *re-presentación* de proposiciones lógicas y sus relaciones. Definimos una realización llamada ***proposición***, la cual emerge de una acción discursiva que etiqueta mediante una letra un juicio semántico al que puede asignársele un valor de verdad. La profesora María Isabel González presenta algunos ejemplos de *proposiciones*: p: 6 es un número $\mathbb{N}$; q: 10 es un número Primo; y $r: 4+2=6$.

Esta *realización* de la *variable* aparece como letras minúsculas del alfabeto romano, y se usan con mayor regularidad p, q, r, s y t, las cuales se pueden operar con la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), implicación ($\rightarrow$) y doble implicación ($\leftrightarrow$). Por ejemplo, dadas las anteriores proposiciones, podríamos escribir $r \rightarrow p$ refiriéndonos a la expresión: "*Sí* $4+2=6$, *entonces* 6 *es un número* $\mathbb{N}$". Esta variable es usada en el estudio de los principios de demostración que comprueban si un argumento matemático es o no válido.

De esta forma sintetizamos nuestro *modelo teórico* en los siete escenarios que hemos presentado, y a partir de las relaciones que se van tejiendo con otros conceptos. Este modelo lo resumimos en la última sesión de este artículo.

7. CONSIDERACIONES FINALES

En este estudio nos hemos inspirados en ideas de Sfard (2008) para presentar las matemáticas como campo discursivo, y la variable como recurso comunicativo para describir otros conceptos y re-presentar acciones mediante expresiones simbólicas. Además, la propuesta del *Estudio del Concepto* de Davis y Renert (2009, 2012, 2014) nos orientó en el curso que hicimos con los profesores y nos ayudó a definir nuestra estructura analítica para organizar las distintas *realizaciones* que emergieron en la discusión con los profesores. La unión de todos estos elementos nos llevaron a definir nuestro modelo, el cual resumimos en la siguiente *figura 3*:

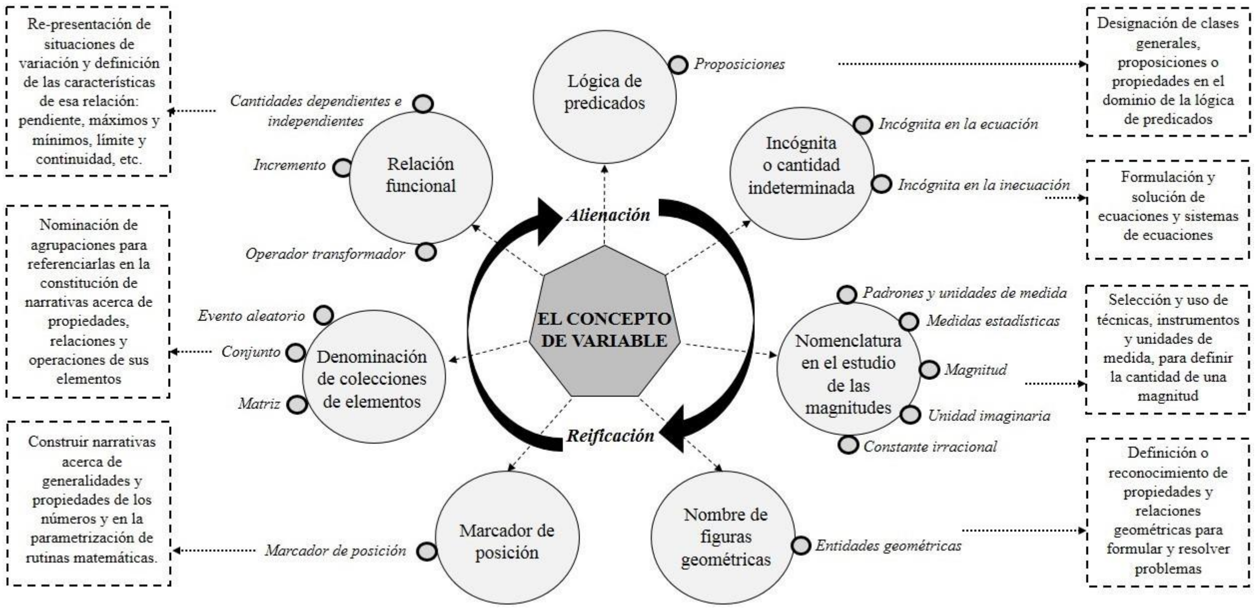


Figura 4. Resumen del modelo de $\boldsymbol{M_pE}$ del concepto de variable

El alcance comunicativo de la variable está disperso entre sus formas de *realización* y escenarios. En el diagrama esquematizamos nuestro *modelo teórico de las* $\boldsymbol{M_pE}$ *del concepto de variable*, organizando en círculos de mayor tamaño los escenarios analizados y *re-presentando* con círculos pequeños las distintas *realizaciones* asociadas a cada uno. Los cuadrados de borde discontinuo resumen los vínculos con otros aspectos de las matemáticas que pueden definirse para las *realizaciones*, y en el centro del modelo dibujamos dos flechas que giran en forma circular indicando las posibilidades comunicativas a partir de los movimientos discursivos de *alienación* y *reificación* de la variable.

Este modelo presenta herramientas teóricas para analizar las *realizaciones* de la *variable* que circulan en la actividad de un grupo de profesores, dándole una dimensión especial a este concepto al analizarlo como un recurso discursivo que se configura y se transforma en las propias experiencias de enseñanza de los profesores. Esperamos que esta estructura de análisis, en la que se reúne un grupo de profesores para conocer cómo está siendo comunicado el concepto en el salón de clase, sirva de base científica para analizar otros conceptos matemáticos. Incluso, dicho análisis puede extenderse para *modelar teóricamente* cómo están siendo comunicadas las *realizaciones* de la *variable* –u de otros conceptos– en otras experiencias de enseñanza, como libros didácticos, pruebas estandarizadas nacionales e internacionales, directrices curriculares, etc.

Además, con este *modelo teórico* queremos mostrar que los profesores no sólo reproducen, sino que promueven formas de entender los conceptos dentro de las instituciones educativas donde laboran. Dado que las matemáticas específicas de la enseñanza también son una compleja red de *realizaciones* de conceptos que pueden vincularse entre sí a partir de *re-presentaciones* específicas y formas de comunicación propias, mostramos que los profesores contribuyen en la configuración de esa forma particular de hablar de las matemáticas, y aportan al desarrollo y selección de las *realizaciones* de los conceptos para discutir en la Educación Básica. Esperamos que este estudio sirva de inspiración para la creación de una agenda de investigación para estudiar la forma como están siendo comunicados los distintos conceptos que circulan en la participación discursiva de diferentes experiencias de enseñanza: investigadores, profesores, currículo oficial, etc.

También quisimos dar una mirada al *concepto de variable* en un sentido amplio, considerándolo como forma de comunicación que transita en diferentes aspectos de las matemáticas para escribir simbólicamente rutinas y narrativas que hablan de números, proposiciones, magnitudes o formas geométricas. Esta contribución teórica se vincula a diversos estudios que abordan la enseñanza del concepto de *variable* desde diferentes perspectivas teóricas y definiciones, trayendo en este modelo otros elementos que contribuyen a la reflexión, como por ejemplo la dimensión de la *variable* como forma genérica para nombrar las letras –o *símbolos literales*– usadas en diversos aspectos de las matemáticas.

Por otro lado, nuestras reflexiones en torno a las *realizaciones* de la *variable* presentan una mirada sistemática del concepto, para que los profesores las reconozcan y las hagan explícitas en su ejercicio profesional. Por lo tanto, este modelo brinda herramientas reflexivas a los profesores, ya sea en formación inicial o en cursos y programas de formación y actualización profesional, para descubrir la multiplicidad de posibilidades comunicativas detrás del concepto de *variable*, dándole mayor importancia en la enseñanza de las matemáticas.

De igual forma, este modelo teórico también puede ser útil para otros campos profesionales, ya sea para la elaboración de mallas curriculares, libros didácticos, pruebas estandarizadas, etc., mediante el reconocimiento de los diferentes escenarios de la *variable* y sus múltiples *realizaciones* a la hora de desarrollar los ejercicios y tareas a estudiar.

REFERENCIAS

Adler, J. y Davis, Z. (2006). Opening an other black box: Researching Mathematics for Teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in mathematics Education*, 37(4), 270-296.

Adler, J. y Huillet, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. En P. Sullivan y T. Wood (Eds), *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 195-222). Rotterdam: Sense Publishers.

Ball, D. L., Hill, H. H. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-46.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Bianchini, B. L. y Alcântara, M., S. D. (2010). A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(2), 354-368.

Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(4), 237 – 243.

Coutinho, J. L., y Barbosa, J. (2016). Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(2), 783-808.

Davis, B. y Renert, M. (2009). Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. *For the Learning of Mathematics*. 29(3), 37- 43.

Davis, B. y Renert, M. (2012). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 245–265.

Davis, B., y Renert, M. (2014). The math teachers know: Profound understanding of emergent mathematics. *Editorial Routledge*, New York: pp. 141.

Davis, B., y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, (61), 293-319.

Ely, R., y Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x? *Mathematics Education Research Journal*, 24(1), 19-38.

English, L. D. y Watson, J. M. (2015). Exploring variation in measurement as a foundation for statistical thinking in the elementary school. *International Journal of STEM Education*, 2(3), 1-20.

Epp, S. (2011). Variables in mathematics education. In Blackburn, P., Van Ditmarsch, H., Manzano, M. y Soler-Toscano, F. (Eds.), *Tools for Teaching Logic: Third International Congress*, Proceedings (pp. 54-61). Berlin/ Heidelberg: Springer.

Escalante, J. E., y Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24(1), 107-132.

Freudenthal, H. (1983). *The didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland; Boston: Reidel.

García, J., Segovia, I., y Lupiáñez, J. L. (2014). El uso de las letras como fuente de errores de estudiantes universitarios en la resolución de tareas algebraicas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1545-1566.

Graham, A. T. y Thomas, M. O.J. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 265-282.

Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 76, 83-103.

Küchemann, D. E. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.

Malisani, E. y Spagnolo, F. (2008). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 19-41.

Matos, A. y Da Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8° ano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 195-231.

Menduni-Bortoloti, R. A. (2016). Um estudo sobre a Matemática para o Ensino de proporcionalidade. Tese de Doutorado em Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

Mosvold, R., Jakobsen, A. y Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science y Education*, 23(1), 47-60.

Nie, B., Cai, J., y Moyer, J. C. (2009). How a standards-based mathematics curriculum differs from a traditional curriculum: with a focus on intended treatments of the ideas of *variable*. *ZDM Mathematics Education*, 41(6), 777-792.

Philipp, R. (1992). The many uses of algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, 85(7), 557–561.

Santos, G. L., y Barbosa, J. (2016). Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de um estudo com professores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (48), 143-167.

Schoenfeld, A., y Arcavi, A. (1988). On the meaning of the variable. *Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427.

Sfard, A. y Linchesky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2), 191-228.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge*, Cambridge University Press, Series editor EMERITUS

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38.

Ursini, S. (2011). Il Modello 3UV: Uno strumento teórico a disposizione degli insegnanti di matemática. *QuaderniCIRD*, 2, 59-70.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. En Barbara M. (Ed). *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 7–13.

Viseu, F. A., y Nogueira, D. (2014). Desenvolvimento do pensamento algébrico de uma aluna do 10.º ano. *REVEMAT: Revista Electrónica De Educação Matemática*, 9(2), 23-56.

Ball, D. L. y Bass, H. (2002). Towards a practice based theory of mathematical knowledge for teaching. En Simmt, E. y Davis, B. (eds), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Kingston, Ontario, Queen's University, pp. 3-14.

Radford, L. (2013). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277.

CHAPTER 5

A THEORETICAL MODEL OF THE MATHEMATICS FOR TEACHING OF THE CONCEPT OF VARIABLE

ABSTRACT: This research focuses on the construction of a *theoretical model* for *Mathematics for Teaching* the concept of *variable*, understood as a theoretical structure used to characterize the way that the *variable* is taught in distinct activities related to the teaching of mathematics. For the collection of data, we selected three sources: systematically choosen scientific articles that discuss some aspect related to the *variable*; the curricular guidelines for mathematics for Brazil and Colombia; and a discussion group for teachers who work in Basic Education in Colombia. Initially, we observed in the three sources the way in which the *variable* is taught. Based on this information, we presented our *theoretical model* via seven categories: the first situates the variable as an unknown quantity. The second category analyzes the *variable* in functional relationship. The third category studies the variable as placeholder. The fourth, dicusses the variable as nomenclature associated with a number or magnitude. The fifth, presents the variable as a name for a set of elements. The sixth category analyzes the variable as a name for geometric figures. Finally, the seventh category, presents the variable as a number of a logical proposition. Each category is dicussed in depth, showing the relation of the variable to other mathematical concepts. This *model* presents relflections regarding the way in which the *variable* is presented in the teaching of mathematics, whose discussion can be presented in teacher training courses, or as a theoretical framework for investigations analyzing the concept, and whose structure of analysis can be useful for the development of other models considering other mathematical concepts.

KEYWORDS: Discourse. Variable. Realization. Concept. Mathematics for Teaching

1. INTRODUCTION

We commonly observe mathematical expressions such as: "*for every* $x \in \mathbb{R}$*, as x increases, the fraction* $1/x$ *decreases*". In this case, the symbol $\mathbb{R}$ is used as a reference for the real numbers; and x, in its turn, describes a variable amount. Nevertheless, we know that numbers neither increase nor decrease, such that the characteristic of *variation* should be interpreted metaphorically. (Quino, 1960). The statement which is taught is "*if we have two real numbers* x *and* y*, if* $x > y$ *then* $1/x < 1/y$". In the expression, the *variable* is a resource that symbolizes numbers, and therefore, these symbols describe a mathematical property.

Some authors speak of the *variable* exclusively when they relate the symbol to the metaphor of variation, with the idea of its being an amount that changes, and the other literal symbols they describe as parameters, unknowns or simply letters (Suárez, Alex & Gómez, 2014; Küchemann, 1978). However, some researchers define the *variable* including literal symbols used in different mathematical activities, be they as unknowns or dependent or independent quantities in a functional relationship, such as parameters etc. (Usiskin, 1999; Dogbey, 2015; Escalante & Cuesta, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014). In the present text we also define *variable* in an ample sense, interpreting it as upper or lower case graphemes from the Roman or Greek alphabet, mainly used to describe properties and relations in terms of propositions and geometric forms.

This study is framed exclusively in terms of the mathematics taught during Basic Education (students aged between 6 and 18 years). When advancing through the different school grades the possibility of using symbolic notations to solve distinct problems is included. Seeking to understand the complexity of this symbolism, some researchers have classified the different contexts in which the *variable* appears (Küchemann, 1987; Usiskin, 1999; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Trigueros & Ursini, 2006). Other researchers, in their turn, have analyzed the difficulties for teaching, dicussing the possible situations that lead students to use these symbols in an inadequate manner (Lucariello, Tine & Ganleyd, 2014; García, Segovia & Lupiáñez, 2014). Additionally, Juárez (2011) presents a study that shows that teachers also have difficulty to define what a *variable* is. These difficulties can be attributed to the use of the same literal symbols to describe different situations, or viceversa, given that teaching of the symbols appears in a tacit manner related to other mathematical *concepts* such as equations, functions, etc. Although the word *concept* is an important term in our theoretical discussion, in this introduction it is used without anticipating its definition, so that the reader understands it intuitively. Later on, we will develop this aspect and define it with greater precision.

Our focus, therefore, is on developing a *model* from which one can categorize the distinct situations, studied in Basic Education, in which the *variable* appears. We refer to as a *model* any scheme that presents in a simplified manner a variety of situations. Specifically, we develop a *theoretical model* from which to analyze and amply discuss *variable* and their relationship to other concepts used in the classroom and studied in mathematics.

When we speak of the mathematics used in Basic Education, we are not restricting this study exclusively to the activity of teachers. We also include any person or group of people that focuses their activity on modelling and developing educational material for the teaching of mathematics, such as researchers for example, especially those who focus on specific aspects related to the teaching of mathematics. Additionally, this can include those who develop textbooks and those who develop standardized tests or curricular guidelines, etc. All these experiences are related to teaching and creating *models* to discuss or structure relevant aspects of the mathematics experienced in the classroom. All of these *models*, we refer to as *Mathematics for Teaching*, which we denote with the initials $\boldsymbol{M_fT}$. According to Davis & Simmt (2006), $\boldsymbol{M_fT}$ are all those descriptions of the complex relationships between mathematical concepts that are in play in school activities.

The importance of the development of this *theoretical model* is in the systematic organization of the $\boldsymbol{M_fT}$ as a unit, specifically in terms of what is said of the *variable*, combining different productions focused on its teaching. That is to say, that systematizes and organizes production focused on teaching the concept of *variable*. According to these ideas, we formulate our objective as *the development of a theoretical model for Mathematics for Teaching –* $\boldsymbol{M_fT}$ *the concept of variable*. The theoretical elements presented so far are provisional ideas, which will be further outlined and developed.

In the following, we present a vision of mathematics as a form of communication. These ideas will help us to better define what the $\boldsymbol{M_fT}$ the concept of *variable* is. Subsequently, we will explain our methodological framework and then construct our *theoretical model*.

2. MATHEMATICS AS A FORM OF COMMUNICATION

As an initial presupposition, we define *communication* as a social activity, in other words, an activity shared by more than one individual that we will refer to as *participants.* Continuing this line of reasoning, Sfard (2008) defines *communication* as the combination of *actions* and *reactions* within a well-established repertoire. For example, if we ask a group of students to solve the equation $2x + 4 = 8$, surely each one will make use of previously learnt *actions* to find the value of x. If one of the students, gives as an answer $x = 10$ (*reaction*), surely his classmates will know that there is an error in their working, because $2(10) + 4 \neq 8$. In this manner, the combination of *actions* and *reactions* is not accidental, but rather always validated or not by the *participants* themselves.

The communicative repertoire for participants is diverse. This we will refer to as *discourses* (Sfard, 2008). For example, Biology and Chemistry are *discourses*, whose repertoire deals with living and chemical substances, respectively. In this sense, we define *mathematics* as another *discursive* activity, whose repertoire specifically considers numbers, functions, sets, geometric forms, etc. According to Sfard (2008), we have four indicators to recognize if an action is part or not of the *mathematical discourse*: (1) by the use of *key words*, such as variable, three, triangle, function, set, perimeter, vector, etc; (2) via *visual mediators,* such as numerical characters (*1, 2/7, 0.34,* etc.), literal symbols (x, $a + b$, y^2, etc.), arithmetical operators ($+, \div, \{\}, [], \sqrt{}, \leq, \neq, =$), graphs, etc.; (3) by *endorsed narratives*, such as theorems, definitions and rules for calculation; and (4) by *routines*, systematic actions that are repeated in certain situations, commonly called formulas or algorithms. Both *key words*, and the use of *visual mediators* and the unfolding of *narratives* and *routines* are tied to understandings shared between groups of *discursive participants*. Therefore, we argue that mathematics is a public activity based on human agreements, and other members with greater expereince initially guide participation. Teaching mathematics, therefore, is guiding the students so that they use its repertoire adequately (Sfard, 2006).

Initially, we will develop the first aspect considered by Sfard (2008): the use of *key words*. Mathematical actions are characterized by the use of a series of words specific to its discourse, such as fraction, segment, circumference, Cartesian plane, function, etc. To the extent that participants become more experienced, they introduce new words and modify the uses of those they had already obtained. For example, in the first years of schooling, the word *number* is introduced, specifically used in counting actions. Subsequently, other words such as *proportionality, variable, function* and *limit*, etc. appear. Additionally, the use of the word *number* is modified during advacement through the school grades, becuase initially it refers to natural numbers and subsequently is extended to other situations involving whole, real, rational and complex numbers. The meaning of words, therefore, depends on their use in mathematics, reflecting the dynamism of human actions (Sfard, 2012). Contrary to seeing words as the names of things in the world, we understand that words only have a sense in the particular situations in which they are used (Sfard, 2008). As occurs with words, the communicative reach of *variable* depends on the situations in which it appears, and independent of which, it would lack sense. For example, *x* can simply be a symbol (*letter*) that is connected to others to write sounds, however, according to this sitaution, it can also be a *variable* when it communicates mathematical actions. The *variable*, therefore, is not a label that directly corresponds to reality, but rather to ambiguous actions to communicate different meanings at different times, which we will call *realizations*. For example, one *realization* of the *variable* is as unknown in equations (Ely & Adams, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014; Radford, 2014, Dogbey, 2015), in other cases, we *realize* it by describing dependent and independent amounts in a functional relationship (Ely & Adams, 2012; Viseu & Nogueira, 2014; Ochoviet & Oktaç, 2011). According to Sfard (2008), *realizations* can be written or spoken words, algebraic symbols, drawings or manipulable objects. Therefore, we define *concept* as a set of *realizations* that can be assoicated with a word from mathematical discourse to designate them. For example, when we refer to the *concept of variable*, we speak of the whole set of possible *realizations* ($\boldsymbol{R_i}$) that can be associated with the word *variable*, as we illustrate in the image (Figure 1).

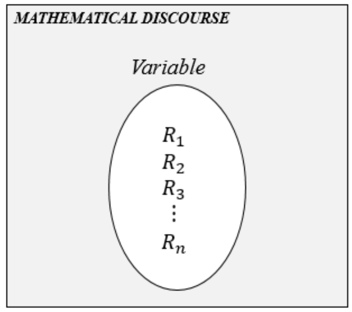


Figure 1. Concept of variable. Source: authors

If we wish to describe the *concept of variable,* we have to speak of its *realizations*. Each *realization* can be displayed using different *visual mediators*: a table, a symbolic expression, a graph, a drawing, a diagram, etc.; and the action of communicating something using a *visual mediator* we will call *re-presentation*. We highlight the prefix *re* to indicate that we refer to communicating something once again. This set of *realizations* that form the *concept of variable* (Figure I) can be studied based on the discursive movements theorized by Sfard (2008): *reification* and *alienation*. On one hand, the principle of *reification* is the act of substituting phrases by a letter or symbol (Sfard, 2008). Therefore, we propose the *reification* of the *variable* as the *re-presentation* of phrases via literal symbols. For example, if we have the expression: "*in three years*, *Pedro will be twice as old as Juan*", we could *reify* it introducing an arbitrary literal symbol *p* to indicate the number of years that Pedro currently has (in three years he will be $p + 3$), and another symbol *j* to indicate the number of years that Juan currently has (in three years he will have $j + 3$). Therefore, the phrase can be *reified* in the following: $p + 3 = (j + 3)$. The *reification*, far from being simply a local transformation of a phrase or set of actions through the use of symbols, is an action that influences the whole discourse, shaping new narratives associated with these symbolic structures.

On the other hand, the principle of *alienation* uses the *variable* disassociated from specific situations. This discursive movement presents the concepts in an impersonal manner, as if they emerged in isolation, without the participation of people, as if the concepts were disconnected from the discursive activity (Sfard, 2008). The *alienated form* appears as symbolic structures without any connection to particular situations, dissimulating the fact that they are discursive structures and, therefore, made by humans. For example: "*the derivative of a linear function* $f(x) = ax + b$ is equal to $f'(x) = a$". In the example, *f*, *f'*, *x,* and *b* have sense in the mathematical symbolic structure itself, without being assocaited with our day-to-day activities.

These two contrasting principles are present in an intricate network of *realizations* that displace themselves in *alienated* or *reified* forms. The use of symbols as something that emerges from the simplification of phrases is the result of *reification*. The contrary would be the symbolic impersonal structure that we have called *alienation* (Sfard, 2008). This manner of understanding the *variable* as discursive action, leads us to focus exclusively on its *realizations*. Specifically, on the *realizations* discussed in the teaching of mathematics. Therefore, this research will be conducted and organized as *Mathematics for Teaching* – $\boldsymbol{M_f T}$, which we will analyze in the following section.

3. MATHEMATICS FOR TEACHING THE CONCEPT OF VARIABLE

The investigation field referred to as Mathematics for Teaching emerges from theorizations of Shulman (1986, 1987), who develops categories for knowledge of the teacher. It is of special interest since it identifies distinctive bodies of knowledge for teaching and the understanding of how contents are organized, represented and adapted for teaching. According to this author (Shulman, 1986, 1987), the teacher needs *pedagogical knowledge* and *content knowledge* to teach, since they not only reproduce, but also are also responsible for the analysis of the applications and implications, for the reflection regarding the curriculum and the development of the methodological aspects for teaching.

Subsequently, the research group at the University of Michigan, led by Deborah Ball (Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Thames, & Phelps, 2008) and influenced by Shulman (1986, 1987), focused its research on the type of *mathematical knowledge* necessary for teaching. These authors highlight the *mathematical knowledge* of professors, differentiating this from the *mathamtical knowledge* required by other professionals (mathematicians, physicists, chemists, etc.). Nevertheless, contrary to these initial ideas regarding the role of the mathematics teacher, some researchers argue that the network of concepts discussed in the classroom are constituted via the discursive action and participation itself of the professors (Davis, 2008, 2012; Davis & Renert, 2009, 2012, 2014).

Although there are divergences in terms of conceptualizing the role of professor, the idea of the teacher as a professional specialized in teaching is generally agreed upon, as well as the idea that there is no single way of doing mathematics. Given this, we will focus exclusively on *taught mathematics* that corresponds to the concepts discussed in school activities, defined as a type of discourse that deals with the description and teaching of a network of *realizations,* as well as the routines and narratives discussed in the classroom. The repertoire of this discursive activity is socially configured in distinct experiences. The selection and development of the mathematical concepts discussed in schools, as well as teaching strategies, both emerged during the discussions of the teachers, in the scientific production of researchers, in the elaboration of curricular material, in the production of textbooks, in the formulation of questionnaires for standardized testing and in the curriculum guidelines for mathematics. It also appears in all the activities focused on the reflection on and production of resources for the teaching of mathematics.

Therefore, we define *Mathematics for Teaching* as *models* that describe the discursive repertoire of *taught mathematics* (Coutinho & Barbosa, 2016; Menduni-Bortoli, 2016; Santos & Barbosa, 2016). On one hand, $\boldsymbol{M_fT}$ of a mathematical concept is the whole *re-presentation* of the structure of the mathematics and teaching strategies used in the classroom. On the other, $\boldsymbol{M_fT}$ are *models* that deal with the *realizations* of the concepts studied in schools. For example, a *school math textbook* is $\boldsymbol{M_fT}$, because in it the *realizations* of the concepts are *re-presented* structurally, showing how to guide the teaching of the mathematics for each school grade. Another example of $\boldsymbol{M_fT}$ are *standardized tests*, because in them a proposal for teaching is formulated: concepts are defined, a form of assessment is defined, etc. Equally, *official curricular guidelines*, the systematization of the discussions of a group of teachers, or the scientific production of researchers discussing mathematical concepts can also be understood as $\boldsymbol{M_fT}$.

Given the variability of $\boldsymbol{M_fT}$, therefore, this study seeks to organize it into a *theoretical model*. We understand by *theoretical model* the whole scheme that organizes, categorizes and discusses theoretically a variety of situations. Our interest is in systematizing, organizing and categorizing the diverse *realizations of the variable* communicated in the diverse productions related to the teaching of mathematics, describing their relationship to other mathematical concepts. The importance of developing this *theoretical model* lies in synthesizing different repertoires that deal with the teaching of the *concept* of *variable*. As teaching experiences are so diverse, we decided on three sources of analysis to develop our *model*, which are summarized in the following diagram (Figure 2):

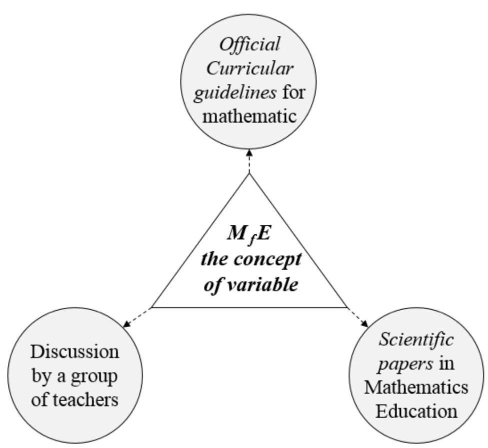


Figure 2. Structure of the theoretical model. Source: authors

The first source corresponds to (*1*) *scientific papers* in Mathematics Education, specifically those that discuss some aspect related to *variable*. The second source is (*2*) the *official curricular guidelines* for mathematics in Brazil and Colombia, because these define the concepts that should be taught at each school grade, proposing suggestions, perspectives, guidelines and recommendations for the elaboration of curricular frameworks. The reason for the limitation to Brazil and Colombia will be explained in further detail in the following section, the methodological design. Finally, (3) we will present the *realizations discussed by a group of teachers*, based on their teaching experience in Basic Education. The way to construct this *model* will be explained in the following section.

4. METHODOLOGICAL OUTLINE

To identify the *realizations* for the concept of *variable*, both in scientific articles and in the curricular frameworks for mathematics from Brazil and Colombia, we have chosen as an analytical strategy documentary research. We restrict this study solely to the curriculum guidelines for mathematics from Brazil and Colombia due to their being the countries of origin of the researchers of the present study. The documentary research identifies relevant aspects of the documents analyzed, being a strategy to observe and systematically reflect on their content, highlighting, interpreting, and presenting data and information regarding the theme of our study (Baena, 2014). The present documentary study is a process that essentially consists in collecting, classifying, recuperating and distributing data related to the *realizations* of the *variable.*

On one hand, to select the scientific papers for the corpus of this study, we defined selection criteria. These restrictions allow the selection of studies with greater accessibility for the scientific community, and guarantee that the journals in which they were published receive international recognition. These criteria are defined below:

- We selected scientific papers published exclusively in journals for Mathematics Education or Mathematics Teaching, classified by the CAPES Funding Agency (Brasil) as A1, A2, B1 or B2, be they in the area of Teaching or Education. This selection was based on the official classification made using seven levels (A1, A2, B1, B2, B4, B5, C) in place since 2016;
- We only selected articles that were free Access for the researchers;
- We also restricted the language of the articles, selecting only articles written in Spanish, English or Portuguese;
- The other selection criteria was the year of publication. We restricted the analysis exclusively to articles published between 1990 and 2015. We considered 25 years sufficient to gain an ample overview in terms of research in the area;

The search for articles was carried out directly via the CAPES website available at http://qualis.capes.gov.br/. The selection took place over a number of stages. During the first stage, we entered the above-mentioned web page and compiled a list of journals for Mathematics Education or Mathematics Teaching, and following this, filtered them based on the application of exclusion criteria. To verify the last exclusion criteria, related to the year of publication, we entered the web page of each journal to select all the volumes and editions published between 1990 and 2015. Following this first classification, we went on to the second stage where we analyzed each one of the journal articles. Our selection was made exclusively from articles that discussed some question related to the concept of *variable*, due to its being the central theme of this study. The selection was made based on reading the titles of the articles, key words and abstracts. From this, we observed and classified the articles that mentioned the word *variable*, or some aspect associated with this concept. After this, we went on to read the entirety of the selected articles to determine if they discussed some aspect related to the concept of *variable*. The last of the stages for classification and selection, resulted in 17 articles for the corpus of the analysis, shown in the following table (Table 1):

Journal selected	**Source**	**N° of papers**
Bolema: Boletim De Educação Matemática	(Garcia, Segovia & Lupiañez, 2014)	1
Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa	(Matos & Da Ponte, 2008)	1
Educación Matemática	(Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Trigueros & Ursini, 2006)	3
International Journal of Science and Mathematics Education - Online First Articles	(Dogbey, 2015)	1
Educação Matemática Pesquisa	(Groenwald & Becher, 2010; Bianchini & Alcântara, 2010)	2
Revemat: Revista Eletrônica De Educação Matemática	(Viseu & Nogueira, 2014)	1
Educational Studies in Mathematics	(Malisani & Spagnolo, 2008; Graham & Thomas, 2000)	2
ZDM Mathematics Education	(Nie, Cai & Moyer, 2009; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005)	2
Mathematics Education Research Journal	(Ely & Adams, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014; Radford, 2014; Wilkie & Clarke, 2015)	4
Total number of articles		17

Table 1. Presentation of articles selected for the study. Source: Authors

We wish to point out that our results were not based on the results of the research, nor on the theoretical framework, nor on the way in which the authors defined the concept being studied, we simply extracted from each article textual excerpts in which we found *realizations* of the *variable*, be they as definitions, examples, graphs, etc. The challenge for the researcher in the documentary analysis is the capacity to select, deal with and interpret the information in the light of their theoretical framework, seeking to understand the theme being studied (Kripka, Scheller & Bonotto, 2015).

On the other hand, in terms of our second source of analysis: *the curricular guidelines for mathematics from Brazil and Colombia*, we chose these documents because that are made up of official guidelines for the teaching of mathematics in Basic Education. We investigated primarily the official documents published by the National Ministries of Education from both countries. This analysis is not a comparative study between Brazil and Colombia. The motive for choosing these two countries is to have a stronger basis and to identify more *realizations* regarding the concept of *variable*.

The process of selecting these documents for the corpus of the analysis of the study, took place in various steps. In the first place, we went to the page of the National Ministry of Education of Brazil (http://portal.mec.gov.br/) and Colombia (http://mineducacion.gov.co/ or http://www.colombiaaprende.edu.co) to select the curricular guidelines for the teaching of mathematics in Basic Education, which we present in the following table (Table 2):

Selected documents	Source
Curricular Framework for Mathematics	MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998
Basic Mathematics Standards	MEN, 2006
Basic Rights for Learning Mathematics (version 1)	MEN, 2015
Basic Rights for Learning Mathematics (version 2)	MEN, 2016
National Curricular Parameters: first and second cycle of primary education	MEC – Ministério de Educação e Cultura do Brasil, 1997
National Curricular Parameters: third and fourth cycle of primary education	MEC, 1998
National Curricular Parameters: high school	MEC, 2000
Complementary Educational Guidelines for the National Curricular Parameters	MEC, 2012
National Shared Curricular Base (version under discussion)	MEC, 2015

Table 2. Curricular guidelines for mathematics studied. Source: Authors

In terms of our third source for analysis: discussions with a group of teachers, we elaborated a course with teachers from Basic Education, seeking to understand the *realizations* of the *variable* shown in their class activities. The course was called "*The realizations of the concept of variable in teaching*", proposed and supervised by the first author of this article, and developed in the city of Bogotá-Colombia. This activity was presented as an extension course of the Instituto de Ciencias Básicas at the Universidad Católica de Colombia.

The course had a duration of 46 hours, 16 hours of classroom activities and 30 hours of homework. The meetings took place twice a week between the 12^{th} of July and 30^{th} of August, in 2016, with two hours per meeting. The classes were given at the university that supported this process.

To document the information, we used the written production of the teachers, who were asked to make a record of all their activities, and the resulting dicussions were recorded. To understand the profile of each teacher, we interviewed the nine participants to understand their academic trajectory and their years of expereince as a teacher. The group consisted of nine teachers who were present at all the sessions, without any absences. Each was asked in writing at the beginning of the course if they wished to appear in the present study, and if they accepted, that they indicate a personal name by which we should refer to them: José Israel Hernández, Ana Mercedes Márquez, Rubén Castañeda, Adrián Velasco, Lorenzo Zubieta, Nidia Castro, Ángela Jiménez, Marce and María Isabel González. All the participants are undergraduates for the teaching of mathematics and/or physics, with postgraduate (specialization or masters), and between 10 to 38 years of teaching experience in Basic and University Education. We have presented this general description of the participant profiles because there is no overall data for analysis in this study.

The particpants were divided into two groups. The first of these was made up of 5 teachers, whose meetings took place on Monday mornings. The second group was made up of 4 teachers, whose classes took place at the request of the teachers, due to having other activities at confliting times. During the first meeting, the research proposal and course methodology were presented. Additionally, the *free and informed consent* was read through whereby the recording of the classes was authorized as well as the documentation of all the activities. The teachers were given the form, which they signed thereby confirming their participation. In the following meetings, the classes were divided into two parts. In the first part, a series of activities took place, amongst which were compiling a list of *realizations* of the *variable*, the planning of exercises or problems to communicate the *variable*, the construction of schemes to present distinct *realizations* of the *variable*, etc. The second part of the class consisted of socialization or discussion regarding the activities developed.

In each one of the three sources analyzed, we extracted relevant information in terms of the *realizations* of the *variable* and its relationship to other mathematical concepts, based on these examples, definitions, descriptions, etc., annotating the references from which they was obtained. Subseqeuntly, they were orgnanized into a list for the elaboration, characterization and synthesis of our *theoretical model*. For the presentation and organization of the results, we were influenced by the structure, which Davis & Renert used to organize their results (2009, 2012, 2014) in their *Study of the Concept*. These two authors developed this tool to think together with the teachers the *realizations* of a particular concept. In *Study of a Concept*, the researcher is responsible for identifying and *re-presenting* the reflections that emerge from a group of teachers regarding the generation of new problems and the interpretation of these ideas (Davis & Simmt, 2006). We were also influenced by *Study of the Concept* to define the analytical organization of the data, and we adopted the analytical levels proposed by Davis & Renert (2014) (referred to by them as *emphases*). These two authors propose four emphases called *Realizations, Landscapes, Entailments* and *Blends*, respectively. The last of these emphases refers to the meta-perceptions of the concepts, understood as a modification or combination of *realizations* to create new forms of *realization* (Davis & Renert, 2014). Therefore, we have not used the category *Blends*, given that our model is constructed exclusively using the *realizations* already found in the different data sources. We have only used the first three categories, the emphases, proposed by these two authors, which we reinterpreted and defined according to our theoretical filter. We explain each one in the following:

- **Emphasis 1 - *Realizations***: All the possible forms such as how one communicates the concept of *variable*, which can have formal definitions, algorithms, metaphors, images, examples, applications or models.
- **Emphasis 2 - *Landscapes***: A form of categorization, by which discursively similar *realizations* are grouped according to their narratives and routines. Initially one analyzes the characteristics of each *realization*, and discusses the narratives and routines assoicated with each. Based on this, one seeks to determine which *realizations* were convergent in constituting these scenarios.
- **Emphasis 3 - *Entailments***: Each *realization* brings a series of implications in terms of different concepts from mathematical discourse. In the case of the present research, this emphasis forms an understanding of the concept of *variable*, relating its *realizations* with other mathematical concepts.

This study is an appropriation of the analysis of the *Study of the Concept* by Davis & Renert (2014), given that it was not applied under the same conditions theorized by these authors. Both the organizations of the landscapes as well as the analysis of the entailments was the development of the researchers, which we present in the following.

5. REALIZATIONS, LANDSCAPES AND ENTAILMENTS OF THE CONCEPT OF VARIABLE

The *realizations* that make up the concept of *variable*, obtained in the three sources analyzed, were grouped in seven scenarios, according to the narratives and routines associated with each one: (1) the variable as an unknown quantity; (2) the variable in a functional relationship; (3) the variable as parameterizer of routines; (4) the variable as nomenclature associated with a number or magnitude; (5) the variable as indicative of a collection of elements; (6) the variable to name geometrical figures; (7) the variable to name a logical proposition. In the following, we will develop each one of the scenarios and explain how one links each *realization* to other concepts from mathematical discourse.

5.1. The variable as an unknown quantity

In these scenarios, the *variable* is *realized* as an instrument for communication in terms of the unknown quantity in an expression. To *re-present* these undetermined values, we generally make use of literal symbols, whose mathematical routines are associated with a search for the unknown value.

By analyzing the distinct sources, we find in all of them a *realization* of the *variable* that we call a ***unknown in equations***. An equation, in intuitive terms, could be interpreted as an expression referring to the equality between two amounts, whose relation one describes with the symbol "=". The expressions that one encounters on each side of the symbol "=" are nominated *members of the equation*. The *variable*, therefore, is *realized* as a symbolization of the unknown quantity that makes a true equality (Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Bianchini & Machado, 2010; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014). To find the value, called the *solution of the equation*, it is necessary to r*ealize* certain arithmetical operations (Matos & Da Ponte, 2008; Groenwald & Becher, 2010; Dogbey, 2015; Malisani & Spagnolo, 2008; Graham & Thomas, 2000; Viseu & Norueira, 2014; Nie, Cai & Moyer, 2009; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005; Radford, 2014). Additionally, we know that when adding, subtracting, multiplying or dividing the two members of the equation by the same quantity, one does not alter the equality (MEC, 2015), and this property is used to define the routines used to find the unknown values. It is possible that no value exists that makes the equation true, and in this case we would say that the solution is empty; or could have a single value, or various, and that each one is a particular solution of the equation (Ely & Adams, 2012). For example, x is the *unknown* in the equation "$5x - 9 = 11$" (Suárez, Alex & Gómez, 2014).

The teachers María Isabel González and Ángela Jiménez, in their turn, stated that the teaching of the *unknown* focuses on the solution of the equations, fundamentally based on the transposition of the terms, *realizing* the arithmetical operations indicated and applying the properties of the multiplicative inverse and/or of the additive inverse to find the value of the *variable*. Nevertheless, as Ursini & Trigueros (2006) state, it is important that teachers also teach how to solve equations using other strategies. Only utilizing the symbolic *re-presentation* of the equation, prevents the student from making better use of this *realization* of the *variable*. It is necessary to begin from the analysis of other *re-presentations* where we perceive the role of the literal symbol in the equality. For example, in the curricular guidelines from Brazil (MEC, 1998, p. 133) we find that "*despite the use of two-plate scales being increasingly less common, they are still a useful resource to verify some principles of equality*" and better interpret the *unknown in equations*. Additionally, another *re-presentation* consists in identifying the members of the equation as functional relations, graphing them and based on this, finding the corresponding values of the *unknown*, interpreting them as cut points between those of the graphs (Trigueros & Ursini, 2006, p. 23). The teacher Marce proposes an example of the *unknown in equations*: *2x + 4 = 10*, which we show in the following table (Table 3):

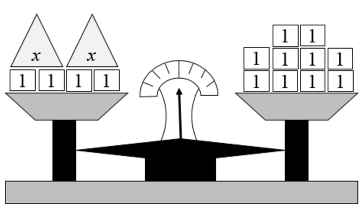
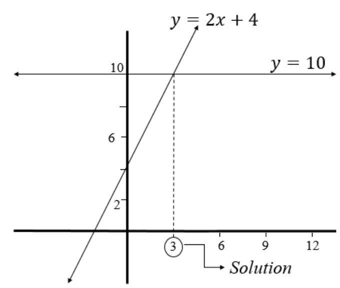
Drawing (scale)	**Symbolic (algebraic)**	**Graphic (cartesian plane)**
	$2x + 4 = 10$, *x* is multiplying the *2*, the term *2x* is adding with *4*. Transpose the term *+4*: $2x = 10 - 4$ $2x = 6$ Transpose the factor 2: $x = 6/2$ $x = 3$	

Table 3. Re-presentations of specific unknowns. Source: authors

As well as the *unknown in equations*, we encounter another *realization* of the *variable* that emerges in the revision of the curricular guidelines for mathematics (MEC, 2015), and from the teachers' discussion group, which we refer to as ***unknown in inequalities***, which is generally tied to the solution of problems via polynomial inequalities. In this *realization*, the literal symbol communicates all the possible values (*domain solution*) that make the inequality true. According to the group of teachers, in the same way that we solve an equation, the mathematical routines to find the *domain solution* of an inequality consist in transforming the initial expression into other, simpler equivalents, until the result is defined. To simplify the expressions, it is necessary to apply the properties of the inequality, such as we show in the example proposed by the teacher María Isabel González: *find the domain solution of x in the inequality 3x + 8> 7* (Figure 3).

$$3x + 8 > 7 \;\rightarrow\; x > \frac{7-8}{3} \;\rightarrow\; \boldsymbol{x} > \frac{-1}{3}$$

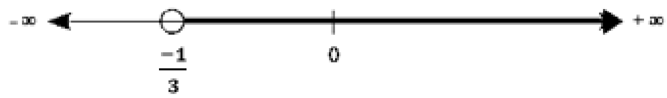


Figure 3. Example of the unknown in inequalities.

We see that in the example that the teacher proposes, the symbol *x* appears in an *alienated* manner, without being associated with any specific content, whose *domain solution* is defined by the open interval $(\frac{-1}{3}, +\infty)$, meaning by this that *x* speaks of all the real numbers greater than $\frac{-1}{3}$.

Although in all the initial grades, some aspects related to equality and inequality can already be introduced, it is particularly at the end of Basic Education that these themes are studied (MEC, 1998). The communicative reach of the *variable* will be extended as is discussed in the following scenarios.

5.2. The variable in the functional relationship

This scenario is configured based on the distinct *realizations* of the *variable* that demarcate a relation of dependency between the amounts. We can say that two amounts are dependently and functionally related, when it is necessary to know the first to know with exactness the value of the second to which it is related.

Another communicative possibility for the *variable* is found in the study of correlated quantities, *re-presented* via literal symbols, indicating that one quantity will produce another. For example, we can say that the quantities *x* and *y* are related ($x \rightarrow y$), indicating that the quantity *x* would produce a quantity *y* based on a determined rule or chain of operations (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Matos & Da Ponte, 2008; Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Dogbey, 2015; Bianchini & Machado, 2010; Viseu & Nogueira, 2014; Malisani & Spagnolo, 2008; Nie, Cai & Moyer, 2009; Ely & Adams, 2012; Wilkie & Clarke, 2015). This *realization* of the *variable*, found in the three sources analyzed, we call ***dependent and independent amounts***, which are seen in the following example: "*A grocer sells one kilogram of tomatoes at $12.00 and the cost of picking the crop is $24.00. What is the relation between what the grocer gains and the number of kilograms of tomatoes sold*" (Trigueros & Ursini, 2006, p. 18). To solve this problem, we should first identify the functional relation between the number of kilograms of tomatoes sold, that we will arbitrarily designate *t*, and the profit obtained, that we will symbolize as *g*, knowing that we should take into consideration the cost of the harvest. The profit is the total value of sales minus expenses, knowing that it is necessary to sell 20 kilos of tomatoes to recuperate what is spent on the harvest (240/12 =

20). Subsequently, we *reify* the statement via the expression $g = 12t - 240$ for all $t > 20$. If we only sell 20 kilos of tomatoes or less, there will not be expenses but rather only losses.

According to the teacher José Israel Hernández, any relation of this type can be called *real* when the value of the *dependent* and *independent amounts* are real numbers. Additionally, the teacher explains that every expression of the form $g = 12t - 240$ is known as a *function*. The quantity *t re-presents* any real number with which we realize a series of arithmetical operations, and whose result is *re-presented* with the symbol *g*. *g* is called a *dependent quantity* because its value depends on *t*. In this order of ideas, *t* will be called an *independent quantity*. Describing the quantity *g* in a more appropriate way, and indicating its relationship with *t*, we could *re-present* symbolically $g = f(t)$ (if the *the values f of t* are read). The $g = f(t)$ one indicates the image of *t* in the function *f*. Therefore, another *re-presentation* of the function is: $f(t) = 12t - 240$. The teacher Nidia Castro complements this analysis, and presents five ways of *re-presenting* the function, which are in agreement with what is presented in the curricular guidelines for mathematics from Brazil and Colombia (MEC, 1998, 2015; MEN, 1998, 2006, 2015, 2016). There it is argued that the teaching of the functional relation should include different strategies that make use of symbolic notation, the construction of diagrams and tables, and the use of the Cartesian plane (Table 4):

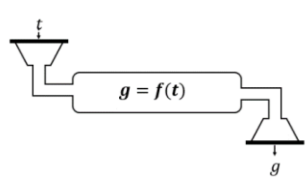
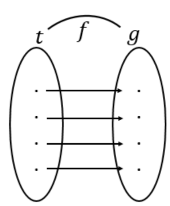
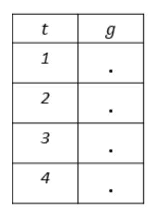
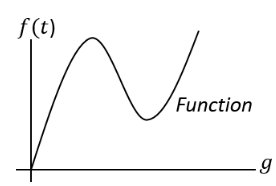
Symbolic notation	**Machine**	**Diagram**	**Table of values**	**Graph on the cartesian plane**
$\boldsymbol{g = f(t)}$				

Table 4. Re-presentation of the covariant. Source: authors

Table IV presents five forms to *re-present* the relation between the independent quantity *t* and the dependent quantity $f(t) = g$. Firstly, there is (1) the *symbolic notation*, explaining the rule or chain of arithmetical operations that relate both quantities; secondly, (2) the relation of co-variation is presented as a *machine* that transforms a number *t* (ingoing) into another number *g* (outgoing); (3) we can also *re-present* it using a *diagram* in which sets are shown, whose elements are unified by unidirectional arrows that indicate the relation of dependency. The set formed by all the possible values of the independent *variable t* is called the *domain of the function*; and the second set contains the values of $g = f(t)$, called the *range*. According to the curricular documents from M (MEC, 1998,

p. 578), the professor should teach "*the ideas of domain and range, their algebraic and graphic re-presentations, and use them to analyze, interpret and resolve problems in diverse contexts"*. Equally, (4) the function *re-presents* itself in a *table of values*, showing the relation between the quantities as ordered pairs (t, g). Lastly, (5) we could present the relation using a *graph on a Cartesian plane*, showing the values in a continuum. The vertical axis communicates the independent *variable* and the horizontal axis the dependent *variable*.

A special case of this *realization* is the *reification* of situations that define a sequential transformation, be they verbal, numerical or in figures. The curricular guidelines for mathematics from Brazil and Colombia (MEC, 1998, 2015; MEN, 1998, 2006, 2015, 2016) speak of the importance of teaching functions to define numerical sequences, as we see in the following example (Table 5):

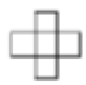
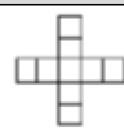
Position		**1**	**2**	**3**	**…**	**100**	***n***
Terms	**Form**				…	¿?	¿?
	Number	4	6	8	…	¿?	¿?

Table 5. Dependent and independent quantities in the successions.

The independent amount corresponds to the position of each element in the sequence. In the example, if we arbitrarily named with the letter *n* the position of each figure, and with *f* the number of squares by which each figure was constituted, we could *reify* these transformations via the expression $f(n) = 4n - 3$. This aspect is discussed by some articles that indicate it to be the *generalized form of a pattern* (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Escalante & Cuesta, 2012; Dogbey, 2015; Viseu & Nogueira, 2014; Ely & Adams, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014; Radford, 2014; Wilkie & Clarke, 2015).

In any function, for example $f(x) = y$, the letters were chosen arbitrarily and serve to indicate the rule or chain of arithmetical operations with which you relate the *dependent* and *independent quantities*. In this manner, we define the other *realization* of the *variable* called the ***transformer operator***. This *realization* was defined based on the curricular guidelines for mathematics for Brazil and Colombia (MEC, 1998; MEN, 2015, 2016), and from the discussions with the teachers. In the prior function $f(n) = 4n - 3$, *f* is a *transformer operator* indicative of the operations that should be realized to find the number of squares for each figure in any of the positions, as we *re-present* in the following image (Figure 4):

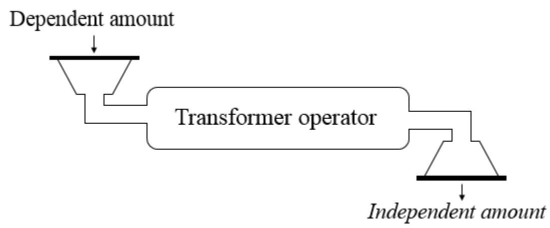


Figure 4. Re-presentation of the transformer operator. Source: Authors

We encounter other examples of the *transformer operator* in the derivatives of the functions, where the symbols f' or f'' deal with the first and second derivatives, respectively.

Another *realization* of the *variable*, emerging from the discussions with the teachers and in the analysis of the curricular guidelines for mathematics from Brazil and Colombia (MEC, 1998, 2015; MEN, 2015, 2016) is that used to communicate a ***change***. According to the teacher Rubén Castañeda, this *variable* deals with an amount that has changed, whose action is *re-presented* with the upper case Greek letter Δ or by its homonym in the Roman alphabet *d*, accompanied by the quantity that is changing. For example, Δx or *dx* indicate the change of a quantity *x*. In some cases the change is *re-presented* with the Greek letter epsilon ε or lower case Greek letter δ. Nevertheless, as was presented in the introduction to this article, numbers do not increase nor diminish, therefore, such a characteristic of variation of this *realization* should be interpreted metaphorically. The *change* refers to the difference between the numbers indicating the bigger one in respect to the other. This we *re-present,* for example, with the symbol Δx indicating the difference between the values x_1 and x_2. The result of the *change* can be positive or negative and can be symbolized by $\Delta x = I[x_1, x_2] = x_2 - x_2$. This *realization* is connected with the concept of the *average rate of variation,* which should be taught based on the solution of the problems (MEN, 2006, 2015, 2016), understood as the measure by which one *variable* modifies another in a relation of covariation. If we define *x* specifically as an independent *variable*, and *y* as the dependent *variable* then the *rate of variation* can be written in the following manner $\Delta y/\Delta x$ o dy/dx. To illustrate this, we will analyze an example: *the graph* (Figure 5) *shows the number of fish in a lake after introducing 800 individuals.*

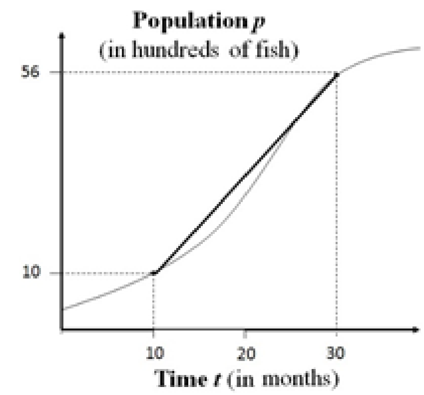


Figure 5. Example of the realization as change. Source: (MEN, 2015, p. 32)

The *change* between 10 and 30 months shows the time *t* passed between these months, and this action can be *reified* in the form $\Delta t = I[t_0, t_1] = t_1 - t_0 = 30 - 10 = 20$, indicating that between 10 and 30 months, 20 months have passed. In its turn, the *change* corresponding to the population of fish p, between these months, indicates by how much the population, which we *reify* as $\Delta p = I[p_0, p_1] = p_1 - p_0 = 5600 - 1000 = 4600$ increases, meaning that between 10 and 30 months the fish population increases by 4,600 individuals. Now, if we wish to deal with the speed at which the fish population increases between these months, we use the concept *average rate change – ARC,* which one obtains using the expression $ARC[10{,}30] = \Delta p / \Delta t = 4600/20 = 230$, indicating that between the months analyzed (10 and 30) the fish population grew by 230 individuals every month (Figure 6).

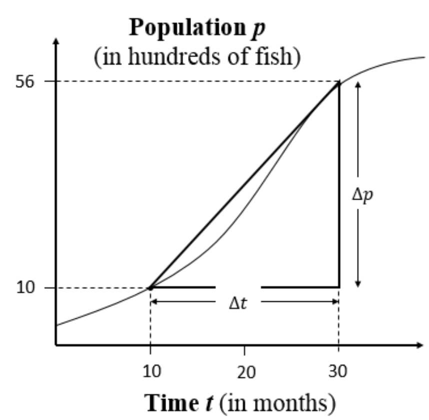


Figure 6. Example of the average rate change. Source: Authors

Another concept to which the *change realization* is connected is the *infinitesimal approximation interval*. The Teacher Rubén Castañeda explained that when we have a function, we can verify the amount of displacement in a determined time interval *t*. For example, the *change* of time Δt from the moment t_1 until the moment t_2, produces a change in the dependent *variable* $f(t)$, defined by $\Delta f(t) = f(t_2) - f(t_1)$. If we think of this instant from moment $t_1$until t_2 as being infinitely small, we can use the *variable* δ (delta) to describe the infinitesimal interval between t_1 and t_2, which will produce and infinitely small displacement in *f(t)*, called ε (epsilon). Therefore, the *change realization* also appears in infinitesimal mathematics, commonly symbolized with the Greek letters ε and δ, to speak of infinitely small *changes* of the *dependent and independent quantitites*. Consequently, we see that the *realizations* of the *variable* are also connected to the study of limits, continuity, derivatives and integration of real functions.

The study of the functional relations has a central and structuring role in the teaching of mathematics, however this scenario does not exhaust the communicativer power of the *variable*. In the following, we present a further scenario that presents other forms of *realization*.

5.3. The variable as placeholder to define narratives regarding numerical systems or to parameterize mathematical routines

It is common to make use of symbolic forms to communicate mathematical narrative or routines. Therefore, we define this scenario based on the literal symbols related to these routines, and with which one defines calculations or procedures to solve problems. Additionally, these literal symbols, allow the description of properties of numerical operations.

Another *realization* of the *variable*, which we refer to as a ***placeholder***, has been described by some researchers as *generalizing rules and methods*. This *variable* is *realized* via the synthesis of methods and procedures using literal symbols (Matos & Da Ponte, 2008; Escalante & Cuesta, 2012; Ochoviet & Oktaç, 2011; Dogbey, 2015, Trigueros & Ursini, 2006; Bianchini & Machado, 2010; Groenwald & Becher, 2010; Viseu & Nogueira, 2014; Malisani & Spagnolo, 2008; Graham & Thomas, 2000). Once the procedures of the symbolic expressions are established, we encounter structures that only had sense when we substituted the literal symbol for a specific value (Ely & Adams, 2012). This is why this *realization* is understood as an empty space that can be replaced with numbers. Other articles also refer to this *realization* as a *placeholder* (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Groenwald & Becher, 2010; Viseu & Nogueira, 2014; Nie, Cai & Moyer, 2009; Graham & Thomas, 2000). For example, in the definition of the operation with fractional numbers: *Let a/b and c/d be any two fractions, with a, b, c and d ∈Z, and with b and d ≠ 0. If we want to add or subtract the fractions, we can follow the following rule:* $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ (Dogbey, 2015, p.3). This *realization* also emerges in the reflections of the teachers when they speak about their experience teaching the concept of *variable*. The teacher Adrián Velasco, for example, argued that when his students had more experience with the mathematical discourse, "*instead of describing in words the property associated with the sum in the real numbers, they condensed it symbolically as*: $\forall a, b \wedge c \in \mathbb{R}, (a+b)+c = a+(b+c)$."

This *realization* is also connected with the definition of the characteristics, axioms or properties of the concepts. To illustrate this, let us think of the graph of the quadratic function $g(x) = ax^2$, *of which we would say that its graphic re-presentation is a parabola with the vertex at the origin. The opening is up or down depending on the sign of a, and is more open or more closed than* $y = x^2$ *according to the value of a* (MEN, 2015, p. 25). In the example, the symbol a is specifically a *parameter* used to describe a property of the quadratic function. The opening argument by which one can replace the *variable* is called the *real parameter*, and when this occurs in a polynomial, the values that this *variable* takes are called *polynomial coefficients*.

The *realization placeholder is* also connected with the *algebraic identities*, understood as expressions that can be transformed, into simpler or more complex forms through the application of fixed rules, and whose results can be arrived at by simple inspection. The connection of the *placeholder* with the *algebraic identities* emerges from the discussion with the group of teachers. The teachers Marce and Nidia Castro suggest as an example: *To solve the square of a sum or a difference of any two real numbers of the form* $(a \pm b)^2$, *we should apply the distributive property* $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm ab \pm ab + b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

Although it is important that this *realization* be taught, starting in the early grades, it should be returned to in the third cycle of Basic Education so that the mathematical notions and concepts can be extended and consolidated. To this end, it is desirable that the teacher proposes situations to permit the identification and generalization of the properties of the arithmetical operations, establishing some formulas (*routines*) (MEC, 1998).

5.4. The variable as nomenclature of numbers or magnitudes

We understand this scenario as the discursive repertoire from which we *realize* the *variable* tied to activities of measurement, whose literal symbols permit the symbolic *re-presentation* of quantities or magnitudes. In this sense, we understand this scenario based on the *realizations* utilized to name metrical actions.

Analyzing the data sources, we find the description of the literal symbols utilized to indicate numbers, even though their nature and properties are known (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; MEC, 1998; MEN, 2015, 2016). From this analysis, we define the *realizations* of the *variable*. The first we have called ***irrational constant***, such as the number π (pi), whose geometrical *re-presentation* corresponds to the division between the perimeter of a circumference with its diameter. This ratio does not depend on the size of the circumference, due to the fact that any two circumferences are similar figures (MEC, 1998, p. 106). Another *irrational constant* is the number *e*, the base of the natural logarithms. We also encounter the golden number or golden mean, *re-presented* with the Greek letter ϕ (phi), famous for being the ratio used by the painter Leonardo da Vinici to present the bodily dimensions of his subjects. The curricular guidelines from Colombia (MEN, 2006) consider the writing of real numbers as an important aspect for the teaching of mathematics, especially based on the activities that use these *irrational constant* to solve problems. This *realization* is intimately connected with measurement, given that its emergence is marked by the attempt to find a quantity or magnitude and the impossibility of finding rational numbers to define them. Nevertheless, the curricular guidelines for mathematics from Brazil (MEC, 1998) state that the verification of the irrationality is only possible, naturally, in the discursive field of the mathematical routines. No empirical verification, as precise as it may be, will prove that a measure has an irrational value. *In the case of the number π, the mathematical proof of its irrationality is surely inadequate* for Basic Education (MEC, 1998, p. 107), however it is possible to suggest situations that permit us to understand these symbols, encountering diverse approaches.

Other numbers *re-presented* with literal symbols are those of an imaginary nature. Given this, another *realization* appears that we will call ***imaginary unity***, whose symbol is the letter "*i*". The teacher Adrián Velazco stated that he teaches his students to recognize the number *i* as a result of $\sqrt{-1}$, and in general, to refer to the paired roots of negative numbers. He speaks of the connection between the *imaginary unity* with the set of complex numbers, present in the diverse activities of measurement in areas such as engineering, for example, when this *realization* is used to measure oscillations in processes of interferenace of electrical currents.

When we speak of the *variable* in measurement contexts, we suggest another *realization* that we call ***magnitudes***, symbols used to denominate a magnitude or the quantity of a magnitude in a given problem. This *realization* is discussed in some articles that refer to it as a *label* (García, Segovia & Lupiáñez, 2014; Matos & Da Ponte, 2008; Escalante & Cuesta, 2012; Dogbey, 2015; Viseu & Nogueira, 2014; Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens, 2005). Nevertheless, this *realization* is not reduced to a label, but rather to ambiguous communicative forms in which actions are represented via symbols, and based on these symbolic structures new mathematical narratives and routines associated with these concepts are formed. Although the symbol is selected arbitrarily, the group of teachers spoke of tacit agreements to define its *re-presentation*. For example, they stated that they generally *reify* statements using the letter "*V*" to communicate the magnitude *volume*; the *velocity* is written with the letter "*v*"; the letter "*a*" generally indicates the *acceleration*; "*r*" is used to define the *radius* of a *circumference*; and the *variable* "*A*" is associated with the *area* of a geometrical figure.

Another *realization* of the *variable* we have called ***patterns and units of measure***. Diverse processes of measure are established, generally, based on the *patterns and units of measurement*, and the literal symbols used to name them. This activity is a communicative action that standardizes measurement and its notation. This *realization* makes reference to the letters used to label generally standardized units of measure. The group of teachers mentioned some examples: the standard-unit for longuitude is called a *meter* and is *re-presented* with the letter *m*; the standard-unit for time is a second *re-presented* with the letter *s*; the kilogram, symbolized by *kg* is the standard-unit for mass; the cubic meter is the standard-unit for volume, *re-presented* with m^3, etc. In the curricular guidelines for mathematics from Colombia the difference between the *unit* and *standard of measurement* is explained. The centimeter squared ($1cm^2$) is defined as a square with sides of one centimeter, nevertheless it can also be related to a disk with this same area, or with imagining a flat region subdivided into equilateral triangles whose area would be a centimeter squared. In the process of measureing one should have a unit of area, however, it does not necessarily have to be connected to a particular standard. Given this, it is important to measure, estimate and compare longuitudes utilizing both standardized and non-standardized units of measure (MEC, 2015). The teacher Ángela Jiménez tells how she intially introduces her student to metric actions based on the arbitrary establishment of a unit and a standard of measure, generally defined by the same students and similarly, nominated using arbitrary symbols. For example, they define p^2 as a unit of measure of surface whose standard is a square of the lines of its grid and whose unit of measure allows the calculation of the areas of figures determining how many times the unit fits into each one of them, as we see in the figure (Figure 7):

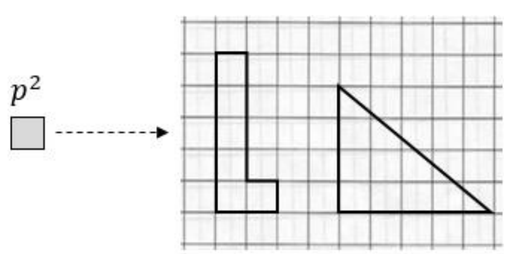


Figure 7. Example of the unit and standard of measurement. Author: Teacher Ángela Jiménez

With this activity, the teacher manages to teach the students that the action of measurement supposes the comparison between the unit of measurement with another magnitude of an equal nature. Therefore, she introduced the International System of Units – SI in her class, in which the units, standards and symbols are selected within an international consensus. Some of the units are named using the initials of important scientists, such as the unit of force, named the Newton and symbolized by the letter "*N*" in honour of the physicist and mathematician Isaac Newton; the unit of pressure named Pascal, symbolized by "*Pa*", named in honour of the mathematician and physicist Blaise Pascal.

From this contribution by the teacher Ángela Jiménez another *realization* of the *variable* emerges that we call ***statistical measures***, defined by the same teacher as literal symbols used to communicate the synthesis of a measure. The action of measurement can be affected by factors that create imprecision or there are mesures that are not reproducible because they generate different outcomes when repeated. It is due to this that the group of teachers, as well as the curricular guidelines for mathematics from Colombia (MEN, 2006, 2015, 2016), present the teaching of four types of *statistical measures* to synthesize these values: (1) the *measures of centralization*, to identify the central values or measures for distribution, by which one defines the measurement, *re-presented* by the accentuated letter $\bar{x}$; the median, *re-presented* by the accentuated letter $\tilde{x}$, and mode, symbolized by *Mo*; (2) the *meausures of position*, that measure the posisiton of the data within the range of values, and between them the quartiles, generally named by Q_1, Q_2 and Q_3, respecetively; the percentiles, *re-presented* by P_1, P_2, ...P_{99}; (3) the *measures of dispersion*, that measure how far apart the data is and what the range between them is, *re-presented* by *R*, the variance, *re-presented* by S_2, the sample standard deviation, defined as *S*, the population standard deviation, *re-presented* by the Greek letter σ; (4) the *meausures of form*, detailing the aspect that had the dispersion graph, as with the asymmetry, *re-presented* by *AS*, and kurtosis, indicated with the letter *a*.

The instruments discussed in this scenario are instruments of communication used to construct diverse mathematical narratives. Therefore, we have considered them as part of the configuration of the concept of *variable* to be *re-presentations* with which new discursive repertoires associated with the mathematical discourse are constructed. These communicative actions will be amplified in the following scenarios.

5.5. The variable as collection of elements

This scenario is constructed based on the *realizations* of the concept of *variable* associated with groupings of elements. The literal symbols correspond to an action of *reification* that directly influences the entirety of the mathematical discourse, creating new narratives associated with the groupings and their properties.

The first *realization* to discuss is the scenario we refer to as a ***set***, defined as the symbols used to indicate collections of elements, grouped based on a characteristic common to all of them. This *realization* emerged only in the discussions with the group of teachers. Particularly, the teacher Ana Mercedes presented an example: *In an international congress of Mathematical Education, a survey was applied with a group of 156 students to understand their preferences regarding language in the process of reading scientific articles. 52 students liked reading articles in Portuguese, 63 liked reading articles in Spanish and 87 liked to read articles in English. Additionally, some of them agreed in terms of liking to read articles in more than one language: 26 read articles in Portuguese and Spanish; 37 read articles in Spanish and English; 23 read articles in Portuguese and English, and finally, 7 students expressed their preference for three languages.* If we *reify* with the symbol *A* the set of students who like to read articles in Portuguese; with *B*, the set of students who like to read scientific articles in Spanish; and the group of students that read articles in English by *C*, we could organize the data in the following *Venn diagram* (Figure 8):

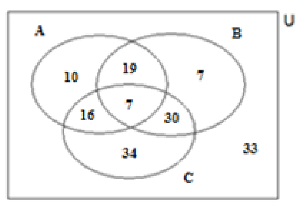
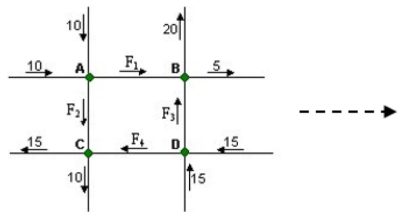


Figure 8. Example of the realization as set.

This *realization* allows the construction of a narrative rearding the relationships that can be established between the distinct groupings (union, intersection, complement, etc.). For example, the information of the statement can reify itself in the following way: $(B \cap C) = 37$; $A \cup B = 89$; $(A \cap B \cap C) = 7$, etc. Additionally, based on the *variable*, we can construct definitions, theorems or routines associated with the *sets*. According to the group of professors, in arithematic the numerical sets are defined with a special symbology, and based on this, the relationships between the numerical sets can be described. For example, the symbols $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ communicate Natural, Whole, Rational, Real and Complex numbers, respectively.

In this same scenario, we call ***matrix***, the other *realization* of the concept of *variable*, dicussed by the group of teachers and understood as a symbol that communicates interrelated data organized in bidimensional schemes (lines and columns). The teachers Lorenzo Zubieta and Ana Mercedes Máequez presented an example of this *realization*: *The matrix* (Figure 9) *re-presents the data corresponding to the flow of liters of water in a network of turbines.*



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \end{pmatrix}$$

Figure 9. Example of the realization as matrix.

The matrix arrangements generally help to schematize situations of constant flow, and this *realization* is a resource to create narratives associated with these organizations. In the example, the data corresponding to the quantity of liters that goes through the network of turbines was organized in rows indicating the crosses A, B, C and D, and in columns, corresponding to the pipelines F_1, F_2, F_3 and F_4. The *matrixes* are symbolized with upper case letters from the Roman alphabet, indicating in the subscript its size (the number of rows and the number of colums). For example, when we speak of the *matrix* C_{3x4} we are indicating with *C* the number of a matrix that contains three rows and four columns.

Another *realization* that emerged from the dicussions with the teachers, as well as in the revision of the curricular guidelines for Mathematics from Brazil and Colombia was the ***random event***, whose symbol is associated with the set of results from a random experiment. This *realization* was explained and presented by the teacher Ángela Jiménez , who taught the use of the letters E, S, Ω or U to *re-present* the *sample space*, and the set of results of a *random event* with upper case letter from the Roman alphabet ($A, B, C, ...$). For example, the symbol *"A"* could be used to communicate the *throw of two dice, red and blue, whose results would be 6* (MEN, 2015, p. 31): $A = \{(5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (1,5)\}$.

The *realization* of the concept of *variable* had particular forms in each scenario, showing a general panorama in terms of how this concept is communicated in distinct teaching experiences. In the following, we present the another scenario, where the *variable* assocaited with geometrical discourse is discussed.

5.6. The variable to name geometric figures

We understand this scenario based on the *realizations* of the concept of *variable* that deal with geometric figures, the symbolization of which allows the formulation of narratives regarding the properties of space and the objects, which occupy it.

In the discussion with the group of teachers, specifically in terms of the moblization of geometric concepts in the classroom, a space for reflection was created for the mathematical repertoire used to speak of geometry, whose symbolic writing allows the *re-presentation* of geometric constructions (*routines*), or formulation of axioms or theorems (*narratives*). This *realization* we call ***geometric entity***, referring to the symbolization of Points, lines, semi-lines, segments, planes, figures and geometric bodies, allowing the description of axioms and theorems. For example, *given an* ΔABC *isosceles with* $AB \cong AC$, AD *bisector of* A, AD *is a median of the* ΔABC (MEN, 2006, p. 73). This statement can also be *re-presented* in a graph (Figure 10):

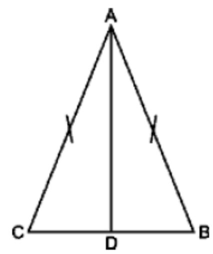


Figure 10. Example of the geometric entity.

When we speak of an ΔABC *isosceles*, we are speaking of any triangle, without worrying about the longuitude of its sides nor the measurement of its angles. The only relevant characteristic for this theorem to be true is that the triangle be effectively an *isosceles*. The teacher Rubén Darío Castañeda explained that in the case of analytic geometry, each literal symbol corresponds to points of the *Cartesian plane*, for example $A(x, y)$ or of the *polar plane* $A(r, \theta)$, with *r* the distance to the center and θ the angular measurement with respect to the reference axis. In the case of Euclidean Geometry, the *lines* are indicated with lower or upper case Roman letters, for example, the line $\overleftrightarrow{AB}$ or the line *m.* The *semiline* and the *segment* are indicated with upper case Roman letters, for example the semiline $\overrightarrow{AB}$ or the segment $\overline{AB}$. Additionally, the planes are usually indicated with letters from the Greek alphabet: Alpha (α), Beta (β), Theta (θ) or Fi (φ), amongst others.

The teacher José Israel Hernández also tied the *geometric entity* to the vectors. In this case, the literal symbol communicates physical forces or events that influence matter, used for example, to analyze movement, velocity, etc. Vectors are indicated using letters acentuated with arrows, for example the vector $\vec{a}$, or in some situations make reference to the origin and to the extreme of the orientated segment that *re-presents* it geometrically, for example $\overrightarrow{AB}$. The teacher Israel also made use in his classes of this *realization* in the form of a *versor*, also called module or intensity vectors 1. Versors are usually indicated with lower case letters with a circumflex accent, instead of an arrow. A unitary vector can be assigned to each one of the axes of coordinates that are respectively: $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ and $\hat{k}$, whose cooredinates are $\hat{\imath}\,(1,0,0)$; $\hat{\jmath}\,(0,1,0)$; $\hat{k}\,(0,0,1)$. The communicative reach of this *realization* is ample, since it is tied to the mathematical discourse related to space, its metric and its forces.

Finally, we present the last scenario which fits together as another important piece in the configuration of this *theoretical model*.

5.7. The variable to name the logical proposition

We define this scenario based on the *realization* of the concept of *variable* belonging to the discursive repertoire of logic, specifically in terms of aspects studied in the mathematics of Basic Education.

The area of logic dedicated to the study of inference via the construction of a specific symbolic structure, it refers to the allocation of literal symbols to a statement to which one can assign a certain truth value (recognize it as true or false). Therefore, we present this *realization* of the concept of *variable*, which is called a ***proposition***, presented by the group of professors as a literal symbol that *re-presents* propositions with which to define logical relations. The teacher María Isabel González presents some examples to illustrate this proposition:

- p: 6 is a number ℕ
- q: 10 is a Prime number
- $r: 4 + 2 = 6$.

The *proposition realization* is *re-presented* with lower case letters from the Roman alphabet. The letters p, q, r, s and t, are used with greater frequency, and with these we can formulate operations such as negation (¬), conjunction (∧), disjunction (∨), implication (→) and double implication (↔). For example, given the prior propositions, when we write $\sim q\ \wedge \sim p$ (we read "*not q and not p*") to refer to the composed expression: "*10 is not a prime number and 6 is not a* ℕ *number*".

Therefore, via the description and discussion of the *realizations* of the concept of *variable* in the seven scenarios we can produce our *theoretical model*, as well as the relations that the variable sustains with other concepts. We present this *model* in a synthetic way in the following section.

6. SYNTHESIS OF A THEORETICAL MODEL OF MATHEMATICS FOR TEACHING THE CONCEPT OF VARIABLE

The *theoretical model* organizes the *realizations* of the conept of *variable* based on the seven scenarios discussed in the previous section. Each *realization* was identified in at least one of the sources analyzed, be it in the (1) scientific articles selected for this study, (2) the curricular guidelines for mathematics from Brazil and Colombia, or (3) based on the discussions with the group of professors. In this analysis, 17 *realizations* were encountered that grouped into scenarios based on discursive similarities, defined by the narratives or routines associated with each one of them. Each *realization* can be mobilized in the classroom in a *reified* form, in other words, as arbitrary symbols associated with a sparticular quotidian situation (solution of problems), or, similarly, can be mobilized in an *alienated* form, that deals with symbols exclusively used in impersonal symbolic ways, without any connection to particular situations. This *theoretical model*, discussed in the previous section, we could summarize in the following diagram (Figure 11):

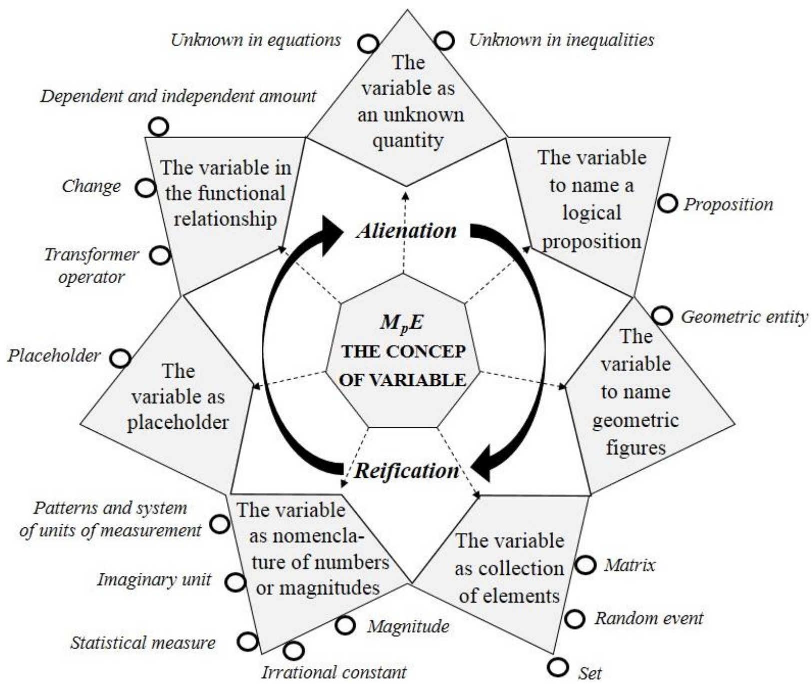


Figure 11. Synthesis of the theoretical model of the M_fT of the concept of variable. Source: Authors.

In the diagram, we arrange the *scenarios* in seven gray quadrilaterals that give form to *our theoretical model of the* $\boldsymbol{M_fT}$ *of the concept of variable*. Although in this *re-presentation* of the model, the dimensions of the *scenarios* are equal, each one had its particularities and demarcated specific aspects of mathematics, with its own associated narratives and routines. Some *realizations* connected with more concepts than others, as is the case with *the variable in the functional relation*, amply discussed in the sources analyzed, different to the scenario of the *variable in the logical proposition*, which was little developed in school. The scenarios are arranged in Figure XI without indicating any hierarchical position between them, because all are categories of the concept of *variable* and all discuss specific aspects of mathematics. At the center of the model appears the production of $\boldsymbol{M_f T}$ *of the concept of variable* in a grey heptagon, linked via discontinuous arrows to the scenarios, letting it be understood that it is in the distinct experiences of teaching that the *realizations* of the variable are configured. In the case of this model, the $\boldsymbol{M_f T}$ is configured as a source of data for the analysis. Additionally, we see that around the scenarios circulate those of the discursive movements of *alienation* and *reification*, indicating that the *realizations* can appear in the solution of the problem or as symbolical structures, respectively. This same information is presented with greater detail in the following chart (Table VI), demarcating the *realizations*, the *scenarios* and the *entailments* associated with the concept of *variable* that were discussed in the previous section:

Scenario	**Realization**	**Definition**	**Entailment**
In the scenario…	***The variable is communicated as a…***	***That which allows the communication and construction of narratives and routines associated with...***	***Connected with the conepts used in…***
… The variable as an unknown quantity	... unknown in equations	… an unkown quantity in an equation	... the equations and systems of equations
	… unknown in inequalities	… an interval of numbers that satisfies an inequality (domain solution).	... the inequations and systems of inequations.
… The variable in the functional relationship	... Dependent and independent amount	… values that are in a relation of dependency in a function.	... the functions: graph of a function, domain and range, properties of functions, continuity and discontinuity, periodic functions, symmetries, etc.
	... Transformer operator	... the chain of arithmetic operations applied with the *independent quantity* to produce a result, called a *dependent quantity*.	
	... Change	... the difference between numbers.	... the study of average rate of variation, infinitesimal approximations (limits), rate of instantaneous variation (derivatives), continuity, etc.
… The variable as parameterizer of routines	... Placeholder	… an expression whose value is fixed at will, used basically to define properties or numerical operations.	... the development of narratives and mathematical routines. As well as in the simplification of notable products or in the factorization of expressions.
… The variable as nomenclature of numbers or magnitudes	… Irrational constant	… irrational constants, frequently used in mathematical problems.	... the study of numerical systems (irrational and real), and in activities assoicated with the measurement of geomentric figures.

	... Imaginary unit	… root pairs of negative numbers.	... the system of complex numbers
	… Magitude	… properties that can be measured, such as size, weight or extension of geometric figures, etc.	... in activities related to measurement: finding measurements in specific problems, in the use and calibration of measuring instruments, international system of units and measurement standards, etc.
	… Patterns and system of units of measurement	… a unit of standardized measure.	
	… Statistical measure	… the sysnthesis of a characteristic of a data set.	... descriptive and inferential statistics.
… The variable as collection of elements	… Set	… a data set grouped by having a common characteristic.	... the theory of sets: properties and relations between sets.
	… Matrix	… a two-dimensional array of numbers (called matrix entries) ordered in rows and columns.	… in the solution of systems of linear equations or in the *re-presentation* of linear transformations.
	… Random event	… the set of possible results of a random experiment.	… probability theory.
… The variable to name geometric figures	… Geometric entity	... geometric figures or bodies: spaces, planes, angles, points, segments, lines (or semilines), polygons, geometric bodies or vectors.	... geometric constructions, as well as in the definition of axioms and theorems in the different branches of geometry: analytical, Euclidean, projeative, trigonometry, vectorial, etc
… The variable to name a logical proposition	… Proposition	… meanings of declarative or enunciative sentences.	… the study of propositional logic.

Table 6. Synthesis of the theoretical model. Source: Authors

As we presented in the methodological design for this research, the construction of the *theoretical model* was inspired by the investigative tool called *concept study* proposed by Davis & Renert (2014), based specifically on three emphases propsed by these authors: *realizations*, *scenarios* and *entailments*. We defined the *scnearios* as discursive forms, whose repertoire requires the *realizations* of the *variable* to communicate specific aspects of mathematics; and thinking the mathematical concepts related to each other, we focus our attention on the *entailments* of the *variable* with other aspects used in Basic Education.

The theoretical character has been inspired by the theory of Sfard (2008), specifically for the understanding of mathematics as a discursive activity that is structured based on the network of concepts that are *realized* in multiple ways. Additionally, to develop the *theoretical model* of the concept of *variable*, we theorize and define the *Mathematics for Teaching*, recognizing the importance of the work of Shulman (1986, 1987) and Deborah Ball (Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, Tahmes & Phelps, 2008) as precursors to this field of investigation.

7. FINAL CONSIDERATIONS

This *model* is configured as a theoretical tool to analyze the *realizations* of the *variable* that circulate in different activities associated with the teaching of mathematics. We only selected three sources of data for this analysis. However, we consider that this *theoretical model* could be extended in the future, its being possible to discuss other *realizations* and/or *scenarios*. For example, we could extend the discussion regarding this model describing the *realizations* of the *variable* communicated in textbooks, in national and international standardized testing, in university courses for teacher training, in courses for professional improvement, or in any production of *teaching of mathematics*. Therefore, we know that the construction of this *theorectical model* is not exhausted by the analyses that we presented. We can extend the list of *realizations*, *scenarios* and *entailments* of the concept of *variable*. Additionally, this strategy of modelling could serve as a basis to discuss the *realizations* of other concepts studied in Basic Education.

As we argued at the beginning of this article, the concept of *variable* is defined according to diverse epistemological postures. Some researchers, for example, describe the *realizations* of the *variable* exclusively in *scenarios* of variation, analyzing changes or alterations between quantities (Suárez, Alex & Gómez, 2014; Küchemann, 1978). Nevertheless, other researchers conceived their *realizations* in distinct mathematical *scnearios*, as we did in this *theoretical model* (Dogbey, 2015; Escalante & Cuesta, 2012; Jupri, Drijvers & Heuvel-Panhuizen, 2014). This difference in the conception of the *variable* in the school activities, presents us with the need to continue discussing and investigating the *realizations* of this concept, extending the discussion regarding why some authors consider some *realizations* of the *variable* and why others do not, with all being *reified* symbolizations of those that communicate discursive actions. Therefore, we hope that the *realizations* and *scenarios* that we presented in this *theoretical model* serve as a scientific basis to undertake these discussions, and continue to develop this proposal for modelling of the *Mathematics for Teaching* as a resources to organize the production of this mathematical discourse focused on the teaching of this concept.

Similarly, this *structure of analysis* that we presented for the development of this *model*, focused on the organization of the *Mathematics for Teaching* based on the *realizations*, *scenarios* and *entailments*, is also a contribution to the sceitific community. The discussion of this structure can lead to better methodological designs for this *model* and serve as a basis to systematically describe the *realizations* of other concepts emerging in different *Mathematics for Teaching*.

Although this article is mainly intended for the scientific community, it can also influence other activities such as teaching, principlally in the training of teachers or in post-graduate trainging activities, discussing the *realizations* of the *variable* with teachers and future teachers. It makes these *realizations* explicit and allows a reflection on the importance of this concept for the teaching of mathematics, creating other connections with other concepts, not only with those that we presented in this text. On the other hand, this theoretical model can also provide tools for teachers to recognize the multiplicity of communicative possibilities within the concept of *variable*, giving it greater importance in the teaching of mathematics.

REFERENCES

Baena, G. P. (2014). *Metodología de la Investigación. Serie integral por competencias.* Mexico: Grupo Editorial Patria.

Ball, D. L., Hill, H. H., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-46.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. (2015). Base Nacional Comum Curricular (versão em discussão). Brasília.

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. (2012). PCN+: Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Brasília.

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. (1997). Parâmetros curriculares nacionais: matemática (Primeira à Quarta Série). Secretaria de Educação Fundamental - SEF. Brasília: 142p.

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. (1998). Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental - SEF. Brasilia, 148 p.

MEC - Ministério de Educação e Cultura do Brasil. (2000). Parâmetros curriculares nacionais: Matemática (Ensino Médio). Secretaria de Educação Fundamental - SEF. Brasilia, 148 p.

MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá.

MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). Estándares curriculares de matemáticas. Bogotá.

MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2015). Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) para lenguaje y matemáticas versión 1. Bogotá.

MEN – Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA): Matemáticas version 2. Bogotá.

Coutinho, J. L., & Barbosa, J. (2016). Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(2), 783-808.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, (61), 293-319.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM), 14*(2), 86-91.

Davis, B. (2012). Subtlety and Complexity of Mathematics Tecaher's Disciplinary Knowledge. *12th ICME - International Congress on Mathematical Education (Memorias del evento)*, 214-234.

Davis, B., & Renert, M. (2009). Mathematics for teaching as shared, dynamic participation. *For the Learning of Mathematics, 29*(3), 37-43.

Davis, B., & Renert, M. (2012). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, (82), 245-265.

Davis, B., & Renert, M. (2014). The Math Teachers Know: Profound Understanding of Emergent Mathematics. *Editorial Routledge*, New York: pp. 141.

Dogbey, J. (2015). Using *Variables* in School Mathematics: Do School Mathematics Curricula Provide Support for Teachers? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(6), 1175-1196.

Ely, R., & Adams, A. E. (2012). Unknown, placeholder, or *variable*: what is x? *Mathematics Education Research Journal*, 24(1), 19-38.

Escalante, J. E., & Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de *variable*: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24(1), 107-132.

García, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2014). El Uso de las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1545-1566.

Graham, A. T. & Thomas, M. O.J. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 265-282.

Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de *variable* en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, 76, 83-103.

Jupri, A., Drijvers, P., & Heuvel-Panhuizen, M. D. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 683-710.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: equivalence & variable. *ZDM Mathematics Education*, 37(1), 68–76.

Küchemann, D. E. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.

Lucariello, J., Tine, M. T., & Ganleyd, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic *variable* misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 33, 30-41.

Bianchini, B. L., & Machado, S. D. (2010). A dialética entre pensamento e simbolismo algébricos. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(2), 354-368.

Kripka, R. M., Scheller, M, & Bonotto, D. L. (2015). La investigación documental sobre la investigación cualitativa: conceptos y caracterización. *Revista de Investigaciones UNAD*, 14(2), 55-73.

Malisani, E. & Spagnolo, F. (2008). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, 71(1), 19-41, DOI 10.1007/s10649-008-9157-x.

Matos, A. & Da Ponte, J. P. (2008). O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 195-231.

Menduni-Bortoloti, R. A. (2016). Um estudo sobre a Matemática para o Ensino de Proporcionalidade. Tese de Doutorado em Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador.

Nie, B., Cai, J., & Moyer, J. C. (2009). How a standards-based mathematics curriculum differs from a traditional curriculum: with a focus on intended treatments of the ideas of *variable*. *ZDM Mathematics Education*, 41(6), 777-792, DOI 10.1007/s11858-009-0197-1.

Ochoviet, C., & Oktaç, A. (2011). Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado: Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria. *Educación Matemática*, 23(3), 91-121.

Groenwald, C. L, & Becher, E. L. (2010). Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do ensino médio. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(2), 242-270.

Quino, W. V. (1960). Variables explained away. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 104(3), 343-347.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26(2), 257-277, DOI 10.1007/s13394-013-0087-2.

Santos, G. L., & Barbosa, J. (2016). Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de um estudo com professores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (48), 143-167.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of the *variable*. *Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse: Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, 51, 1-9.

Sfard, A. (2006). Participacionist discourse on mathematics learning. En J. Maasz & W. Schloglmann *(*Ed.*), New Mathematics Education Research and Pratice* (pp. 153-170). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge*, Cambridge University Press, Series editor EMERITUS

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Suárez, J. G., Alex, I. S., & Gómez, J. L. L. (2014). El Uso de Las Letras como Fuente de Errores de Estudiantes Universitarios en la Resolución de Tareas Algebraicas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 28(50), 1545-1566.

Trigueros, M., & Ursini, S. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. In: Barbara Moses (Ed). *Algebraic Thinking, Grades K–12: Readings from NCTM's School-Based Journals and Other Publications*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics, 7–13.

Viseu, F. A., & Nogueira, D. (2014). Desenvolvimento do pensamento algébrico de uma aluna do 10.º ano. *REVEMAT: Revista Electrónica De Educação Matemática*, 9(2), 23-56.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2015). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, 28(2), 223-243.

ANEXOS

ANEXO 1

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Título del curso:

El concepto de variable y sus realizaciones en la enseñanza

Estimado (a) Alumno (a):

Mediante la presente, usted es invitado a participar en un estudio sobre el concepto de variable y sus diferentes usos en la enseñanza escolar. Este estudio tiene como propósito construir un modelo teórico acerca de la enseñanza de la variable, cuyo investigador principal es el Mg. Olmar Gómez, estudiante de tercer año del Doctorado en Enseñanza, Filosofía e Historia de las Ciencias de la Universidad Federal de Bahía en Brasil, y dirigido por el Dr. Jonei Cerqueira Barbosa, profesor vinculado a dicha universidad.

Con base en la información obtenida, se desea generar conocimiento a respecto de la actividad desarrollada en el salón de clase, a fin de reconocer los diferentes usos del concepto de variable comunicados por los profesores. En este contexto, deseo solicitarle su participación en el proyecto, lo que se materializaría realizando lo siguiente:

- participar en los encuentros presenciales y ser activo en las discusiones,
- desarrollar todas las actividades propuestas en los encuentros,
- posibilitar la grabación en audio y video de las clases, y la toma de fotografías de las actividades que se desarrollen.

Para su conocimiento, se puntualiza que su participación es voluntaria y anónima si así lo desea.

1. Riesgos y beneficios

Para los participantes, este estudio no presenta ningún riesgo en términos de su integridad como alumno. Se trata de una actividad complementaria y voluntaria; y no de una evaluación. No es posible prometer beneficios inmediatos. Sin embargo, los resultados de esta investigación podrían, eventualmente, ayudar a mejorar la experiencia de enseñanza de los involucrados.

2. Almacenamiento de los datos para la confidencialidad del proyecto

Como informé anteriormente, cada una de las sesiones será audio y video grabada, y se tomará registro fotográfico, con esta previa autorización de los participantes en la investigación, y transcrita posteriormente. Esta investigación preservará la confidencialidad de su identidad y usará los datos con propósitos profesionales, manteniéndola en archivos seguros. Sólo los investigadores tendrán acceso a esta información y cualquier reporte que se genere presentará los datos de manera agregada. En ningún caso se identificará individualmente, si así es la voluntad del participante.

Para tal fin y en el caso que desee participar de esta investigación, solicitamos que nos comunique a continuación el nombre con el cual desea aparecer en el informe final de esta investigación, el cual puede ser un seudónimo elegido por usted o el nombre real:

____

3. Cómo se usarán los resultados

Los resultados del estudio serán usados para generar nuevo conocimiento en el área de la enseñanza del concepto de variable y serán empleados en tesis, para presentación en conferencias y para publicación de resultados en revistas científicas, así como para actividades propias de la docencia. En cada una de estas instancias se velará por mantener la estricta confidencialidad y privacidad de los participantes, presentándolos tal con el nombre que eligió en la sesión anterior.

4. Derechos de los participantes

- Se lee y se discute la descripción de la investigación con el investigador. Teniendo la oportunidad de hacer preguntas acerca del propósito y procedimientos en relación con el estudio.
- La participación en esta investigación es voluntaria. Pudiendo negarse a participar o renunciar a participar en cualquier momento sin perjuicio alguno para futuro estatus como estudiante.
- El investigador puede eliminar de la investigación los datos relacionados a un estudiante bajo su discreción profesional.
- Si durante el transcurso del estudio llega a estar disponible nueva información significativa que haya sido desarrollada y se relaciona con la voluntad de continuar participando, el investigador deberá entregar esa información al participante.
- Cualquier información derivada del proyecto de investigación que identifique personalmente algún estudiante no será voluntariamente publicada o revelada sin el consentimiento particular.

- Si en algún momento se tienen preguntas relacionadas con la investigación o con la participación del curso, puede contactarse con el investigador Olmar Gómez, quien responderá las preguntas. El teléfono del investigador es 3016261826, y su correo electrónico es olmararley@gmail.com
- Puede recibir copia del presente consentimiento informado si así lo desea.
- La firma significa que está de acuerdo en participar del curso después de haber leído y discutido la información presente en esta hoja de consentimiento. Además, permite que las clases sean grabadas en audio y en video, así como dejar registro fotográfico de las actividades.

Nombre del participante:	
Firma:	
Fecha:	
Lugar:	