



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA INDUSTRIAL - PEI

Edilson Machado de Assis

O Modelo q -Weibull em Confiabilidade, Árvores de Falha Dinâmicas e
Implementação de Manutenção

TESE DE DOUTORADO

Salvador
19 de julho de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA

Edilson Machado de Assis

O Modelo q -Weibull em Confiabilidade, Árvores de Falha Dinâmicas e
Implementação de Manutenção

Trabalho apresentado ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Industrial - PEI da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Industrial.

Orientadores:

Prof. Dr. Ernesto Pinheiro Borges

Prof. Dr. Silvio Alexandre Beisl Vieira de Melo

Prof. Dr. Leizer Schnitman

Salvador
19 de julho de 2013

A848 Assis, Edilson Machado de

O modelo q -Weibull em confiabilidade, árvores de falha dinâmicas e implementação de manutenção / Edilson Machado de Assis. – Salvador, 2013.

193 f. : il.

Orientador: Prof. Ernesto Pinheiro Borges

Co-orientador: Prof. Silvio Alexandre Beisl Vieira de Melo, Prof. Leizer Schnitman

Tese (doutorado) – Universidade Federal da Bahia. Escola Politécnica, 2013.

1. Engenharia industrial. 2. Confiabilidade (Engenharia).
I. Borges, Ernesto Pinheiro. II. Universidade Federal da Bahia.
III. Título.

CDD : 670.42

O Modelo q -Weibull em Confiabilidade, Árvores de Falha Dinâmicas e Implementação
de Manutenção

Edilson Machado de Assis

Tese submetida ao corpo docente do programa de pós-graduação em Engenharia Industrial da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de doutor em Engenharia Industrial.

Examinada por:

Prof. Dr. Ernesto Pinheiro Borges

Prof. Dr. Silvio Alexandre Beisl Vieira de Melo

Prof. Dr. Leizer Schnitman

Prof. Dr. Enrique Andrés López Droguett

Prof. Dr. Giovana Oliveira Silva

Prof. Dr. Herman Augusto Lepikson

Dr. Manuel de Almeida Barreto Filho

Dr. Valdir Estevam

Salvador, BA
19 de julho de 2013

*“Se não puder voar, corra.
Se não puder correr, ande.
Se não puder andar, rasteje,
mas continue em frente
de qualquer jeito.”*

(Martin Luther King)

*“De
todas
as coisas
humanas, a única que
tem o fim em si mesma é a arte.”*

(Machado de Assis)

*“Não se preocupe muito
com as suas dificuldades em
Matemática, posso assegurar-lhe que
as minhas são ainda maiores.”*

(Albert Einstein)

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho, especialmente:

- a) a minha família pelo apoio ininterrupto;
- b) aos meus amigos pela compreensão de minhas ausências;
- c) aos companheiros de empresa pela paciência;
- d) aos companheiros de trabalho da universidade pela ajuda;
- e) aos orientadores pelas sugestões, colaborações e diligência;
- f) aos estudantes de iniciação científica, que participaram no início da pesquisa;
- g) a todos os meus professores do ensino fundamental, médio, graduação, mestrado e doutorado;
- h) a todos os desenvolvedores do sistema operacional Linux;
- i) a todos os desenvolvedores e colaboradores do \LaTeX ;
- j) a todos os demais que embora importantes, não tenham sido listados anteriormente.

Resumo

A distribuição q -Weibull foi aplicada em análise de confiabilidade. Trata-se de uma generalização com quatro parâmetros de uma distribuição amplamente utilizada em confiabilidade, a distribuição Weibull, que possui três parâmetros. A distribuição Weibull é baseada na função exponencial do negativo de uma potência. A distribuição q -Weibull utiliza uma generalização da função exponencial, chamada q -exponencial, que apresenta o comportamento assintótico a uma lei de potência e recupera, também como caso particular, uma exponencial. Desta forma, em comparação com a distribuição Weibull, foi acrescentado mais um parâmetro às expressões da função densidade de probabilidade, da função de falha acumulada e da taxa de falha. Foram identificados cinco padrões distintos para a taxa de falha da distribuição q -Weibull, determinados por faixas bem definidas dos parâmetros do modelo. Isto representa uma melhoria em relação ao modelo Weibull, capaz de representar três padrões de comportamento para a taxa de falha. Particularmente a taxa de falha q -Weibull é capaz de representar, além dos formatos decrescente, constante e crescente, dois outros formatos, o unimodal e a curva da banheira, que não são possíveis para a distribuição Weibull, com parâmetros fixos. Foram deduzidas expressões para os momentos em torno do zero e da média, também para moda e mediana, além de outras propriedades características. O método de ajuste foi validado por meio de três exemplos de casos reais: componentes de poços de petróleo, estação de solda robotizada, e em mercado de ações. Os exemplos da estação de solda e do mercado de ações também foram utilizados para comparação da eficiência de quatro modelos, q -Weibull, Weibull, q -exponencial, e exponencial. Foram deduzidas expressões para a função de falha acumulada e para taxa de falha de todas as portas de árvores de falha dinâmica, com base na distribuição q -Weibull. Todas as expressões de falha acumulada foram validadas por meio do método de Monte Carlo. Foram deduzidas expressões de confiabilidade e taxa de falha de um componente submetido a manutenções preventivas em intervalos regulares de tempo sob condições de reparo perfeito e imperfeito no contexto da distribuição q -Weibull. As expressões para o cálculo do intervalo ótimo de manutenção preventiva foram apresentadas considerando três critérios diferentes: o custo mínimo por ciclo de manutenção, o valor máximo permitido para a taxa de falha, e o valor mínimo permitido para a confiabilidade. Para estes dois últimos critérios, as expressões deduzidas para um componente foram estendidas para uma associação em porta de árvore de falha dinâmica e foram apresentados dois exemplos.

Abstract

The q -Weibull distribution was applied to reliability analysis. It is a generalization of a four-parameter distribution widely used in reliability, the Weibull distribution, which has three parameters. The Weibull distribution is based on the exponential of the negative of a power law. The q -Weibull distribution uses a generalization of the exponential function, called q -exponential. This function displays the asymptotic behavior of a power law, and also recovers the exponential function, as a particular case. Thus, when compared with the Weibull distribution, it has been added into the expressions an additional parameter q . It has been identified five distinct patterns for the failure rate distribution of q -Weibull model, determined by well defined ranges of the parameters. This represents an improvement over the Weibull model, that is able to represent three patterns of behavior for the failure rate. Particularly, q -Weibull failure rate is able to represent, in addition to the decreasing, steadily, and increasing formats, two additional cases, the unimodal and the bathtub curve, which are not possible for the Weibull distribution with fixed parameters. It has been deduced expressions for the moments around zero and around the average, and also the median, the mode, besides other characteristic properties. The fitting method was validated by using three real examples: components of oil wells, robotic welding station, and an instance of the stock market. The examples of welding station and the stock market were also used to compare the efficiency of four models, q -Weibull, Weibull, q -exponential, and exponential. Based on the q -Weibull distribution, there were deduced expressions for the unreliability and failure rate functions of all ports of dynamic fault trees. All expressions of unreliability were validated by means of the Monte Carlo method. Expressions for the reliability and the failure rate of a component subjected to preventive maintenance at regular intervals of time under conditions of perfect and imperfect repair were deduced in the context of the q -Weibull distribution. The expressions for the determination of the optimal preventive maintenance interval were presented, considering three different criteria: the minimum cost per maintenance cycle, the maximum allowed value for the failure rate, and the minimum allowable reliability. For the latter two criteria, the expressions deduced for a component have been extended to a port of dynamic fault tree, and two examples were presented.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Justificativa	2
1.2	Objetivo geral	4
1.3	Objetivos específicos	4
2	Fundamentos de confiabilidade	7
2.1	Introdução	7
2.2	Integração de componentes e sistemas	10
2.3	Distribuição de Weibull aplicada à confiabilidade	18
2.4	Entropia de Tsallis	22
3	Análise da função taxa de falha pelo modelo q-Weibull	25
3.1	Introdução	25
3.2	Taxa de falha da distribuição q -Weibull	28
3.3	Comportamento da função densidade de probabilidade q -Weibull	32
3.3.1	Momentos da distribuição q -Weibull	33
3.3.2	Influência do parâmetro η	35
3.3.3	Análise de t_{max}	36
3.3.4	Influência do parâmetro β	37
3.3.5	Influência do parâmetro q	39
3.3.6	Equações adimensionais	41
3.4	Conclusões	43
4	Análise comparativa das distribuições generalizadas q-Weibull e q-exponencial aplicadas à engenharia de confiabilidade	45
4.1	Introdução	45
4.2	Distribuições de tempos de vida	46
4.2.1	Distribuições q -Weibull e q -exponencial	46
4.2.2	Taxa de falha das distribuições	47
4.2.3	Estimação de parâmetros	47
4.3	Aplicação em equipamentos de poços de petróleo	50
4.4	Aplicação em estação de solda robotizada	54
4.5	Conclusões	58

5	<i>q</i>-Weibull aplicada a Árvore de Falha Dinâmica	61
5.1	Introdução	61
5.1.1	Modelagem <i>q</i> -Weibull	62
5.2	Portas das Árvores de Falha Dinâmicas	63
5.2.1	AND	67
5.2.2	OR	73
5.2.3	KofN	78
5.2.4	PDep – Dependência probabilística (<i>Probabilistic dependency</i>)	83
5.2.5	PAND – AND com Prioridade (<i>Priority AND</i>)	89
5.2.6	SEQ – Sequência forçada (<i>Sequence Enforcing</i>)	96
5.2.7	WSP – Sobressalente (<i>Warm spare</i>)	101
5.3	Conclusões	114
6	Manutenções corretiva e preventiva baseadas no modelo <i>q</i>-Weibull	117
6.1	Introdução	117
6.2	Confiabilidade e manutenção com o modelo <i>q</i> -Weibull	118
6.2.1	Manutenção com reparo perfeito	119
6.2.2	Manutenção com reparo imperfeito	121
6.2.3	Intervalo ótimo de manutenção preventiva baseada em custo	122
6.3	Exemplos	123
6.3.1	Cenário 1 - Unimodal - Reparo perfeito	124
6.3.2	Cenário 2 - Unimodal - Reparo imperfeito	127
6.3.3	Cenário 3 - Taxa de falha crescente - Reparo perfeito	130
6.3.4	Cenário 4 - Crescente - Reparo imperfeito	133
6.3.5	Cenários 5a e 5b	135
6.4	Conclusões	138
7	Considerações finais	141
7.1	Conclusões	141
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	145
	Referências	147
	Apêndice A – Deduções das principais expressões	157
A.1	Funções de confiabilidade e derivadas	157
A.1.1	Função densidade de probabilidade Weibull	157
A.1.2	Função densidade de probabilidade <i>q</i> -Weibull	157
A.1.3	Função <i>q</i> -exponencial	157
A.1.4	Função confiabilidade	157
A.1.5	Função de falha acumulada	158

A.1.6	Função taxa de falha	158
A.1.7	Derivada temporal da taxa de falha	159
A.1.8	Segunda derivada temporal da taxa de falha	162
A.2	Tempo máximo da distribuição q -Weibull	166
A.3	Momentos da distribuição q -Weibull para $t_0 \neq 0$	167
A.3.1	Momento de ordem n para $q > 1$	167
A.3.2	Momento de ordem n para $q < 1$	170
A.3.3	Momentos em torno da média	173
A.4	Momentos da distribuição q -Weibull para $t_0 = 0$	174
A.4.1	Momento de ordem n para $q > 1$	174
A.4.2	Momento de ordem n para $q < 1$	176
A.5	η_q	178
A.6	Média ou MTBF	179
A.7	Mediana	179
A.8	Moda	180
A.9	Árvore de Falha Dinâmica	183
A.9.1	Derivada temporal da função de falha acumulada da porta WSP . .	183
A.10	Tempo esperado por ciclo de manutenção	185
A.10.1	Solução de $\int_{t_0}^T t f_q(t) dt$	185
A.10.2	Solução de $\int_{t_0}^T R_q(t) dt$	187

Apêndice B – Exemplo de aplicação da distribuição q -Weibull **191**

B.1	O modelo q -Weibull em mercado de ações	191
-----	---	-----

Lista de Figuras

2.2.1	Árvore de dependabilidade.	11
3.2.1	Quatro diferentes tipos de comportamento da função taxa de falha. . .	30
3.2.2	Derivadas temporais da taxa de falha da distribuição q -Weibull.	32
3.3.1	Falha acumulada para diferentes valores de q	35
3.3.2	Tempo máximo de vida em função de β para diferentes valores de $q < 1$.	36
3.3.3	Efeito de β em $h_q(t)$	37
3.3.4	Taxa de falha da q -Weibull dada pela Equação 3.2.9, com $q = 0,9$. . .	38
3.3.5	Taxa de falha da q -Weibull dada pela Equação 3.2.9, com $q = 1,5$, $\eta = 1$ e $t_0 = 0$	38
3.3.6	Taxa de falha q -Weibull em função do tempo para diferentes valores de $q < 1$ em escala log-log.	39
3.3.7	Taxa de falha q -Weibull em função do tempo para diferentes valores de $q < 1$	40
3.3.8	Taxa de falha da q -Weibull para o caso unimodal e diferentes valores de $q > 1$	40
3.3.9	Taxa de falha da q -Weibull para o caso decrescente e diferentes valores de $q > 1$	41
3.3.10	Taxa de falha unimodal adimensional.	42
3.3.11	Taxa de falha adimensional com formato de banheira.	43
4.3.1	Funções confiabilidade e taxa de falha para bombas de fundo.	51
4.3.2	Funções confiabilidade e taxa de falha para hastes de bombeio.	52
4.3.3	Funções confiabilidade e taxa de falha para tubulação de produção. . .	53
4.4.1	Gráficos de ajuste dos tempos de vida da estação de solda para os quatro modelos.	54
4.4.2	Curvas $R_q(t)$ da estação de solda para os quatro modelos.	56
4.4.3	Gráficos de ajuste dos tempos de vida da estação de solda separados em 3 intervalos.	57
4.4.4	Curvas $h_q(t)$ da estação de solda para os quatro modelos.	58
5.2.1	$F_{q,C_3}(t)$ com linha contínua $F_{q,C_{14}}(t)$ com linha tracejada.	66
5.2.2	$h_{q,C_3}(t)$ com linha contínua $h_{q,C_{14}}(t)$ com linha tracejada.	66
5.2.3	Representação simbólica da porta AND	68
5.2.4	Não confiabilidade para a porta AND e suas entradas.	70

5.2.5	Funções taxa de falha para uma porta AND e suas duas entradas. Casos a) até f).	71
5.2.6	Funções taxa de falha para uma porta AND e suas duas entradas. Casos g) até j).	72
5.2.7	Representação simbólica da porta OR.	74
5.2.8	Funções não confiabilidade de uma porta OR e suas entradas.	75
5.2.9	Funções taxa de falha para uma porta OR e suas duas entradas. Casos a) até f).	76
5.2.10	Funções taxa de falha para uma porta OR e suas duas entradas. Casos g) até j).	77
5.2.11	Representação simbólica da porta KofN.	79
5.2.12	Funções não confiabilidade para a porta KofN e suas entradas.	80
5.2.13	Funções taxa de falha de portas KofN e suas entradas. Casos a) até d).	81
5.2.14	Funções taxa de falha de portas KofN e suas entradas. Casos e) até j).	82
5.2.15	Representação simbólica de uma porta PDep.	84
5.2.16	Funções não confiabilidade para uma porta PDep e suas entradas.	86
5.2.17	Funções taxa de falha de portas PDep e suas entradas. Casos a) até f).	87
5.2.18	Funções taxa de falha de portas PDep e suas entradas. Casos g) até j).	88
5.2.19	Funções densidade de probabilidade $f_1(x_1)$ e $f_2(x_2)$	90
5.2.20	Representação simbólica da porta PAND.	91
5.2.21	Não confiabilidade para uma porta PAND e suas entradas.	93
5.2.22	Funções taxa de falha para portas PAND e suas duas entradas. Casos a) até f).	94
5.2.23	Funções taxa de falha para portas PAND e suas duas entradas. Casos g) até j).	95
5.2.24	Representação simbólica da porta SEQ.	97
5.2.25	Funções não confiabilidade para um porta SEQ e suas entradas.	98
5.2.26	Funções taxa de falha de portas SEQ e seus dois componentes. Casos a) até f).	99
5.2.27	Funções taxa de falha de portas SEQ e seus dois componentes. Casos g) até j).	100
5.2.28	Representação simbólica da porta WSP.	101
5.2.29	Funções densidade de probabilidade do componente principal e do componente reserva no estado de dormência.	102
5.2.30	Funções densidade de probabilidade do componente principal e do componente reserva no estado ativado.	103
5.2.31	Funções não confiabilidade de uma porta WSP e suas entradas.	105
5.2.32	Funções taxa de falha para porta WSP de componentes principal e reserva iguais a C_{20}	106

5.2.33	Funções taxa de falha para porta WSP de componentes principal e reserva iguais a C_{21}	107
5.2.34	Funções taxa de falha para porta WSP de componentes principal e reserva iguais a C_{22}	107
5.2.35	Funções taxa de falha para porta WSP de componentes principal e reserva iguais a C_{23}	108
5.2.36	Funções taxa de falha para porta WSP de componentes principal e reserva iguais a C_{24}	108
5.2.37	Funções não confiabilidade da porta $WSP_{C_{23},C_{24}}(t)$ e suas entradas. . .	109
5.2.38	Funções taxa de falha para a porta $WSP_{C_{23},C_{24}}$ e suas entradas.	110
5.2.39	Funções não confiabilidade para a $WSP2S_{C_{24},C_{24},C_{24}}(t)$ e suas entradas. . .	113
5.2.40	Funções taxa de falha para porta WSP de 3 entradas com todos os componentes iguais a C_{24}	113
5.3.1	Formatos de taxa de falha. Figura refeita a partir de Murthy, Xie e Jiang (2004, p. 48)	115
6.3.1	Confiabilidade sob manutenção preventiva.	125
6.3.2	Derivada temporal da função não confiabilidade do componente C_1	125
6.3.3	Função taxa de falha do componente C_1 sujeito à manutenção preventiva.	126
6.3.4	Custo por ciclo de manutenção (unidades monetárias/h).	127
6.3.5	Função confiabilidade com manutenção preventiva.	128
6.3.6	Derivada temporal da função não confiabilidade do componente C_1 em manutenção preventiva.	129
6.3.7	Função taxa de falha de C_1 em manutenção preventiva.	130
6.3.8	Função confiabilidade do componente C_2 sujeito a manutenção preventiva.	131
6.3.9	Derivada temporal da não confiabilidade do componente C_2 em manutenção preventiva.	131
6.3.10	Função taxa de falha do componente C_2 sob regime de manutenção preventiva.	132
6.3.11	Custo por ciclo de manutenção. O detalhe mostra a localização do custo mínimo.	133
6.3.12	Função confiabilidade do componente C_2 sob manutenção preventiva e reparo imperfeito.	134
6.3.13	Derivada temporal da não confiabilidade para C_2 em regime de manutenção preventiva e reparo imperfeito.	134
6.3.14	Função taxa de falha de C_2 em manutenção preventiva e reparo imperfeito.	135
6.3.15	Função confiabilidade da porta PDep sob manutenção preventiva.	136
6.3.16	Derivada temporal da função não confiabilidade da porta PDep sob manutenção preventiva.	137

6.3.17	Função taxa de falha da porta PDep sob manutenção preventiva.	137
B.1.1	Curvas $R_q(t)$ do IBEX-35 para os quatro modelos.	192

Lista de Tabelas

2.1	Aplicações da distribuição Weibull	21
3.1	Comportamento da taxa de falha q -Weibull de acordo com valores dos parâmetros q e β	44
4.1	Tempo até falhar (em dias) de bombas de petróleo em ordem crescente	50
4.2	Parâmetros das distribuições q -Weibull e Weibull dos tempos de vida de bombas de fundo.	50
4.3	Tempo até falhar de hastes de bombeio (em dias).	51
4.4	Parâmetros dos ajustes dos tempos de vida das hastes de bombeio. . . .	52
4.5	Tempo até falhar de tubulação de produção (em dias).	53
4.6	Parâmetros dos ajustes dos tempos até falhar de tubulação de produção.	53
4.7	AIC _c (Critério de Informação Akaike corrigido) e Δ_i para os modelos. .	58
5.1	Parâmetros da q -Weibull dos componentes (C_1 a C_{18}), valores t_{lim} e formatos da função taxa de falha.	65
5.2	Parâmetros da q -Weibull para os componentes das portas WSP, tempos t_{timatv} e t_{limdor} e formatos das curvas de taxa de falha.	65
5.3	Componentes de entradas das portas AND, OR, KofN, PDep, PAnd e SEQ.	67
5.4	Componentes de entrada das portas WSP.	67
5.5	Dados do teste de 1000 compressores de refrigerador. Adaptado de Krishnamoorthi (1992).	69
5.6	Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas AND.	73
5.7	Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas OR. .	78
5.8	Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas KofN.	83
5.9	Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas PDep.	89
5.10	Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas PAND.	95
5.11	Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas SEQ.	100
5.12	Possíveis situações das falhas dos componentes.	102
5.13	Alguns formatos resultantes de aplicação da q -Weibull em AFD.	116
6.1	Parâmetros da distribuição q -Weibull e formatos das funções taxa de falha dos componentes.	124
6.2	Especificações dos cenários.	124

B.1	Parâmetros das distribuições e coeficiente de determinação para tempos de espera de $ \log(\text{retorno}) > u$	192
B.2	Parâmetros das distribuições e coeficiente de determinação para tempos de espera entre os eventos $\log(\text{retorno}) > u$ e $\log(\text{retorno}) < -u$	193

Lista de Abreviaturas e Siglas

AF	Árvore de Falha
AFD	Árvore de Falha Dinâmica
AIC	Critério de Informação Akaike
AND	Porta lógica AND
BGS	Boltzmann-Gibbs-Shannon
CDMS	Confiabilidade, disponibilidade, manutenibilidade e segurança
CM	Cadeia de Markov
DBD	Diagramas Binários de Decisão
EQM	Erro Quadrático Médio
fdp	Função densidade de probabilidade
IBEX-35	Iberia index
KofN	Porta lógica K de n
MTBF	Tempo médio entre falhas
OR	Porta lógica OR
PAND	Porta lógica PAND (AND com prioridade)
PDEP	Porta lógica PDEP (dependência probabilística)
RB	Rede Bayesiana
RSS	Soma dos quadrados dos resíduos
SEQ	Porta lógica SEQ (sequência forçada)

WSP

Porta lógica WSP (sobressalente)

Lista de Símbolos

β	Parâmetro de forma da distribuição Weibull
η	Parâmetro de escala da distribuição Weibull
q	Índice entrópico
t_0	Parâmetro de vida mínima da distribuição Weibull
$[x]_+$	O maior dos dois valores: x ou 0
α	Fator de dormência
Δ_i	Diferença entre Critérios de Informação de Akaike
η_q	Vida característica generalizada
γ	Taxa de falha adimensional
$\Gamma(x)$	Função Gama de x
\hat{F}	Não-confiabilidade estimada
μ'_n	Momento de ordem n em torno do zero
μ_n	Momento de ordem n em torno da média
τ_l	Tempo adimensional limitado
τ_u	Tempo adimensional não limitado
${}_2F_1(a, b; c; z)$	Função hipergeométrica
C_c	Custo de manutenção corretiva
C_i	i -ésimo componente

C_p	Custo de manutenção preventiva
$E[T]$	Tempo esperado por ciclo de manutenção
$f(t)$	Função densidade de probabilidade em t
$F(x)$	Valor da função acumulada em x para a distribuição Weibull
$F_q(t)$	Função de falha acumulada em t
$h_q(t)$	Função taxa de falha em t
k	Número de parâmetros do modelo para a avaliação do AIC
$P(X \leq x)$	Probabilidade da variável aleatória X ter valor menor ou igual a x
p_i	Probabilidade de ocorrência do i -ésimo microestado
q_{upper}	Limite superior para o parâmetro q
R^2	Coefficiente de determinação
$R_q(t)$	Função confiabilidade em t
$Rm_q(t)$	Confiabilidade no instante t sob manutenção preventiva
S_q	Entropia generalizada
T	Intervalo de tempo para manutenção preventiva
t_{lim}	Tempo limite de funcionamento de um componente
$t_{lim}atv$	Tempo limite de um componente em estado ativo
$t_{lim}dor$	Tempo limite de um componente em estado de dormência
t_{max}	Tempo do final de vida
W	Número total de microestados
$Z[T]$	Custo de manutenção esperado por unidade de tempo de operação

Md Mediana

Mo Moda

Lista de Algoritmos

5.1	AND_Monte_Carlo.	70
5.2	OR_Monte_Carlo.	74
5.3	KofN_Monte_Carlo.	80
5.4	PDep_Monte_Carlo.	85
5.5	PAND_Monte_Carlo.	92
5.6	SEQ_Monte_Carlo.	97
5.7	WSP_Monte_Carlo.	105
5.8	WSP2S_Monte_Carlo.	112

1 Introdução

A engenharia de confiabilidade tem como uma de suas principais tarefas manter as instalações industriais, equipamentos, ou simples componentes funcionando de forma adequada. De forma geral manter os sistemas livres de falhas ajuda a afastar perdas financeiras e prejuízos ambientais.

Novos produtos têm aparecido num ritmo cada vez maior e os produtos que já existem precisam ser produzidos de forma cada vez mais acelerada. Isto se deve ao próprio avanço tecnológico e também ao aumento de demanda, provocado por uma quantidade crescente de consumidores, cada vez mais exigentes. A demanda e o avanço tecnológico são fatores que têm se realimentado de forma a exigir que os sistemas de produção sejam cada vez mais confiáveis e menos suscetíveis a falhas.

A importância da manutenção de tais sistemas cresceu e provocou o surgimento da gestão da manutenção. Com uma mecanização cada vez maior e, com a inclusão da automação, o número de pessoas em atividades de produção tem diminuído, ao passo que o capital empregado em equipamentos de produção e nas instalações tem aumentado. Com equipamentos mais caros e menos empregados nos setores produtivos, os gastos com manutenção aumentam, em função da natureza dos equipamentos e da proporção cada vez maior de funcionários em manutenção. Nas refinarias, por exemplo, não é raro que os serviços de manutenção e operação sejam os maiores departamentos na empresa e que cada um deles compreenda cerca de 30% da mão de obra total (vide Rommert (1996)).

A gestão de manutenção foi beneficiada com o desenvolvimento de uma grande área da pesquisa operacional, chamada otimização de manutenção. Esta área foi fundada no início da década de sessenta do Séc. XX, por Barlow, Proschan, Jorgenson, McCall, Radner e Hunter. Desde então os modelos matemáticos e probabilísticos já desenvolvidos foram incorporados e outros novos criados.

Neste contexto, a engenharia de confiabilidade aborda o sistema de forma qualitativa, pelo estudo dos modos de falha e de suas consequências para o sistema, e de forma quantitativa, por exemplo, pela estimação de probabilidades de falha.

A natureza de tais sistemas pode prever tolerância a falhas por meio da reação automática do sistema com medidas que objetivam a manutenção do funcionamento ou uma possível prevenção de eventos desastrosos. Desta forma técnicas de cálculo de confiabilidade devem ser desenvolvidas para funcionarem de acordo com cenários que se aproximam da realidade de modo satisfatório.

1.1 Justificativa

Existe uma grande quantidade de modelos para tempos de vida e aplicações em confiabilidade. Alguns destes são modificações de distribuições estatísticas já existentes e outros são combinações de duas ou mais distribuições. Uma classe de modelos busca a interpretação de fenômenos complexos à luz da mecânica estatística não extensiva e tem sido aplicada a diversos fenômenos, alguns dos quais em áreas que extrapolam aquelas usualmente abordadas pela física.

Os modelos baseados na estatística de Tsallis têm sido aplicados a sistemas correlacionados, muitos dos quais são exemplificados por situações que extrapolam os exemplos físicos usuais. Em sistemas financeiros, biológicos, sociais, dentre outros, as interações entre os elementos constituintes são fortes, e, apesar destes pertencerem a categorias completamente distintas, modelos baseados na estatística não extensiva têm se mostrado bastante adequados na sua descrição.

Dentre os exemplos de sistemas complexos que têm sido descritos estatisticamente de modo satisfatório encontram-se as distribuições de frequências de cestas de basquete, vítimas de ciclones, vendas a retalho de medicamentos de marca e comprimentos de estradas. As quantidades de cestas de basquete são mais bem descritas pela q -exponencial, ao passo que a distribuição Weibull se ajustou melhor para vítimas de ciclones e venda de medicamentos. Por outro lado, os comprimentos de estradas não foram satisfatoriamente descritos nem pela distribuição q -exponencial nem pela Weibull, mas sim pela distribuição q -Weibull (vide Picoli, Mendes e Malacarne (2003)). Em Tsallis et al. (2003) é mostrada a generalização por parâmetro q como ponte para a compreensão de fenômenos econômicos, entre os quais opções de preços, distribuições de volume e rentabilidade e a onipresença do conceito de aversão ao risco. Três anos antes, os números de gols por artilheiros em campeonatos de futebol foram descritos por uma q -exponencial em Malacarne e Mendes (2000). Um elenco de exemplos, bem mais completo, pode ser encontrado em Tsallis (2009).

Frequência de terremotos, comportamento de material granular, distribuição de raios cósmicos que chegam à Terra, parcerias sexuais e medida de sucesso entre músicos são alguns sistemas físicos e sociais para os quais as distribuições da família da q -exponencial são relativamente bem ajustadas (vide Borges (2004a)). No mesmo ano, Rizzo e Rapisarda (2004) desenvolveram uma análise em medidas de esforço de vento coletadas no aeroporto de Florença entre 2002 e 2003, utilizando as ferramentas usuais adotadas pela turbulência hidrodinâmica para reproduzir as funções densidade de probabilidade das componentes de

velocidades intermitentes. A análise foi realizada seguindo a aproximação não-extensiva¹ e o conceito de superestatística² demonstrando o sucesso da estatística de Tsallis em experimentos de turbulência.

O primeiro trabalho que relaciona a distribuição q -Weibull com falha de um dispositivo, foi de Costa et al. (2006). Eles analisaram a ruptura dielétrica em óxidos, assunto de extremo interesse no avanço tecnológico da eletrônica, e obtiveram um ajuste da distribuição q -Weibull com qualidade superior ao obtido pela Weibull não generalizada. Tal fato mostrou que o mecanismo de falha descrito por Weibull pode ser melhorado com as ferramentas provenientes da estatística de Tsallis.

Mesmo após a generalização da função de Weibull com o uso das q -funções ter sido testada com sucesso, o modelo Weibull usual tem sido alvo de outras generalizações fora do âmbito da não-extensividade. Em Bebbington, Lai e Zitikis (2007) foi proposta uma nova generalização da Weibull com dois parâmetros. O modelo tem uma função taxa de falha simples e com a escolha adequada dos valores dos parâmetros é capaz de representar várias classes de envelhecimento. As faixas dos valores dos dois parâmetros são claramente definidas para separar as classes. O cálculo de parâmetros foi realizado por plotagem de probabilidade e máxima verossimilhança.

Esta variedade de sistemas inspirou a aplicação da estatística de Tsallis, em confiabilidade e, posteriormente a extensão para o formalismo de árvore de falha dinâmica, e a utilização na definição de estratégia de manutenção preventiva, em sistemas tecnológicos suficientemente intrincados, onde existam correlações espaciais ou temporais. Em tais circunstâncias, deve ser mais adequada a modelagem com uso ferramentas cujo enfoque é mais próximo de sistemas complexos.

Embora a distribuição q -Weibull tenha sido utilizada para modelar vários fenômenos, a sua utilização em engenharia de confiabilidade ainda não foi plenamente explorada. Esta Tese complementa as lacunas do desenvolvimento de metodologias para a aplicação da distribuição q -Weibull em confiabilidade de componentes isolados, de sistemas formados por componentes conectados segundo o formalismo de árvores de falha dinâmicas e também em gestão de manutenção.

¹A mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs apresenta limitações em classes de sistemas anômalos, essencialmente quando interações ou memória de longo alcance estão presentes. A mecânica estatística não-extensiva generaliza o formalismo usual e permite estudar alguns destes sistemas. Aplicações em diversas áreas do conhecimento podem ser incluídas, por exemplo, física, matemática, biologia, algoritmos de otimização e finanças.

²Superestatística é um ramo da mecânica estatística ou física estatística dedicado ao estudo de sistemas não-lineares e fora do equilíbrio.

1.2 Objetivo geral

O objetivo geral desse trabalho foi o desenvolvimento de um novo método para análise de confiabilidade baseado no modelo q -Weibull, obtido a partir da generalização de modelos existentes usando as ferramentas da estatística de Tsallis, incluindo as funcionalidades combinacional e sequencial das árvores de falha dinâmicas e a manutenção preventiva por substituição

1.3 Objetivos específicos

- a) desenvolvimento da generalização da função taxa de falha da distribuição Weibull por meio da incorporação de ferramentas da estatística de Tsallis;
- b) desenvolvimento e validação de um método de cálculo dos parâmetros da distribuição generalizada do modelo Weibull, a partir de dados amostrais, com a utilização das q -funções, e exemplificação com equipamentos de poços de petróleo e instalações industriais;
- c) desenvolvimento de um método de cálculo de confiabilidade de sistemas considerando componentes associados por meio de árvore de falha dinâmica, com a distribuição q -Weibull;
- d) desenvolvimento de um método de cálculo de intervalo de tempo para manutenção preventiva utilizando a distribuição q -Weibull;

O capítulos desta Tese estão organizados da seguinte forma:

- a) o Capítulo 1 apresenta a introdução, trata da importância do tema e sua interação com a engenharia de confiabilidade;
- b) o Capítulo 2 apresenta a revisão do estado da arte e os principais conceitos em engenharia de confiabilidade;
- c) o Capítulo 3 contém uma análise detalhada da função taxa de falha da distribuição q -Weibull;
- d) o Capítulo 4 compara ajustes das distribuições q -Weibull, Weibull, q -exponencial e exponencial, com dados de componentes de poços de petróleo e de uma estação de solda robotizada;
- e) o Capítulo 5 aplica a distribuição q -Weibull em árvore de falhas dinâmicas;
- f) o Capítulo 6 propõe o cálculo de intervalos de manutenção preventiva com base em valores limites de confiabilidade e taxa de falha, e também com o menor custo por ciclo de manutenção;
- g) o Capítulo 7 apresenta as conclusões da Tese e sugestões para trabalhos futuros;

-
- h) o Apêndice A detalha as principais deduções matemáticas da Tese;
 - i) o Apêndice B mostra uma aplicação da distribuição q -Weibull em mercado de ações.

2 Fundamentos de confiabilidade

2.1 Introdução

Para Ramirez-Márquez e Jiang (2006), no mercado competitivo dos dias de hoje, a confiabilidade de sistemas e produtos contribui consideravelmente para a percepção da eficiência operacional do sistema, assim conseqüentemente, para a satisfação de seus consumidores. Por anos, a análise da confiabilidade tem sido reconhecida como imprescindível nas áreas militar e de sistemas eletrônicos. Contudo, nas últimas décadas, a competição no mercado globalizado forçou esta análise em quase todos os produtos comerciais.

Ainda segundo Ramirez-Márquez e Jiang (2006), os métodos de cálculo, verificação e validação de confiabilidade de sistemas estão se tornando cada vez mais importantes, uma vez que os consumidores procuram produtos confiáveis e de melhor qualidade. Geralmente estes métodos são baseados em informações sobre como a confiabilidade de cada componente impacta na confiabilidade geral do sistema. Para sistemas na fase de projeto, dados sobre a confiabilidade de cada componente são limitados. Em sistemas em operação, é possível ter estimativas com qualidade suficiente para evitar custos inesperados, perda de confiança do consumidor ou cliente e provável perda de espaço no mercado.

Os avanços tecnológicos têm produzido sistemas cada vez mais complicados, de custo de instalação elevado e com possibilidade de gerar grandes perdas financeiras ou danos ambientais caso não funcionem como projetados (veja Ramakumar (1993)).

Com o alto grau de complexidade atingido por muitas instalações industriais, a manutenção focada em confiabilidade tornou-se um imperativo para manter o sistema funcionando de forma adequada e garantir a qualidade de seus produtos ao longo do tempo.

Para Sandtorv, Hokstad e Thompson (1996) as conseqüências de um projeto incorreto ou uma manutenção ineficiente podem afetar negativamente a segurança, o ambiente, ou o custo em muitas categorias dos processos industriais e, em particular, a exploração de petróleo *offshore* e indústrias de produção. O projeto OREDA (maiores detalhes em OREDA (2002)) é um programa de coleta de dados para a indústria *offshore* que está em operação desde o início da década de 1980. Um alto nível de conhecimento em especificação de dados e em métodos de coleta e utilização de dados foi alcançado a partir deste programa. Alguns resultados e parte do conhecimento obtido a partir do OREDA

conduzem a recomendações para projetos de coleta de dados.

As companhias de petróleo participantes do OREDA utilizam seus dados para o desenvolvimento de novos campos de petróleo e para a melhoria dos serviços em operação. Os dados de confiabilidade são utilizados em análise de confiabilidade e segurança. Alguns benefícios são operações mais seguras, aumento da disponibilidade de produção e a otimização da manutenção. Veja em Langseth, Haugen e Sandtorv (1998) que esta prática já existe há mais de 2 décadas. A análise de confiabilidade é um dos vários fatores chave na escolha de soluções com maior relação custo benefício.

De acordo com a norma ISO 14224:1999 a coleta de dados é um investimento. Pode-se alcançar melhoria da qualidade por meio da padronização e melhoria dos sistemas de gerenciamento de informação que permitam coleta eletrônica e transferência de dados. Uma das formas de aumentar a quantidade e diversidade de dados com custo viável é a cooperação entre indústrias. Esta norma fornece recomendações para a indústria de petróleo e gás natural a respeito da especificação e execução de coleta de dados para análise de confiabilidade, ambas como atividades distintas e de aplicação diária para catalogação de dados históricos.

De posse de um conjunto de dados organizados, de procedência confiável e de natureza representativa, as informações obtidas podem ser úteis na melhoria do sistema, tornando-o mais eficiente, mais robusto e menos custoso.

Pascual, Meruane e Rey (2008) propõem uma aproximação para estudar e aumentar a eficácia de um sistema considerando a taxa de custo esperado por ciclo de vida deste. O modelo proposto considera que o sistema é protegido contra flutuação de demanda e ocorrência de falhas com elementos como estoque, equipamentos em redundância e o uso de métodos alternativos de produção. Estas políticas de projeto permitem manter ou minimizar a produção nominal enquanto medidas corretivas são tomadas. Para o modelo do sistema é também considerado o processo de envelhecimento que depende da frequência e da qualidade das ações preventivas.

Pascual, Meruane e Rey (2008) consideram que a tomada de decisão é difícil por causa das descontinuidades na intervenção e nos custos de parada bem como por causa das limitações de orçamento. Os autores apresentam uma formulação não linear que minimiza a taxa de custo total considerando reparo, paradas de manutenção (e seu fator de melhoria) e tempos de substituição. O modelo proposto considera os reparos mínimos e as paradas de manutenção imperfeitas.

Para Pascual, Meruane e Rey (2008) uma quantidade significativa de pesquisadores na área de engenharia de confiabilidade considera que o estudo das políticas de manu-

tenção previne as falhas do sistema e aumenta a sua confiabilidade. Para os autores, a modelagem de manutenção tem sido reconhecida como um assunto em ascensão e também como uma espécie de retardamento. Dentre outras razões, isto se deve ao fato da manutenção realizar ações em plantas de equipamentos e não em produtos; como consequência, esta é considerada uma atividade marginal da companhia.

Para Kiureghian, Ditlevsen e Song (2007), considerar que sistemas possuem componentes reparáveis com falhas aleatórias é interessante em muitos campos da engenharia. Como exemplo de tais sistemas podem-se citar: uma rede de computadores consistindo de servidores, hubs, roteadores e estações de trabalho; um sistema de distribuição de energia elétrica consistindo de plantas de geração e linhas de transmissão, subestações e linhas de distribuição locais; uma rede de transportes terrestres englobando rodovias, túneis e pontes. O ponto de interesse não é apenas a disponibilidade do sistema para a operação em qualquer instante de tempo ou a confiabilidade para operação durante um intervalo de tempo, mas também a medida de quão rapidamente o sistema pode voltar a funcionar. Assim, a identificação de componentes críticos dentro de um sistema é um ponto importante, especialmente no contexto da melhoria da disponibilidade e confiabilidade do sistema. Em sistemas complicados formados por numerosos componentes, a identificação de componentes críticos não é simples.

A análise de desempenho utilizando técnicas de confiabilidade tem crescido e se tornado importante. Desta forma, sistemas existentes podem ter manutenção melhorada se métodos de cálculo adequados para estimar a confiabilidade do sistema forem capazes de analisar quais modos de falha e quais componentes contribuem mais intensamente para a queda da confiabilidade global do sistema ao longo do tempo e das solicitações de utilização. De maneira geral, a antecipação das ações de manutenção deve diminuir as consequências de falhas inesperadas.

Segundo Nepomuceno (1989), a manutenção é dividida em três níveis. O nível I é o mais elementar e consiste simplesmente em conservar o equipamento funcionando. O nível II é a manutenção preventiva clássica, que consiste na substituição de peças em períodos regulares assim como na execução de reparos e consertos devido a quebras ou falhas inesperadas. O nível III estabelece numa estratégia diferente pela qual a manutenção é executada no momento adequado e antes que se processe o rompimento ou a falha qualquer, a chamada manutenção preditiva conhecida internacionalmente como “Condition Monitoring”.

Para Tavares (1996), o controle preditivo de manutenção consiste na determinação do ponto ótimo para executar a manutenção preventiva num equipamento, ou seja, o ponto a partir do qual a probabilidade do equipamento falhar assume valores indesejáveis.

Consequentemente, pode-se tratar a manutenção preditiva baseada na probabilidade de falha como uma particularização da manutenção preventiva desde que esta se justifique probabilisticamente aplicando quantificação de confiabilidade. De forma geral, o objetivo da manutenção é proporcionar o aumento da disponibilidade, seja do componente, seja do sistema como um todo.

Desta forma, observa-se que o cálculo da confiabilidade e da disponibilidade em sistemas complexos¹ é fator de grande importância para o bom desempenho destes sistemas, seja pela análise de como cada componente tem responsabilidade sobre a disponibilidade ou confiabilidade do sistema inteiro, seja pela investigação de como os componentes se relacionam entre si ou como as ações de manutenção interagem.

Os poços de petróleo têm se tornado cada vez mais automatizados e dotados de dispositivos de controle para assegurar a sua funcionalidade e retorno financeiro.

Para Silva (2006) a engenharia de reservatórios tem apresentado um grande crescimento no que diz respeito à utilização de poços inteligentes. Esse tipo de poço possui um conjunto de equipamentos de instrumentação tais como sensores, válvulas e dispositivos de controle de fluxo, instalados ao longo de sua tubulação de produção. Esses equipamentos medem as variáveis de operação do poço, por exemplo, temperatura, pressão e abertura de válvula, alimentam bancos de dados e são usadas para monitorar, em tempo real, todas as operações do poço.

Ainda para Silva (2006) a grande quantidade de dados gerada permite a implementação de estratégias para melhorar a operação dos poços, ter uma melhor noção do que está acontecendo quando intervenções são feitas e, principalmente, prever o que pode acontecer no futuro.

2.2 Integração de componentes e sistemas

Doyle e Dugan (1995) afirmam que muitos sistemas tolerantes a falhas, especialmente aqueles que são desenhados para controle de aplicações embarcadas, podem responder ativamente a falhas e erros. São programados para antecipar certos tipos de falhas e erros e incluir técnicas de detecção, de recuperação ou reconfiguração. A análise de tais sistemas, que dependem criticamente da tolerância à falha, tem que incluir estes comportamentos. Se os próprios mecanismos de tolerância à falha forem falhos, o sistema resultante pode

¹Complexo no sentido de sistemas cujos componentes funcionam entre si em numerosas relações de interdependência ou de subordinação, apresentando compreensão difícil. Nestes sistemas não se aplica a teoria do caos nem se pressupõe a ocorrência de Emergência que é um fenômeno ou processo de formação de padrões complexos a partir de uma multiplicidade de interações simples como ocorre em sistemas sociais (redes sociais), biológicos (colônias de animais) e físicos (clima).

ser ainda menos confiável do que aquele que não foi desenhado para tolerância à falha.

Os autores definem *coverage* como a probabilidade de um sistema se recuperar de uma falha dado que ela tenha ocorrido. Um modelo *coverage* é usado para analisar a falha e o ambiente de recuperação do erro de um sistema adaptativo. Este modelo inclui informação sobre a duração da falha, se esta é permanente ou transitória e a eficiência dos procedimentos de recuperação do sistema. E inclui a possibilidade da recuperação ter sido imperfeita, muito importante para uma avaliação precisa da dependabilidade.

Murthy, Rausand e Østerås (2008, p. 6) afirmam que alguns autores têm usado o termo dependabilidade com o mesmo significado de confiabilidade. Entretanto, tratam dependabilidade para descrever o nível de disponibilidade e seus fatores influenciadores, tais como confiabilidade e manutenibilidade. Para eles, a manutenibilidade é a habilidade de um item, analisado sob condições especificadas de uso, ser mantido em funcionamento ou ter seu funcionamento restaurado quando uma ação de manutenção é realizada sob condições preestabelecidas utilizando procedimentos e recursos prescritos.

Segundo Avizienis, Laprie e Randell (2001) o conceito de dependabilidade pode ser explicitado em três partes: seus atributos, os riscos resultantes, e os meios pelos quais a dependabilidade pode ser alcançada. A Figura 2.2.1 ilustra este conceito.

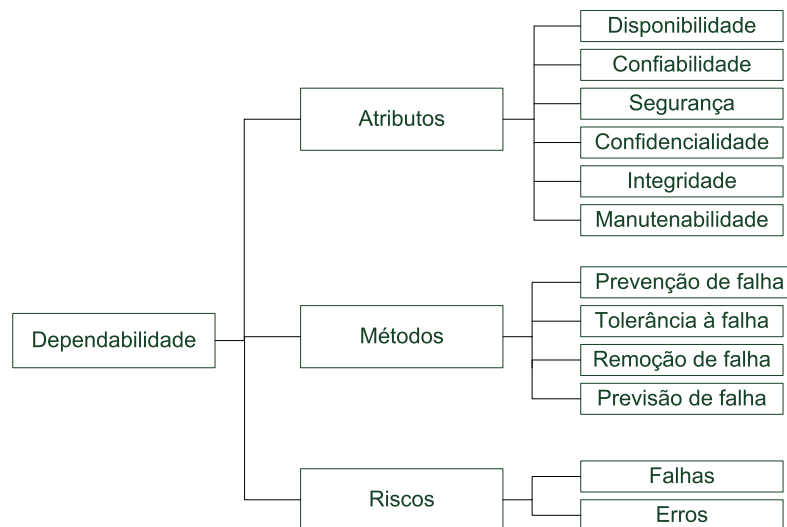


Figura 2.2.1: Árvore de dependabilidade.

Para Doyle e Dugan (1995), modelos combinatoriais são classes de modelos de confiabilidade nos quais as causas das falhas do sistema podem ser expressas por termos das combinações das falhas dos componentes. Modelos combinatoriais incluem os modelos gráficos usados para análise de rede de confiabilidade, Árvores de Falha e diagramas de bloco de confiabilidade. Modelos combinatoriais não requerem o pressuposto de taxa de

falha constante e têm sido aplicados com sucesso na análise de confiabilidade de sistemas mecânicos e elétricos. Particularmente, Árvores de Falha têm sido aplicadas em programas computacionais de análise de confiabilidade humana.

Árvore de Falhas é um diagrama lógico para associação de possíveis falhas dos componentes de um sistema por meio das portas lógicas E, OU e NÃO. A Árvore de Falhas permite o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento topo originado pela combinação das falhas dos componentes do sistema.

Até recentemente, segundo Doyle e Dugan (1995), modelos combinatoriais teriam sido considerados inapropriados para análise de sistemas computacionais tolerantes a falha dada a sua incapacidade de incorporar modelagem de *coverage*, excetuando-se a conversão automática de Árvores de Falha em modelo de Markov com a posterior adição do modelo de *coverage* na Cadeia de Markov. Outras modelagens, como Markov, e simulações são necessárias quando a falha do sistema depende da seqüência na qual os eventos ocorrem ao invés apenas da sua combinação.

Para Gulati e Dugan (1997) as três técnicas analíticas comumente usadas para cálculo e representação da confiabilidade são Árvores de Falha (AF), Diagramas Binários de Decisão (DBD) e Cadeias de Markov. Cada uma das técnicas tem vantagens e desvantagens e a escolha de uma ou outra depende do sistema a ser modelado. Para construção do modelo analítico do sistema, as Árvores de Falha têm sido a escolha mais frequente, pois fornecem uma representação compacta do sistema e são de fácil compreensão. Entretanto, árvores de falha não apresentam flexibilidade de modelagem para cobrir, por exemplo, componentes sobressalentes, e o seu tempo de solução aumenta exponencialmente com o tamanho do sistema a ser modelado. Gulati e Dugan (1997) ainda mostram que as desvantagens dos Diagramas Binários de Decisão e cadeias de Markov são devidas à difícil especificação, propensa a erros e demorada.

Para Manian et al. (1998) as Árvores de Falha são uma estrutura gráfica e lógica para analisar a confiabilidade de sistemas e fornecem uma abordagem de modelagem simples para representar as interações entre os componentes de um sistema. As Árvores de Falhas Dinâmicas apresentam dispositivos (portas) capazes de modelar comportamentos seqüenciais. A metodologia para representar as Árvores de Falha Dinâmicas apresentada por Manian et al. (1998) é chamada de Árvore de Falhas Dinâmicas e Inovativas (DIF-Tree). Esta metodologia é baseada na técnica de dividir e conquistar modularizando as Árvores de Falha em subárvores independentes que podem ser resolvidas por técnicas diferentes.

Manian et al. (1998) estenderam a capacidade das DIFTree para modelar diferentes distribuições de tempos de falha incluindo probabilidades fixas (independente do tempo e

geralmente aplicadas em modelagem de falhas de programas computacionais), tempos de falha exponencialmente distribuídos (taxa de falha constante), tempos de falha com distribuição Weibull (taxa de falha variável com o tempo) e tempos de falha com distribuição lognormal.

Gulati e Dugan (1997) apresentam uma aproximação modular para análise de Árvores de Falha estáticas e dinâmicas. Aplicam uma combinação de Diagramas Binários de Decisão para Árvore de Falhas Estáticas e cadeias de Markov para Árvores de Falha Dinâmicas, juntamente com detecção de subárvores independentes.

Manian et al. (1998) e Dugan, Sullivan e Coppit (1999) afirmam que Árvores de Falha Estáticas são modeladas de forma mais eficiente por meio de Diagramas Binários de Decisão, e Árvores de Falha Dinâmicas, por métodos de Markov.

A principal contribuição de Manian et al. (1998) foi estender a estrutura de modelagem das DIFTree para suportar novas distribuições de tempos de falha e configurações de Árvores de Falhas, assim como suportar uma técnica alternativa de solução na forma de simulação de Monte Carlo. No caso da distribuição exponencial, as taxas de transição de um estado de Markov para outro são funções das taxas de falha constantes e a solução é encontrada por meio de equações diferenciais ordinárias.

Para tempos de falha que seguem a distribuição Weibull, as taxas de falha variam no tempo. Para cobrir este pressuposto, são criadas classes diferentes de transição para as Cadeias de Markov. A transição temporal é calculada para encontrar o valor numérico da taxa de falha por meio da expressão algébrica referenciada pela transição na Cadeia de Markov. A primeira avaliação da Cadeia de Markov cria a matriz de taxa de transição. Conforme Manian et al. (1998), as entradas na matriz são de transições Weibull que estão definidas pelo seu estágio. O algoritmo resolve as equações diferenciais por meio da integração, no tempo de missão, e chama a interface funcional da Cadeia de Markov para recalcular a taxa de falha Weibull em cada instante de tempo. Segundo os autores, o sistema de equações pode ter solução difícil uma vez que os coeficientes da matriz de transição podem variar dentro de uma grande faixa de valores em distribuições Weibull com parâmetros de forma β muito menores que a unidade.

Dugan, Sullivan e Coppit (1999) apresentam um programa computacional capaz de analisar Árvores de Falha Dinâmicas e dividí-las em módulos, a fim de que sejam resolvidos separadamente por meio de técnicas apropriadas a cada módulo. Segundo eles, modelos de Markov de sistemas complexos, incluindo *coverage*, podem alcançar tamanhos intratáveis, ao passo que as Árvores de Falha Dinâmicas (AFD) são representações compactas que muitas vezes podem ser convertidas automaticamente em modelos de Markov. Os autores acreditam apresentar a semântica das AFD de forma precisa e razoavelmente completa

baseada em predicados lógicos e teoria dos conjuntos.

Redes Bayesianas (RB), segundo Neapolitan (2004), são estruturas gráficas para representação de relações de probabilidades para um grande número de variáveis e para realizar inferência probabilística entre tais variáveis. As RB têm sido usadas para análise de confiabilidade especialmente em sistemas em que a dependabilidade é observada.

Para Marques e Dutra (2007), uma Rede Bayesiana é uma representação compacta de uma tabela de conjunção de probabilidades do universo do problema. Do ponto de vista de um especialista, Redes Bayesianas constituem um modelo gráfico que representa de forma simples as relações de causalidade das variáveis de um sistema.

Segundo esses autores, atualmente, estudos em inteligência artificial podem ser divididos em duas áreas: o desenvolvimento de sistemas que agem como humanos e o desenvolvimento de sistemas que agem racionalmente. Dentro do contexto dos sistemas que agem racionalmente, duas abordagens principais podem ser utilizadas: raciocínio lógico e raciocínio probabilístico. O raciocínio lógico pondera sobre o conhecimento prévio a respeito do problema e desta base de conhecimento retira suas conclusões. Esta abordagem pode não ser útil em situações onde não se conhece previamente todo o escopo do problema. Nestes casos, o raciocínio probabilístico surge como uma boa opção.

Segundo Marques e Dutra (2007), para que um sistema possa atuar adequadamente em situações de incerteza, este deve ser capaz de atribuir níveis de confiabilidade para todas as sentenças em sua base de conhecimento e ainda estabelecer relações entre as sentenças. Redes Bayesianas oferecem uma abordagem para o raciocínio probabilístico que engloba teoria de grafos, para o estabelecimento das relações entre sentenças, e ainda teoria de probabilidades, para a atribuição de níveis de confiabilidade.

Para Bobbio et al. (2001), as Redes Bayesianas (RB) fornecem um método probabilístico robusto para raciocínio sobre incerteza. As RB foram aplicadas com sucesso em uma variedade de tarefas no mundo real, mas têm recebido pouca atenção na área da dependabilidade. Bobbio et al. (2001) exploram as capacidades do formalismo de RB em analisar sistemas com dependência. Para tal comparam RB com Árvores de Falha. Ainda mostram que qualquer árvore de falha pode ser convertida diretamente em uma RB e as técnicas básicas de inferência de uma RB podem ser usadas para obter os parâmetros clássicos de uma Árvore de Falha. Além disso, vários pressupostos restritivos em uma Árvore de Falha podem ser removidos e vários tipos de dependências podem ser acomodados. O artigo ainda compara as duas metodologias por meio de um exemplo.

Ainda segundo Bobbio et al. (2001), as RB têm se tornado um formalismo largamente usado, pois representam o conhecimento de incerteza em sistemas probabilísticos e

têm sido aplicadas a vários problemas do mundo real. RB são definidas como diagrama acíclico direcionado (grafo) em que variáveis aleatórias discretas são associadas a cada nó junto com as informações de dependência condicional dos nós pais. Os nós que não possuem pais são chamados de raízes e têm associados valores de probabilidade iniciais. A principal característica de uma RB é a possibilidade de especificar diretamente as causas que influenciam um dado efeito por meio da inclusão de dependências condicionais locais no modelo.

Para Bobbio et al. (2001), RB são mais adequadas que Árvores de Falha para representar dependências complexas entre componentes e para incluir incerteza na modelagem. Embora o uso de RB pareça promissor em diferentes níveis de análise de dependabilidade de Sistemas Eletrônicos Programáveis, as RB não fornecem um mecanismo direto para representação de dependências temporais, as quais são bem implementadas em técnicas amplamente difundidas para análise de dependabilidade como, por exemplo, Cadeias de Markov e Redes Estocásticas de Petri.

As Redes Bayesianas também permitem realizar otimização de manutenção. Langseth (2002) apresenta um modelo de confiabilidade para componentes que estão sujeitos a vários mecanismos de falha e que nem sempre têm um reparo perfeito. As análises são realizadas para otimizar o regime de manutenção. O modelo é representado por uma RB e foram utilizadas relações de independência condicional codificadas na estrutura da rede e nos cálculos geradores de estimativas de parâmetros.

Para Santos (2005), a relação de causa e efeito numa Rede Bayesiana, ou seja, relação de dependência condicional entre as variáveis, é definida por meio de funções de densidade de probabilidades condicionais, se as variáveis associadas aos nós forem contínuas. Caso as variáveis sejam discretas, as possíveis combinações de valores entre os nós pais são apresentadas por uma tabela de probabilidade condicional. Tal combinação é chamada de instanciação dos conjuntos dos pais. Santos (2005) também descreve passos de conversão de uma Árvore de Falhas para uma Rede Bayesiana.

Segundo Barros Júnior (2006), para estruturar as tabelas de probabilidade condicional é necessário evidenciar todas as combinações possíveis entre os valores de cada nó filho e seus pais, para daí estimar-se a probabilidade de ocorrência dessas combinações, quer pela opinião de especialistas, quer de forma frequentista utilizando uma base de dados.

Para Moura (2006), os processos Markovianos são um dos processos estocásticos mais importantes para modelagem de sistemas dinâmicos. Em Engenharia de Confiabilidade, os processos de Markov são utilizados basicamente quando modelos como Árvore de Falhas, árvore de eventos ou diagrama de blocos são insuficientes para representar funcionalmente um sistema complicado. Segundo Gelman et al. (2004, p. 286), Cadeias de Markov

são uma sequência de variáveis aleatórias $\theta^1, \theta^2, \dots$, para as quais, para qualquer t , a distribuição de θ^t , conhecidos todos os prévios θ^s , dependem apenas do mais recente valor θ^{t-1} .

Segundo Montani et al. (2006) e Bobbio et al. (2008), Árvores de Falha Dinâmicas (AFD) são uma recente extensão de Árvores de Falha capazes de tratar diversos tipos de dependência. As AFDs introduzem quatro portas novas: WSP (*warm spare*), capaz de representar componentes primários e em *stand-by*, podendo este último estar compartilhado com outros sistemas; SEQ (*sequence enforcing*), que representa a situação em que as falhas podem ocorrer em componentes única e exclusivamente em uma ordem específica; FDEP (*functional dependence*), que representa o arranjo onde um evento gatilho causa, em outro componente, o estado inacessível (falho), estando este último com ou sem condições de uso (operacional ou não); e PAND (*priority and*), que resulta no estado falho se e somente se todas as suas entradas falham em uma ordem predeterminada.

Para Montani et al. (2006), a análise quantitativa de uma Árvore de Falha Dinâmica requer a expansão do modelo em seu estado de espaço e a solução da Cadeia de Markov de Tempo Contínuo (CMTC). Por meio de um processo de modularização é possível identificar as subárvores de falha com portões dinâmicos e usar um modelo de Markov diferente, muito menor que um modelo da Árvore de Falha inteira, para cada uma das subárvores. Mesmo assim ainda existe o problema da explosão de estados. Para diminuir esta limitação os autores propõem a conversão de uma Árvore de Falha Dinâmica em Rede Bayesiana Dinâmica (RBD). Uma RBD é um modelo de tempo discreto no qual o sistema é representado em vários intervalos de tempo e as dependências condicionais entre as variáveis nos instantes de tempo são introduzidas a fim de capturar a evolução temporal. Quando o pressuposto de Markov é válido, o instante de tempo futuro $t + \Delta t$ é condicionalmente independente dos anteriores, dado que o instante atual é t . Assim consegue-se representar dois instantes consecutivos de tempo numa rede.

Para O'Hagan (2006), nos últimos 5 a 10 anos, uma variedade de ferramentas foram desenvolvidas usando estatística Bayesiana para resolver muitos problemas enfrentados pelos desenvolvedores e usuários de modelos de processos complicados. Estes métodos podem ser vistos como desenvolvimento de trabalhos em Projeto e Análise de Experimentos Computacionais (PAEC) na década de 1980, que introduziu a idéia fundamental da construção de um emulador estatístico de um modelo de simulação. O autor afirma que, embora boa parte do PAEC seja a rigor não Bayesiana, é possível reconhecer claramente uma interpretação Bayesiana e alguns momentos são explicitamente métodos Bayesianos.

Para Pérez, Martín e Rufo (2006), o advento do método de Cadeia de Markov-Monte Carlo (CMMC) para simular distribuição *a posteriori* contribuiu para a prática

da estatística Bayesiana, mas infelizmente a análise de sensibilidade em métodos CMMC é uma difícil tarefa. Os autores propuseram um método de estimação de sensibilidade local e paramétrico para modelos Bayesianos. A medida de sensibilidade é feita por um vetor gradiente de uma quantidade *a posteriori* relacionada ao parâmetro. As simulações CMMC usadas para estimar valores *a posteriori* podem ser reutilizadas para estimar as medidas de sensibilidade e seus erros evitando a necessidade de mais amostragem.

Segundo esses autores, a metodologia Bayesiana se tornou mais utilizada devido à introdução de métodos CMMC. A implementação desta técnica baseada em simulação permitiu obter soluções numéricas de problemas baseados em modelos realmente complicados. Este fato produziu um aumento no número de artigos teóricos, que foram seguidos por trabalhos aplicados em um grande número de áreas do conhecimento, e algumas vezes as CMMC são a única alternativa computacionalmente eficiente.

Após realizar toda a análise de confiabilidade por AF ou RB, pode-se encontrar uma medida de confiabilidade de um sistema complexo com muitos componentes e dependências. Entretanto, este valor não pode ser tomado como exato e sim um valor em torno do qual oscila a verdadeira medida de confiabilidade do sistema.

Para Filho (2006) é difícil a determinação de um valor apropriado quando são considerados valores dos dados de falhas e reparos associados a uma Árvore de Falhas. A seleção realística dos dados de falha e reparo para um componente particular ou evento básico da árvore de falha depende principalmente da experiência passada dos operadores e o uso de outros julgamentos. O autor acredita que, a menos que possam ser adotados valores realísticos de probabilidade (como taxas de falha) com algum grau de confiança para os eventos básicos, o resultado do evento topo não poderá representar algo de particular significância.

Ainda segundo Filho (2006), o uso de intervalos de probabilidades para os eventos básicos produzem indicações mais realísticas para os resultados do evento topo. Isto deverá permitir a obtenção de melhores resultados de tomada de decisão em áreas de gerenciamento de risco e de confiabilidade

Para Bobbio et al. (2008), Redes Bayesianas Dinâmicas (RBD) estendem o formalismo de Redes Bayesianas pelo fornecimento explícito de uma dimensão temporal discreta. As RBD representam a distribuição de probabilidade nos possíveis desdobramentos de um processo invariante ao tempo. A vantagem das RBD quanto a modelos probabilísticos temporais como Cadeias de Markov é que RBD é um modelo de transição estocástico fatorado no número de variáveis aleatórias e no conjunto de dependências condicionais definido.

Ainda para os autores, as Redes Bayesianas Dinâmicas possuem funcionalidade similar às Árvores de Falha Dinâmicas sendo possível converter um problema tratado por um método em outro.

2.3 Distribuição de Weibull aplicada à confiabilidade

Segundo Ramakumar (1993), confiabilidade de sistema é a probabilidade de o sistema funcionar, cumprindo a função para a qual foi projetado, dentro de um intervalo específico de tempo e sob condições preestabelecidas. As condições preestabelecidas para o funcionamento do sistema se referem a aspectos ambientais como umidade, temperatura, exposição à poeira, etc.

Diz-se que o sistema deixou de cumprir sua função quando este falha. Um sistema pode falhar de forma completa ou parcial. Por exemplo, um motor pode funcionar ainda que superaquecido. Neste caso, cabe especificar ou não o superaquecimento como uma das maneiras de falhar. A maneira como um equipamento ou componente falha é chamada modo de falha. Cada tipo de equipamento ou componente possui os seus modos de falha e um mesmo equipamento ou componente pode apresentar vários modos de falha. Pneu de aeronave, por exemplo, pode falhar devido a um corte ou devido ao desgaste de sua banda de rodagem, constituindo assim dois modos de falha distintos (consulte Assis (1999) para maiores detalhes).

A unidade de tempo considerada depende do sistema em análise. O tempo pode ser medido cronologicamente em minutos, horas, dias, anos e em ciclos de funcionamento. A confiabilidade é expressa em função do tempo e pode ser interpretada como a proporção da população de equipamentos ou sistemas que sobrevive, ou seja, funciona além de um tempo especificado. O valor numérico desta proporção pode ser entendido como a probabilidade de que um indivíduo da população funcione além de um valor de tempo determinado. Existem métodos matemáticos capazes de inferir sobre os valores destas probabilidades e a maioria destes métodos requer ajuda computacional para processar dados amostrais.

Algumas teorias foram desenvolvidas para explicar o fenômeno da falha de forma geral e alguns modelos foram criados usando as distribuições exponencial, lognormal e Weibull. Esta última se destaca por ser a mais flexível. A seguir, o texto explora alguns estudos nesse sentido.

Para Weibull (1939), a ruptura dos materiais é determinada pelas tensões internas em um ponto, assumindo que, por meio de uma combinação adequada das três principais tensões ou cortantes, um valor característico para o material em questão pode ser calculado. Este valor é considerado como definitivamente decisivo no julgamento se a ruptura

foi alcançada ou não.

Ainda para Weibull (1939), medidas experimentais conduzem a resultados que dificilmente estarão de acordo com esta teoria. Entretanto, considerando as leis elementares da probabilidade como ponto de partida, uma teoria pode ser desenvolvida com uma formulação de acordo com os resultados considerados inconsistentes com a teoria clássica.

Weibull (1939) assume que para um material existem vários pontos de fraqueza em um determinado volume. Se todos os pontos de fraqueza são de natureza tal que provocam a ruptura no instante em que falham dentro de um volume sujeito a um esforço σ e, supondo ainda que existam n destes pontos de fraqueza na unidade de volume e que o esforço σ é concentrado dentro de um pequeno volume dv , então a probabilidade de ruptura será $dS = n dv$. Se, ao invés disto considerarmos p elementos de volume dv , a probabilidade de ruptura S é:

$$S = 1 - (1 - ds)^p, \quad (2.3.1)$$

ou seja,

$$S = 1 - (1 - n dv)^p, \quad (2.3.2)$$

O volume total sujeito ao esforço é

$$p dv = v \quad (2.3.3)$$

e

$$S = 1 - \left(1 - \frac{nv}{p}\right)^p. \quad (2.3.4)$$

Ainda segundo Weibull (1939), fazendo p aumentar infinitamente enquanto dv diminui na proporção necessária para que v permaneça constante obtém-se:

$$S = 1 - \lim_{\frac{p}{nv} \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{nv}{p}\right)^{\frac{p}{nv}} = 1 - \exp(-nv). \quad (2.3.5)$$

Observa-se que se $n.v = 1$, isto é, o volume sujeito ao esforço é igual ao volume médio ocupado por cada local de fraqueza, então a probabilidade de ruptura é de apenas

63%.

Em Weibull (1951), a expressão

$$P(X \leq x) = F(x) = 1 - \exp[-\varphi(x)], \quad (2.3.6)$$

onde $\varphi(x)$ é uma função positiva, não decrescente e se reduz a zero para $x = x_u$, é citada como uma forma de representar qualquer função de distribuição acumulada. A forma mais simples de satisfazer estas condições é:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - x_u}{x_0}\right)^m\right], \quad (2.3.7)$$

onde x_u é a raiz de $F(x)$, x_0 é um parâmetro de escala.

No mesmo artigo são apresentados alguns exemplos de aplicação da Equação 2.3.7, dentre os quais:

- a) elasticidade de aço;
- b) distribuição da dimensão de cinzas;
- c) resistência da fibra de algodão indiano;
- d) fadiga do aço.

A distribuição Weibull pode ter a sua função densidade representada por:

$$f(t) = \frac{\beta \cdot (t - \delta)^{\beta-1}}{\theta^\beta} \exp\left[-\left(\frac{t - \delta}{\theta}\right)^\beta\right] \quad (t \geq \delta), \quad (2.3.8)$$

onde β é o parâmetro de forma, θ é o parâmetro de escala, δ é o parâmetro de localização e t é o tempo de vida.

Inúmeros trabalhos sobre a distribuição Weibull foram apresentados em diversas áreas do conhecimento. A Tabela 2.1 a seguir mostra alguns exemplos de aplicação.

Tabela 2.1: Aplicações da distribuição Weibull

Aplicação	Referência
Alturas de ondas	Channel Henderson e Weber (1978)
Brilho termoluminescente	Pagonis et al. (2001)
Conflito de tráfego em junção de via de trânsito rápido	Chin et al. (1991)
Corrosão perfurante em tubo	Sheikh et al. (1990)
Crescimento de confiabilidade de programas computacionais	Yamada et al. (1993)
Danos em materiais laminados	Kwon e Berner (1994)
Desgaste adesivo de metais	Quereshi e Sheikh (1997)
Distribuição da velocidade do vento	Seguro e Lambert (2000), Lun e Lam (2000)
Falha de revestimentos	Almeida (1999)
Falha em materiais em fibras de carbono	Durham e Padgett (1997), Padgett et al. (1995)
Falhas em rolamentos	Lieblein e Zelen (1956)
Falhas latentes de produtos eletrônicos	Yang et al. (1995)
Finos do carvão	Rosen e Rammler (1933)
Flutuações de temperatura	Talkner et al. (2000)
Fratura em concreto	Xu e Barr (1995)
Frequência de enchentes	Heo et al. (2001)
Granulometria	Fang et al. (1993)
Material duro e quebradiço	Fok et al. (2001)
Precipitação no noroeste do Pacífico	Duan et al. (1998)
Previsão de mudanças tecnológicas	Sharif e Islam (1980)
Resistência de fibras de cascas de coco	Kulkarni et al. (1973)
Resistência de vidro	Keshvan et al. (1980)
Rupturas dielétricas por tensão	Nossier et al. (1980), Mu et al. (2000), Wang et al. (1997)
Tamanho da gota de chuva	Jiang et al. (1997)
Tamanho de fragmentos de rochas	Rad e Olson (1974)
Tamanho de gotas em sprays	Fraser e Eisenklam (1956)
Tamanho de icebergs Antárticos	Neshyba (1980)
Tempo de morte após a exposição a agentes cancerígenos	Pike (1966), Peto e Lee (1973)
Terremotos	Huillet e Raynaud (1999)
Variação de carga em voo de helicóptero	Boorla e Rotenberger (1997)

Fonte : Murthy, Xie e Jiang (2004, p. 13).

Com foco em manutenção, Fleming e Assis (1999) utilizaram esta distribuição para analisar dados de falha provenientes de uma frota de aeronaves EMB-120 e descrever o desgaste dos pneus segundo a sua utilização em termos de horas de vôo e número de

pousos.

Dada a sua larga aplicabilidade e relativa simplicidade, a distribuição Weibull foi enormemente difundida na engenharia. Barringer (2004) considera gráficos de crescimento de confiabilidade, conhecidos como Crow-AMSAA, e gráficos de probabilidade de Weibull como ferramentas analíticas mínimas necessárias para qualquer engenheiro de confiabilidade e mostra exemplos de aplicação incluindo falhas em nave espacial da NASA.

Apesar do grande número de aplicações e da simplicidade de implementação, a distribuição Weibull apresenta a limitação de expressar apenas taxas de falha monótonas. Para representar todo o ciclo de vida de componentes mecânicos por exemplo, são necessárias três funções, uma para cada trecho de taxa de falha decrescente, constante e crescente e assim perfazer toda a curva da banheira (ou formato de “U”). A mesma limitação ocorre para sistemas cuja taxa de falha tem formato de “U” invertido ou unimodal.

2.4 Entropia de Tsallis

Esta seção apresenta resumidamente a generalização da entropia generalizada de Tsallis.

Tsallis (1988) introduziu uma generalização do conceito de entropia em termos de um parâmetro q :

$$S_q = k \frac{\sum_i^W p_i^q - 1}{1 - q}, \quad (2.4.1)$$

onde k é uma constante positiva que fornece consistência dimensional à expressão, a constante de Boltzmann, p_i é a probabilidade de ocorrência do i -ésimo microestado e W é o número total de microestados do sistema. Esta expressão recupera a entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS), $S_1 = -k \sum_i^W p_i \ln p_i$, quando $q \rightarrow 1$.

A mecânica estatística não extensiva induziu generalizações em outros campos por exemplo em matemática. Duas funções normalmente aparecem no início do formalismo, a $\exp_q(x)$ e a $\ln_q(x)$, chamadas q -exponencial e q -logaritmo respectivamente. Ambas as funções possuem um parâmetro de controle q , além do argumento x .

A mecânica estatística não extensiva introduz generalizações das funções exponencial e logaritmo, através de um parâmetro adimensional q , estas funções são chamadas q -exponencial e q -logaritmo, definidas por Tsallis (1994b):

$$\exp_q(x) = \begin{cases} [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, & \text{se } [1 + (1 - q)x] > 0, \\ 0, & \text{em outro caso,} \end{cases} \quad (2.4.2)$$

e

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (x > 0, q \neq 1), \quad (2.4.3)$$

onde $x, q \in \mathbb{R}$. Estas funções são inversas uma da outra, ou seja, $\exp_q(\ln_q x) = \ln_q(\exp_q x) = x$, e as funções usuais são recuperadas no limite $q \rightarrow 1$. As funções ainda satisfazem $\ln_q 1 = 0$ e $\exp_q 0 = 1, \forall q$. Outras propriedades destas q -funções podem ser encontradas em Tsallis (2009). Estas funções generalizadas têm sido aplicadas em diversas áreas além da mecânica estatística, por exemplo, em matemática e em estatística.

A distribuição Gaussiana é a distribuição que maximiza a entropia BGS sujeita às restrições de normalização ($\int p(x) = 1$) e de finitude² do segundo momento definida como:

$$\int x^2 p(x) dx = \sigma^2, \quad (2.4.4)$$

onde σ^2 é a variância e $p(x)$ é a função densidade de probabilidade em x . Na mecânica estatística não extensiva, esse conceito também foi generalizado, surgindo assim, o segundo q -momento:

$$\int x^2 [p(x)]^q dx = \sigma^2 \quad (2.4.5)$$

Este esquema variacional foi generalizado consistentemente dentro do contexto da mecânica estatística não extensiva (veja Tsallis et al. (1995)). Se S_q é maximizada com as restrições apropriadas, a distribuição q -Gaussiana aparece:

$$p(x) = C_q \exp_q(-\xi x^2), \quad (2.4.6)$$

com

$$C_q = \left[\frac{\xi(1-q)}{\pi} \right]^{1/2} \frac{\Gamma((5-3q)/2(1-q))}{\Gamma((2-q)/(1-q))}, \quad (2.4.7)$$

para $q < 1$, e

$$C_q = \left[\frac{\xi(1-q)}{\pi} \right]^{1/2} \frac{\Gamma(1/(1-q))}{\Gamma((3-q)/2(1-q))} \quad (2.4.8)$$

²qualidade, propriedade ou condição do que é finito.

para $1 < q < 3$, e $\Gamma(\nu)$ é a função Gama. Se tomarmos o limite $q \rightarrow 1$, a q -Gaussiana recupera a distribuição Gaussiana usual:

$$P(x) = \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \exp(-\xi x^2). \quad (2.4.9)$$

A q -Gaussiana também generaliza outras distribuições largamente utilizadas: $q = -\infty$ recupera a distribuição Dirac; $q = 2$ recupera a distribuição de Cauchy-Lorentz, para $q = 3$ a q -Gaussiana se torna uma distribuição plana³, com $q = \frac{3+m}{1+m}$ recupera a t -Student's com m graus de liberdade e para $q = \frac{n-6}{n-4}$ com $n > 4$ a q -Gaussiana se torna a r -Student's com $n - 2$ graus de liberdade (veja Souza e Tsallis (1997)). Existem outras possibilidades de generalização da distribuição Gaussiana conforme uma estrutura não extensiva, veja Prato e Tsallis (1999) para mais detalhes.

³Uma distribuição plana é uma distribuição uniforme com suporte infinito (de $-\infty$ a $+\infty$).

3 Análise da função taxa de falha pelo modelo q -Weibull

3.1 Introdução

A generalização da distribuição Weibull por meio de um único parâmetro q é capaz de modelar cinco tipos de taxa de falha: monótona decrescente, constante, monótona crescente, unimodal e curva da banheira. O modelo q -Weibull tem inspiração na estatística não-extensiva, usada para descrever sistemas complexos com interações de longo alcance e/ou memória de longa duração¹. A distribuição q -Weibull tem 4 parâmetros e se torna a Weibull usual no limite $q \rightarrow 1$, e também a distribuição Burr XII (para um conjunto de valores específicos, vide Equação 3.2.2). A q -Weibull representa a unificação de modelos usualmente encontrados em análise de confiabilidade. O uso de uma escala adequada para a taxa de falha adimensional reduz suas curvas a um modelo de um parâmetro. Parte do conteúdo deste capítulo foi publicada em Assis, Borges e Melo (2013).

A análise de confiabilidade usa frequentemente a distribuição Weibull que é um modelo empírico simples e poderoso. Para mais detalhes ver Weibull (1951). A função densidade de probabilidade (fdp) no tempo t , onde $t < T$ e T é o tempo até a falha, é dada por:

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta - t_0} \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^{\beta-1} \exp \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right], \quad (3.1.1)$$

onde $\beta > 0$, $\eta > t_0$, $t \geq t_0$ e $\int_0^\infty f(x)dx = 1$. A distribuição exponencial é um caso particular da Equação 3.1.1 quando $\beta = 1$.

Várias generalizações do modelo Weibull foram propostas: transformações linear e não linear do tempo, a utilização de múltiplas distribuições, parâmetros em função do tempo e modelos estocásticos dentre outros. Em Murthy, Xie e Jiang (2004) há várias destas propostas de modelos.

¹Também ocorre a quebra de ergodicidade. Esta é a hipótese central da mecânica estatística, que diz que a média temporal é igual à média de *ensembles* (conjuntos). Para sistemas simples, a repetição de um experimento muitas vezes, ou a execução de muitos experimentos similares uma única vez produzem o mesmo resultado. Em sistemas complexos, isto pode não ocorrer.

Conforme visto em Pham e Lai (2007) e Nadarajah e Kotz (2005) não há clareza quanto à originalidade das funções densidade de probabilidade usadas em confiabilidade. Segundo Berberan-Santos, Bodunov e Valeur (2008), o uso da exponencial esticada² tem registro anterior ao artigo de Weibull (1951) em um trabalho de Kohlrausch descrevendo a descarga de capacitor.

Quase todas as propostas de generalização do modelo de Weibull têm estrutura exponencial, seja simplesmente exponencial, exponenciais aninhadas³ ou exponenciais de várias funções.

As funções exponenciais são usualmente encontradas em sistemas com interação fraca ou sem interação.

Sistemas complexos usualmente apresentam interações espaciais de longo alcance, ou memória de longa duração, ou efeitos de cooperação/competição, como pode ser visto em Bak (1997). Para sistemas complexos, as distribuições estatísticas são geralmente leis de potência, ao passo que para sistemas simples ocorrem leis exponenciais.

Falhas de componentes podem ter causas múltiplas e também causas de interação que podem ser recentes ou não, algumas destas agindo em cooperação ou em conflito com outras, por isso é esperado que um sistema de comportamento complexo apareça. Desta forma, podem surgir distribuições em lei de potência, que não seriam adequadamente descritas por um modelo baseado na função exponencial.

A mecânica estatística de sistemas simples tem uma estrutura bem estabelecida por meio das distribuições de probabilidade exponenciais como, por exemplo, peso de Boltzmann e a distribuição de Maxwellian. Estas distribuições exponenciais são derivadas da entropia de Boltzmann-Gibbs-Shannon (BGS). A base teórica da descrição estatística de sistemas complexos ainda é objeto de pesquisa, entretanto existem muitas evidências que apontam na direção da mecânica estatística não extensiva.

A definição da entropia por Tsallis (1988), que é a generalização da entropia BGS por meio do índice entrópico q , introduziu a possibilidade de estender a mecânica estatística para sistemas complexos de forma natural e coerente, levando o contexto de memória de longa duração (processos não markovianos) para as distribuições baseadas em q -funções. Esta evolução ultrapassou os limites da física e proporcionou aplicações em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, matemática aplicada.

A função q -exponencial aparece naturalmente no contexto de não extensividade e é definida por:

²A distribuição Weibull também pode ser chamada de exponencial esticada.

³São exponenciais em cascata como por exemplo $\exp[-\exp(x)]$.

$$\exp_q(x) = [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}} \quad (3.1.2)$$

com $x, q \in \mathbb{R}$. O símbolo $[a]_+$ significa $[a]_+ = a$ se $a > 0$ e $[a]_+ = 0$ se $a \leq 0$ (veja Equação 2.4.2). A q -exponencial se reduz a função exponencial no limite $q \rightarrow 1$. Desta forma $\exp_1 x = \exp x$ e a Equação 3.1.2 é uma generalização da exponencial.

Para valores grandes de x e $q > 1$, a q -exponencial é assintoticamente uma lei de potência e apresenta cauda esticada, pois $\exp_q(-x) \sim 1/x^n$, com $n = 1/(q - 1)$. A q -exponencial passa continuamente do comportamento em lei de potência (assintoticamente para $q > 1$) para um comportamento exponencial (com $q = 1$).

A q -exponencial tem sido utilizada em diferentes contextos da matemática pura e aplicada, como, por exemplo, em funções deformadas em Borges (1998), generalização de estruturas algébricas por Borges (2004b) e Cardoso et al. (2008), teoria dos números em Lobão et al. (2009), a generalização da transformada de Fourier em Umarov e Tsallis (2008), Jauregui, Tsallis e Curado (2011), Jauregui e Tsallis (2011), a generalização do teorema central do limite por Moyano, Tsallis e Gell-Mann (2006), Umarov, Tsallis e Steinberg (2008) e a representação do delta de Dirac em Jauregui e Tsallis (2010).

A distribuição q -Gaussiana vista em Tsallis et al. (1995), Tsallis et al. (1996) e Prato e Tsallis (1999) generaliza a Gaussiana (com $q = 1$) e também a distribuição de Cauchy-Lorentz (com $q = 2$). O teorema central do limite foi generalizado por Umarov, Tsallis e Steinberg (2008). Para uma leitura mais aprofundada, Tsallis (2009) é um livro recente e abrangente sobre a estatística não-extensiva com os fundamentos e aplicações em física, biologia, sistemas sociais e artificiais. Em Tsallis (2013) há uma bibliografia em constante atualização.

Para a aplicação da estatística não-extensiva na distribuição Weibull, o caminho natural é sua generalização com a q -exponencial feita em Picoli, Mendes e Malacarne (2003) com aplicações na distribuição de frequências para diferentes sistemas. A primeira utilização da distribuição q -Weibull em análise de confiabilidade parece ter sido apresentada em Costa et al. (2006), onde a distribuição foi usada para modelar o tempo até falhar por ruptura dielétrica de óxidos ultrafinos em dispositivos eletrônicos.

Esta seção tem o objetivo de introduzir o modelo para taxa de falha e analisar as suas principais propriedades. A distribuição q -Weibull reproduz vários tipos de comportamento de taxa de falha: monótona decrescente, constante, monótona crescente, unimodal e em formato da curva da banheira, sempre com quatro parâmetros. A seção 3.2 introduz o modelo, a seção 3.3 mostra algumas de suas características e a seção 3.4 apresenta algumas conclusões.

3.2 Taxa de falha da distribuição q -Weibull

O modelo q -Weibull é obtido a partir do modelo Weibull (Equação 3.1.1) por meio da substituição da função exponencial pela q -exponencial. Em Costa et al. (2006) são mostrados mais detalhes sobre esta substituição. Ainda na Equação 3.1.1, t_0 é o parâmetro de localização ou vida mínima, ou seja, é um valor de tempo abaixo do qual não são previstas falhas. Desta forma a função densidade de probabilidade da q -Weibull é definida por:

$$f_q(t) = (2 - q) \frac{\beta}{\eta - t_0} \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right], \quad (3.2.1)$$

onde $\beta > 0$, $\eta - t_0 > 0$ e $t - t_0 \geq 0$. O fator $(2 - q)$ e a restrição $q < 2$ são necessários para garantir a normalização de $f_q(t)$. Fazendo o limite $q \rightarrow 1$, a função densidade de probabilidade q -Weibull torna-se a Weibull e pode ser escrita, daqui em diante, como $f_1(t)$. O valor $\eta - t_0$ é conhecido como θ , o parâmetro de escala da distribuição.

A q -Weibull é também uma generalização da distribuição Burr XII, descrita em Burr (1942),

$$f(t) = ck \frac{t^{c-1}}{s^c} \left[1 + \left(\frac{t}{s} \right)^c \right]^{-k-1} \quad (k > 0, c > 0, s > 0), \quad (3.2.2)$$

se os parâmetros da q -Weibull forem tomados como $\beta = c$, $\eta = s/(k + 1)^{1/c}$, $q = (k + 2)/(k + 1) > 1$ e $t_0 = 0$. É válido ressaltar que a q -Weibull é uma generalização de Burr XII e não o contrário, como afirmado por Nadarajah e Kotz (2006), uma vez que a Equação 3.2.2 pressupõe $q > 1$ enquanto que a Equação 3.2.1 também está definida para $q \leq 1$.

A função confiabilidade da q -Weibull é definida por:

$$\begin{aligned} R_q(t) &= \int_t^\infty f_q(t') dt' \\ &= \left[1 - (1 - q) \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right]_{2^{-q}}^{\frac{2-q}{1-q}} \\ &= \left[\exp_q \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] \right]_{2^{-q}}^{\frac{2-q}{1-q}}, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

onde foi usada a propriedade da q -exponencial:

$$\int \exp_q(ax) dx = \frac{1}{(2-q)a} [\exp_q(ax)]^{2-q}. \quad (3.2.4)$$

Note que $(\exp_q x)^a \neq \exp_q(ax)$ para $q \neq 1$, entretanto

$$(\exp_q x)^a = \exp_{1-(1-q)/a}(ax) \quad \forall q. \quad (3.2.5)$$

Logo, a Equação 3.2.3 pode ser reescrita como:

$$R_q(t) = \exp_{q'} \left[-(2-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right], \quad (3.2.6)$$

onde $q' = 1/(2-q)$. Mais propriedades da q -exponencial podem ser encontradas em Yamano (2002).

A função acumulada $F_q(t)$ é o complemento da função confiabilidade e é definida por:

$$F_q(t) = 1 - R_q(t). \quad (3.2.7)$$

A função taxa de falha é:

$$h_q(t) \equiv \frac{f_q(t)}{R_q(t)}, \quad (3.2.8)$$

e fica escrita como:

$$\begin{aligned} h_q(t) &= \frac{(2-q)\beta}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \left[1 - (1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]^{-1} \\ &= \frac{(2-q)\beta}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \left[\exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right]^{q-1}, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Tomando-se o limite $q \rightarrow 1$, resulta na taxa de falha da Weibull:

$$h_1(t) = \frac{\beta}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1}. \quad (3.2.10)$$

Comparando a Equação 3.2.9 com a Equação 3.2.10, nota-se a diferença dos comportamentos entre a q -Weibull e a Weibull. A integral de uma função exponencial é uma exponencial multiplicada por uma constante; estas se cancelam na Equação 3.2.8, enquanto, devido à propriedade descrita pela Equação 3.2.4, não ocorre cancelamento de q -exponenciais.

A Equação 3.2.9 é capaz de representar quatro diferentes tipos de comportamento a depender dos valores dos parâmetros. $h_q(t)$ é monótona decrescente para $1 \leq q < 2$ e $0 < \beta < 1$, é monótona crescente para $q \leq 1$ e $\beta > 1$, unimodal para $1 < q < 2$ e $\beta > 1$ e tem formato de curva da banheira (*bathtub curve* ou *u-shaped curve*) para $q < 1$ e $0 < \beta < 1$. É claro que a função também reproduz a taxa de falha constante para $q = 1$ e $\beta = 1$. A Figura 3.2.1 mostra estas possibilidades.

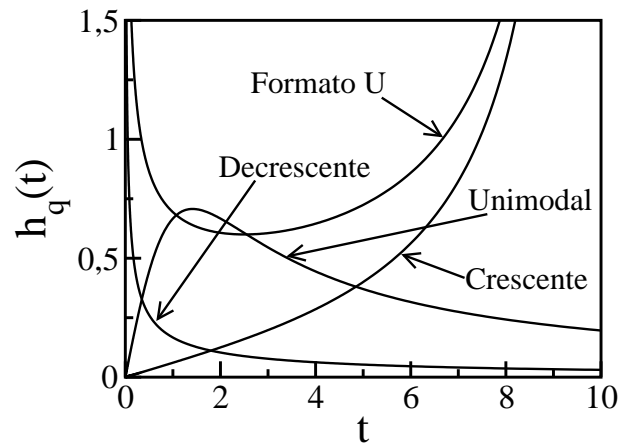


Figura 3.2.1: Quatro diferentes tipos de comportamento da função taxa de falha.

Os valores dos parâmetros foram escolhidos para uma boa visualização das curvas na mesma figura. Os quatro tipos são:

- a) monótona decrescente: $q = 1,5$, $\beta = 0,5$, $\eta = 1$ e $t_0 = 0$;
- b) monótona crescente: $q = 0,5$, $\beta = 2$, $\eta = 7,071$ (calculado pela Equação 3.2.11 com $t_{\max} = 10$) e $t_0 = 0$;
- c) unimodal: $q = 1,5$, $\beta = 2$, $\eta = 1$ e $t_0 = 0$;
- d) curva da banheira: $q = 0,5$, $\beta = 0,5$, $\eta = 2,5$ (calculado pela Equação 3.2.11 com $t_{\max} = 10$) e $t_0 = 0$.

Para $q < 1$ a Equação 3.2.9 apresenta uma divergência no máximo valor permitido de tempo (final do tempo de vida) em (vide A.2)

$$t_{\max} = t_0 + (\eta - t_0)(1 - q)^{-1/\beta}. \quad (3.2.11)$$

A derivada temporal da taxa de falha é dada por (detalhe da dedução em A.1.7)

$$h'_q(t) = \frac{(2-q)\beta(\beta-1)}{(\eta-t_0)^2} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-2} \frac{\left[1 - \left(\frac{1-q}{1-\beta}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta\right]}{\left[1 - (1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta\right]_+^2}. \quad (3.2.12)$$

Um tempo máximo finito corresponde à relaxação da restrição usualmente imposta para função taxa de falha acumulada

$$H_q(t) = \int_0^t h_q(t) dt, \quad (3.2.13)$$

conforme Pham e Lai (2007). Espera-se normalmente que $H_1 \rightarrow \infty$ em $t \rightarrow \infty$, mas de acordo com o modelo q-Weibull $\lim_{t \rightarrow t_{max}} H_q < 1(t) = \infty$ e $\lim_{q \rightarrow 1^-} t_{max} = \infty$.

Para o tipo unimodal ($1 < q < 2$ e $\beta > 1$) e também para o tipo curva da banheira ($q < 1$ e $0 < \beta < 1$), a raiz da Equação 3.2.12 é

$$t^* = t_0 + (\eta - t_0) \left(\frac{1-\beta}{1-q}\right)^{1/\beta}, \quad (3.2.14)$$

que corresponde ao extremo, máximo para unimodal e mínimo para curva da banheira

$$h_q(t^*) = \frac{2-q}{\eta-t_0} \left(\frac{1-\beta}{1-q}\right)^{(\beta-1)/\beta}. \quad (3.2.15)$$

A Figura 3.2.2 ilustra a mudança de sinal da derivada da taxa de falha.

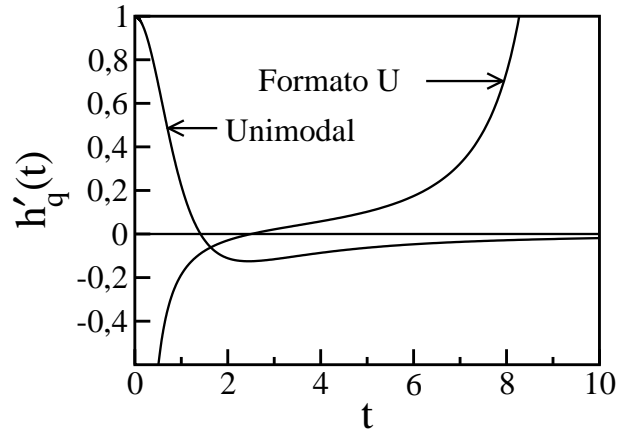


Figura 3.2.2: Derivadas temporais da taxa de falha da distribuição q -Weibull.

Observe que as curvas $h_{q'}(t)$ são traçadas com a Equação 3.2.12, fazendo $q = 0,5$, $\beta = 0,5$, $\eta = 2,5$ e $t_0 = 0$ (curva da banheira ou em formato de “U”) e $q = 1,5$, $\beta = 2$, $\eta = 1$ e $t_0 = 0$ (curva unimodal). Os parâmetros são os mesmos mostrados na Figura 3.2.1. A mudança do sinal de $h_{q'}(t)$ é a responsável pela descrição completa da curva da banheira.

A derivada temporal da taxa de falha Weibull ($q = 1$) é uma lei de potência monótona

$$h'_1(t) = \frac{\beta(\beta - 1)}{(\eta - t_0)^2} \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^{\beta-2}. \quad (3.2.16)$$

A Equação 3.2.16 é incapaz de representar a curva da banheira completa. $h'_1(t) < 0$ para $0 < \beta < 1$ e esta situação descreve apenas a fase de amaciamento. A fase de desgaste ocorre para $h'_1(t) > 0$, que na Weibull usual ocorre com $\beta > 1$. A descrição da fase de falha aleatória durante a vida útil ocorre com $\beta = 1$. A função taxa de falha dada pela q -Weibull reproduz a curva da banheira completa por meio de uma função contínua, com o mesmo conjunto de parâmetros e sem a necessidade de introduzir hipóteses *ad hoc*.

3.3 Comportamento da função densidade de probabilidade q -Weibull

Nesta seção são mostrados os momentos da distribuição q -Weibull, a análise da influência dos parâmetros e duas formas adimensionais da distribuição. O parâmetro t_0 da distribuição q -Weibull, tem o papel de ajustar melhor o modelo para tempos iniciais. A vida mínima t_0 é o valor de tempo mínimo em que uma falha pode ocorrer. Este parâmetro

tem a mesma interpretação na distribuição Weibull e estará presente nas formulações a seguir embora seja considerado nulo nos exemplos numéricos, sem perda da generalização adotada.

3.3.1 Momentos da distribuição q -Weibull

Para calcular os momentos em torno de zero, $\mu'_n = \int_0^\infty t^n f_q(t) dt$, da Equação 3.2.1, são considerados separadamente os casos $q > 1$ e $q < 1$ (vide seções A.3 e A.4 para detalhes das deduções). Para o caso $q < 1$ considere a representação integral da q -exponencial apresentada por Lenzi, Mendes e Rajagopal (1999):

$$\exp_q(-x) = \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} e^{-(1-q)(1+iu)x} du, \quad (3.3.1)$$

proveniente da mudança de variáveis da equação 8.315.2 de Gradshteyn, Ryzhik e Jeffrey (1994) e para o caso $q > 1$ a q -exponencial pode ser representada segundo Tsallis (1994a), também em Gradshteyn, Ryzhik e Jeffrey (1994), equações 8.310 1 e 8.312 2 por

$$\exp_q(-x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^\infty u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} e^{-(q-1)xu} du \quad (q > 1, x > 0). \quad (3.3.2)$$

Os cálculos resultam para $q < 1$ em

$$\mu'_n = \eta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{(1-q)^{n/\beta} \Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q} + \frac{n}{\beta}\right)}, \quad t_0 = 0, \quad (3.3.3)$$

e

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{(1-q)^{j/\beta} \Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q} + \frac{j}{\beta}\right)} \right\}, \quad t_0 \neq 0, \quad (3.3.4)$$

e para $q > 1$ em

$$\mu'_n = \eta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1} - \frac{n}{\beta}\right)}{(q-1)^{n/\beta} \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}, \quad t_0 = 0, \quad (3.3.5)$$

e

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1} - \frac{j}{\beta}\right)}{(q-1)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \right\} \quad t_0 \neq 0, \quad (3.3.6)$$

com $1 < q < q_{upper}$ e $q_{upper} = 1 + \beta/(n + \beta)$. Note que, para $q \rightarrow 1$, ambos os momentos ficam $\mu'_n = \eta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right)$, $t_0 = 0$ e $\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \right\}$, $t_0 \neq 0$ que são os momentos da Weibull. O limite superior q_{upper} tem seu comportamento delimitado por: $\lim_{\beta \rightarrow 0} q_{upper} = 1$, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} q_{upper} = 2$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} q_{upper} = 1$.

O último limite significa que a distribuição q -Weibull não possui todos os momentos para $q > 1$, embora todos os momentos estejam definidos para $q < 1$. Uma vez que q tem o seu valor máximo limitado por q_{upper} (função de n para β constante), a q -Weibull perde os momentos mais altos, o que não se constitui num problema mas uma característica da distribuição. Existem muitas distribuições que não possuem todos os momentos. A Cauchy-Lorentz por exemplo não possui média, variância ou momentos mais altos. A distribuição q -Weibull tem a normalização preservada para qualquer $q < 2$, ou seja, $\mu'_0 = 1$. A Weibull usual possui todos os momentos, algo típico para distribuições com decaimento exponencial.

Os momentos em torno da média, também conhecidos como momentos centrais, são calculados usando a transformação binomial dos momentos em torno do zero

$$\mu_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \mu'_k (\mu'_1)^{n-k}, \quad t_0 = 0, \quad (3.3.7)$$

e para $t_0 \neq 0$

$$\mu_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} (t_0 - \mu'_1)^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1} - \frac{j}{\beta}\right)}{(q-1)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \right\}, \quad 1 < q < 1 + \frac{\beta}{\beta+n}, \quad (3.3.8)$$

e

$$\mu_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} (t_0 - \mu'_1)^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q} + \frac{j}{\beta}\right)} \right\}, \quad q < 1. \quad (3.3.9)$$

A mediana da q -Weibull é (veja A.7)

$$\text{Md} = t_0 + (\eta - t_0) \left(\frac{\ln_{\frac{1}{2-q}} 0.5}{q - 2} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad (3.3.10)$$

e a moda é (dedução em A.8)

$$\text{Mo} = t_0 + (\eta - t_0) \left[\frac{\beta - 1}{\beta + (\beta - 1)(1 - q)} \right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad \beta > 1. \quad (3.3.11)$$

3.3.2 Influência do parâmetro η

Na distribuição Weibull, o parâmetro η é conhecido como vida característica e pode ser interpretado, por meio da Equação 3.2.7, fazendo $q = 1$, como o valor de tempo $t = \eta$ para o qual se espera que 63,2% da população falhe. Para o modelo generalizado ($q \neq 1$) o valor $F_q(\eta)$ não é constante, mas depende de q conforme mostra a Figura 3.3.1. Nota-se que a condição de corte na definição da Equação 3.1.2 impõe zero para a q -exponencial se $1 - (1 - q) \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \leq 0$, assim, 100% de falha é alcançado em $t = t_{\max} = t_0 + (\eta - t_0)(1 - q)^{-\frac{1}{\beta}}$.

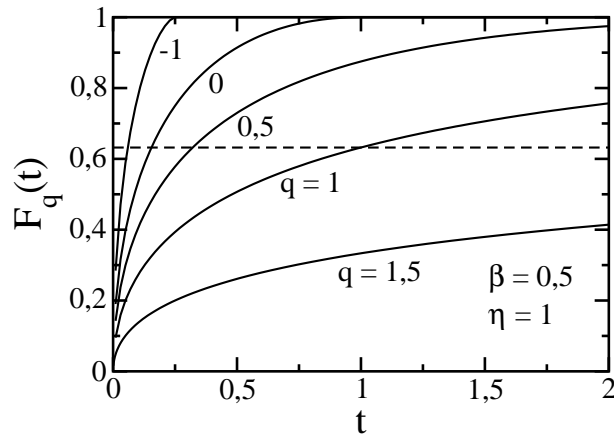


Figura 3.3.1: Falha acumulada para diferentes valores de q .

Todas as curvas foram calculadas com $\beta = 0,5$, $\eta = 1$ e $t_0 = 0$. A Weibull usual ($q = 1$) corresponde a $F_1(\eta) \approx 0,632$ (linha horizontal tracejada). Note que $F_{q>1}(\eta) < F_1(\eta)$ e $F_{q<1}(\eta) > F_1(\eta)$. Devido à condição de corte na definição da q -exponencial, 100% das falhas são alcançadas para um valor finito de tempo se $q < 1$, diferentemente da Weibull usual na qual $F_1(t)$ assintoticamente alcança 1 para $t \rightarrow \infty$. Particularmente tem-se $F_0(\eta) = 1$.

É possível definir uma vida característica generalizada η_q para manter a interpretação estatística, isto é, $F_q(\eta_q) = 1 - e^{-1} \approx 63,2\%$, $\forall q, \forall \beta$ e da Equação 3.2.7 vem (detalhes

em A.5)

$$\eta_q = t_0 + (\eta - t_0) \left(-\ln_q e^{\frac{1}{q-2}} \right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (3.3.12)$$

Tomando a inversa da q -exponencial (Equação 3.1.2) que é o q -logaritmo ((2.4.3)), detalhes em Tsallis (1994b) ,

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad x > 0, \quad (3.3.13)$$

e $\ln_1 x = \ln x$ e $\ln_q(1/x) = -x^{q-1} \ln_q x$, a Equação 3.3.12 é reescrita como

$$\eta_q = t_0 + (\eta - t_0) \left(e^{(2-q)(1-q)} \ln_q e^{2-q} \right)^{1/\beta}. \quad (3.3.14)$$

Os limites do comportamento de η_q são $\lim_{q \rightarrow -\infty} \eta_q = t_0$, $\lim_{q \rightarrow 1} \eta_q = \eta$ e $\lim_{q \rightarrow 2} \eta_q = \infty, \forall \beta$.

3.3.3 Análise de t_{max}

A função taxa de falha q -Weibull com $q < 1$ e $\beta < 1$ apresenta um tempo máximo de vida t_{max} (Equação 3.2.11) exibido pela Figura 3.3.2 como uma função de β para diferentes valores de q . Se $0 < q < 1$, t_{max} decresce com β , enquanto que se $q < 0$, t_{max} aumenta com β . No limite superior $\beta = 1$, $t_{max} = t_0 + (\eta - t_0) / (1 - q)$ e no limite $\beta \rightarrow 0$, $t_{max} \rightarrow \infty$ se $0 < q < 1$ e $t_{max} = t_0$ se $q < 0$.

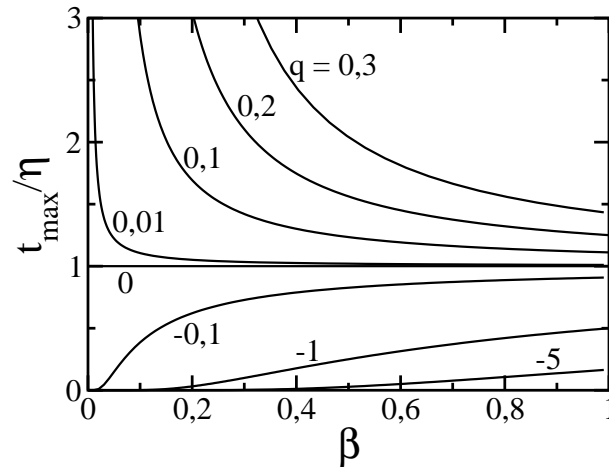


Figura 3.3.2: Tempo máximo de vida t_{max} com $t_0 = 0$ (dividido por η , pois t_{max} se torna proporcional a η) como função de β para diferentes valores de $q < 1$ (indicados).

Valores mais altos de q não são mostrados apenas para melhor visualização. De forma similar à Weibull usual que não apresenta tempo de vida máximo tem-se $t_{max} \rightarrow \infty$ para $q \rightarrow 1^-$. No limite $q \rightarrow -\infty$, t_{max} coincide com a abscissa ($t_{max} \rightarrow 0$). Ocorre convergência não uniforme para $q = 0$ a $\beta = 0$: $\lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 0} (t_{max}/\eta) = 1$, enquanto que $\lim_{q \rightarrow 0^+} \lim_{\beta \rightarrow 0} (t_{max}/\eta) = \infty$ e $\lim_{q \rightarrow 0^-} \lim_{\beta \rightarrow 0} (t_{max}/\eta) = 0$.

3.3.4 Influência do parâmetro β

Uma vez que $\exp_q(0) = 1 \forall q$, para pequenos valores de tempo ($t \ll \eta$) e $t_0 = 0$, a Equação 3.2.9 se torna $h_q(t) \approx (2 - q)(\beta/\eta)(t/\eta)^{\beta-1}$. Assim o parâmetro β controla o decaimento da lei de potência da fase de amaciamento para o tipo da curva da banheira (inclinação no painel central da Figura 3.3.3).

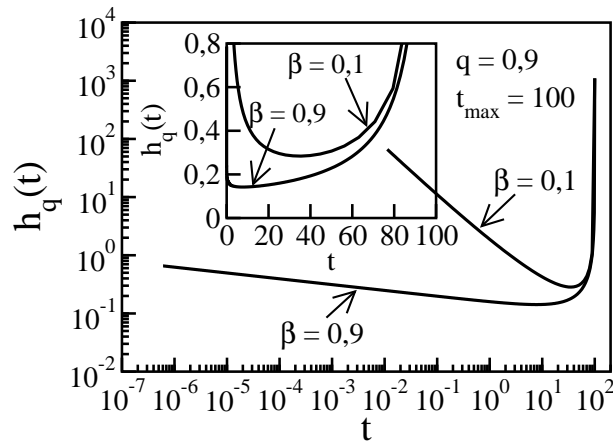


Figura 3.3.3: Efeito de β em $h_q(t)$.

As curvas da banheira foram calculadas com $q = 0,9$, $t_{max} = 100$ e $t_0 = 0$, assim $\eta = t_{max}(1 - q)^{1/\beta}$ e $\eta = 10^{-8}$ para $\beta = 0,1$ e $\eta = 7,7426$ para $\beta = 0,9$. A inclinação na fase de amaciamento em escala log-log é $\beta - 1$.

Para $\beta > 1$ ocorre $h_{q < 1}(0) = 0$, e a função taxa de falha é monótona crescente. A Figura 3.3.4 ilustra o comportamento da taxa de falha para $q = 0,9$ e diferentes valores de β , mostrando o comando de β na lei de potência para pequenos valores de tempo.

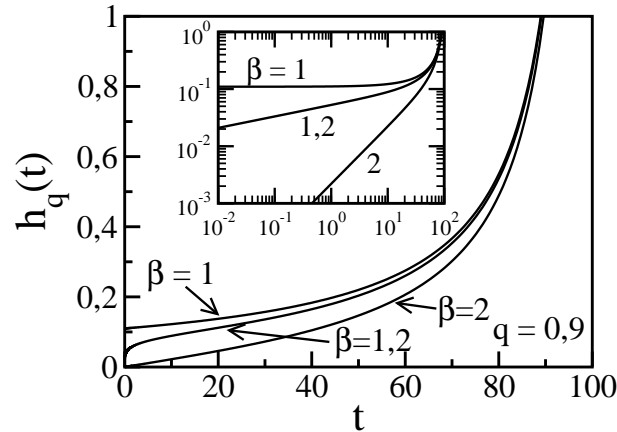


Figura 3.3.4: Taxa de falha da q -Weibull dada pela Equação 3.2.9, com $q = 0,9$.

O parâmetro η foi calculado pela Equação 3.2.11 de sorte que $t_{max} = 100$ e $t_0 = 0$ para todas as curvas: $\eta = 10; 14,68; 31,62$ para $\beta = 1; 1,2; 2$ respectivamente. O detalhe mostra as mesmas curvas em um gráfico log-log exibindo o comportamento da lei de potência para pequenos valores de tempo (a inclinação da fase de amaciamento em escala log-log é $\beta - 1$).

Para $\beta > 1$, $h_{q>1}(t)$ reproduz a curva unimodal de taxa de falha exemplificada na Figura 3.3.5 para $q = 1,5$.

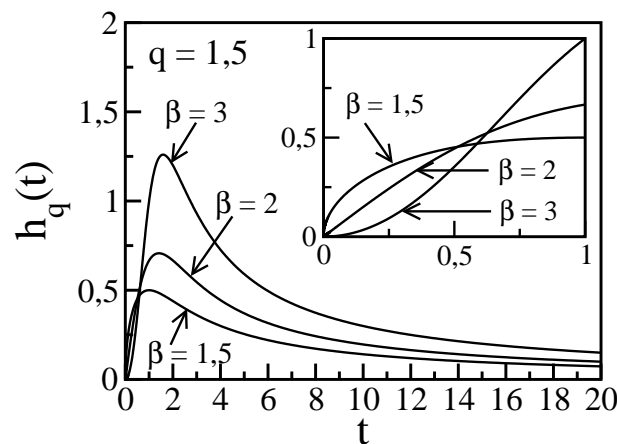


Figura 3.3.5: Taxa de falha da q -Weibull dada pela Equação 3.2.9, com $q = 1,5$, $\eta = 1$ e $t_0 = 0$.

$h_q(t)$ mostra o comportamento unimodal para $1 < q < 2$ e $\beta > 1$. O valor máximo de $h_q(t)$ aumenta com β . O inserto mostra um detalhe para pequenos valores de tempo (região de taxa de falha crescente). Para valores pequenos de tempo, $1 < \beta < 2$ corresponde à concavidade negativa em $h_q(t)$ e $\beta > 2$ corresponde à concavidade positiva. $h_q(t)$ tem crescimento linear para $\beta = 2$ e $t/\eta \ll 1$.

A razão entre t^* (Equação 3.2.14) e o tempo de vida máximo t_{max} (Equação 3.2.11), para o caso da curva da banheira com $t_0 = 0$, depende apenas de β :

$$\frac{t^*}{t_{max}} = (1 - \beta)^{1/\beta}, \quad (3.3.15)$$

t^*/t_{max} varia de 0 (para $\beta \rightarrow 1$) até $e^{-1} \approx 0,367879$ (para $\beta \rightarrow 0$).

3.3.5 Influência do parâmetro q

Para demonstrar o efeito do parâmetro $q < 1$ na q -Weibull, considere por exemplo $\beta = 0,5$ e $t_0 = 0$. Primeiramente mantenha o parâmetro η constante ($\eta = 1$). A distribuição Weibull não apresenta um tempo limite ($t_{max} = \infty$). Uma vez que o parâmetro q varia de uma unidade para valores menores, o tempo máximo de vida t_{max} assume valores cada vez menores conforme visto na Figura 3.3.6. Posteriormente mantenha t_{max} constante (por exemplo $\beta = 0,5$ e $t_{max} = 100$), assim η é calculado pela Equação 3.2.11. A Figura 3.3.7 mostra curvas para diferentes valores de q . À medida que o parâmetro q se aproxima de uma unidade, o trecho de falha aleatória (taxa de falha praticamente constante) estreita e o mínimo valor da taxa da falha aumenta. Particularmente $\lim_{q \rightarrow 1^-} h_q(t^*) \rightarrow \infty$. O mínimo valor de $h_q(t^*)$ é encontrado por $\lim_{\beta \rightarrow 1} \lim_{q \rightarrow -\infty} h_q(t^*) = 1/t_{max}$.

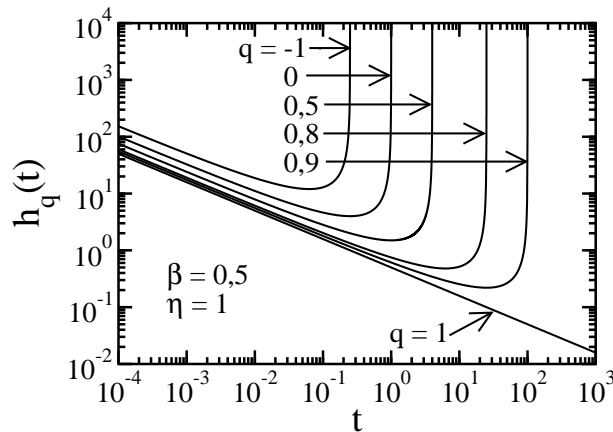


Figura 3.3.6: Taxa de falha q -Weibull em função do tempo para diferentes valores de $q < 1$ em escala log-log. Todas as curvas foram calculadas com $\beta = 0,5$, $\eta = 1$ e $t_0 = 0$. O tempo máximo de vida varia de $t = \infty$ para $q = 1$ até valores menores e finitos à medida de o parâmetro q decresce a partir de uma unidade.

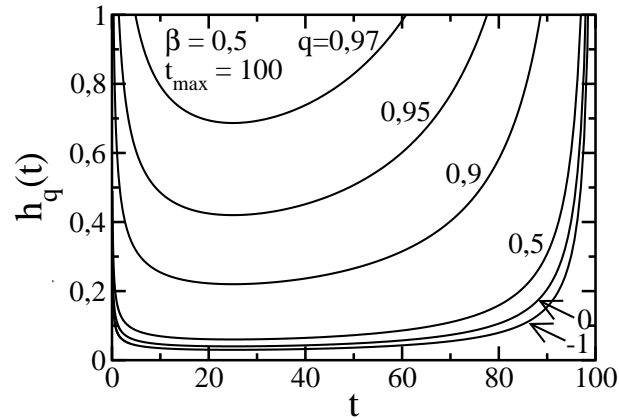


Figura 3.3.7: Taxa de falha q -Weibull em função do tempo para diferentes valores de $q < 1$.

Todas as curvas foram calculadas com $\beta = 0,5$, $t_{max} = 100$ e $t_0 = 0$, assim o parâmetro η foi calculado pela Equação 3.2.11: $\eta = 0,09; 0,25; 1; 25; 100; 400$ correspondentes a $q = 0,97; 0,95; 0,9; 0,5; 0; -1$ respectivamente. À medida que o parâmetro q se aproxima da unidade, o trecho de falha praticamente constante se torna mais estreito e o mínimo valor da taxa de falha $h_q(t^*)$ aumenta $h_q(t^*) \rightarrow \infty$ para $q \rightarrow 1$. À medida que $q \rightarrow -\infty$, as curvas tendem a um limite inferior (para este exemplo onde $\beta = 0,5$ e $t_{max} = 100$, ocorre $h_q(t^*) = 0,02$ pela Equação 3.2.15).

A influência de q para o caso unimodal ($1 < q < 2$ e $\beta > 1$) pode ser vista na Figura 3.3.8. Para $1 < q < 2$ e $0 < \beta < 1$ a taxa de falha q -Weibull é uma função monótona decrescente. A Figura 3.3.9 mostra exemplos.

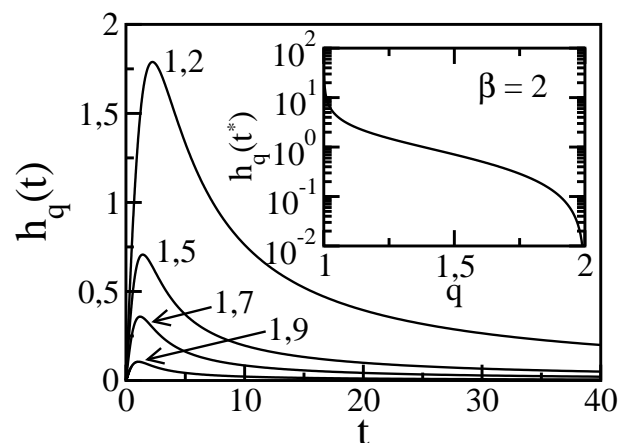


Figura 3.3.8: Taxa de falha da q -Weibull para o caso unimodal, com $\beta = 2$, $\eta = 1$ e $t_0 = 0$ para diferentes valores de $q > 1$ (indicados). O detalhe mostra a expressão do máximo da taxa de falha como função de q (Equação 3.2.15).

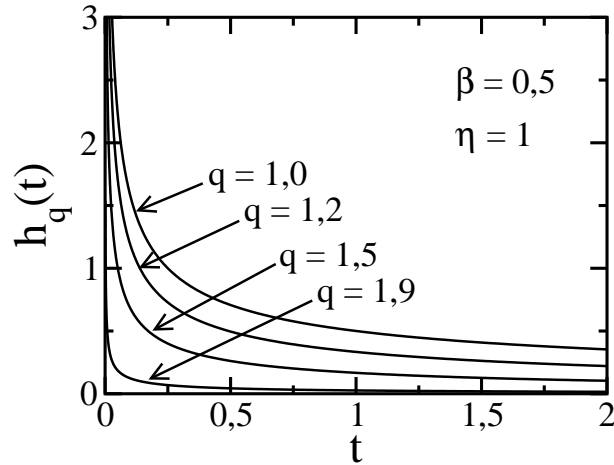


Figura 3.3.9: Taxa de falha da q -Weibull dada pela Equação 3.2.9, com $\beta = 0,5$, $\eta = 1$, $t_0 = 0$ e diferentes valores de $q > 1$. $h_q(t)$ é uma função monótona decrescente para $1 < q < 2$ e $0 < \beta < 1$.

3.3.6 Equações adimensionais

Embora não seja comum, é interessante analisar a função taxa de falha na forma adimensional. É conveniente definir a adimensionalidade temporal diferentemente para o caso unimodal, no qual o tempo é ilimitado e para o caso curva da banheira no qual o tempo é limitado a t_{max} . Para taxa de falha unimodal ($1 < q < 2$ e $\beta > 1$), a adimensionalidade ao tempo é definida como

$$\tau_u \equiv \frac{t}{t^*} = \frac{t}{\eta} \left(\frac{1-q}{1-\beta} \right)^{(\beta-1)/\beta}, \quad (3.3.16)$$

onde o índice u denota ilimitado (do inglês *unlimited*). Para o caso da curva da banheira ($q < 1$ e $0 < \beta < 1$), a adimensionalidade é definida como

$$\tau_l \equiv \frac{t}{t_{max}} = \frac{t}{\eta} (1-q)^{1/\beta}, \quad (3.3.17)$$

onde o índice l denota limitado.

Em ambos os casos a taxa de falha adimensional

$$\gamma(\tau) \equiv h_q(t)/h_q(t^*), \quad (3.3.18)$$

é normalizada pelo seu valor extremo conforme a Equação 3.2.15, sendo o máximo para a unimodal e o mínimo para a curva da banheira. τ sem índice denota ambos τ_u e τ_l . Note que $h_q(t)$ tem dimensão inversa do tempo.

Para o caso unimodal, a taxa de falha é reescrita como

$$\gamma(\tau_u) = \frac{\beta \tau_u^{\beta-1}}{1 + (\beta - 1) \tau_u^{\beta}}, \quad (3.3.19)$$

com $\beta > 1$, $0 < \tau_u < \infty$, $0 \leq \gamma(\tau_u) \leq 1$ ($\gamma(0) = \gamma(\infty) = 0$). Para a curva da banheira a taxa de falha é reescrita como

$$\gamma(\tau_l) = (1 - \beta)^{(1-\beta)/\beta} \frac{\beta \tau_l^{\beta-1}}{1 - \tau_l^{\beta}}, \quad (3.3.20)$$

com $0 < \beta < 1$, $0 < \tau_l < 1$, $\gamma(\tau_l) \geq 1$. Em ambos os casos a dependência dos parâmetros q e η é absorvida pela adimensionalidade ao tempo devido à escala adotada e a taxa de falha adimensional depende apenas de β e τ . O índice q desta vez é desnecessário e apenas usa-se γ e não γ_q . Os comportamentos de $\gamma(\tau_u)$ e $\gamma(\tau_l)$ são mostrados na Figura 3.3.10 e na Figura 3.3.11 respectivamente.

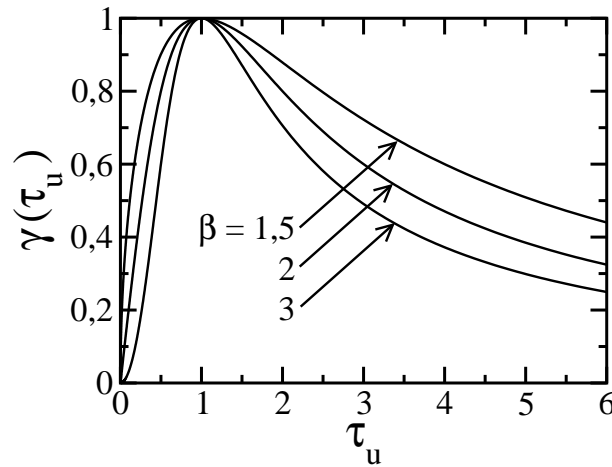


Figura 3.3.10: Taxa de falha unimodal adimensional $\gamma(\tau_u) \equiv h_q(t)/h_q(t^*)$ (Equação 3.3.19), para diferentes valores de $\beta > 1$. O tempo adimensional ilimitado τ_u é definido pela Equação 3.3.16.

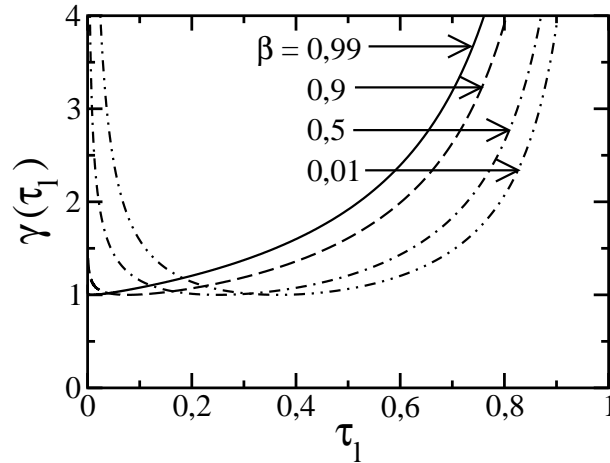


Figura 3.3.11: Taxa de falha adimensional com formato de banheira $\gamma(\tau_1) \equiv h_q(t)/h_q(t^*)$ (Equação 3.3.20 para diferentes valores de $0 < \beta < 1$). O tempo adimensional limitado τ_1 é definido pela Equação 3.3.17.

Note, na Figura 3.3.11, que a fase de amaciamento para $\beta \rightarrow 1$ é praticamente uma linha vertical superposta ao eixo das ordenadas. O mínimo de $\gamma(\tau_1)$ ocorre em τ^* dado pela Equação 3.3.15 e é deslocada de 0 (para $\beta \rightarrow 1$) até $1/e$ (para $\beta \rightarrow 0$). Todas as curvas da Figura 3.3.6 (vários valores de q e $\eta = 1$) se reduzem a uma única curva adimensional com $\beta = 0,5$.

3.4 Conclusões

Vários modelos para taxa de falha são encontrados na literatura, muitos deles usam a distribuição Weibull (ou similares) como base. Estas distribuições têm em comum a natureza exponencial e alguns são muito complicados, com muitos parâmetros introduzidos empiricamente. A generalização q -Weibull proposta usa uma função que é exponencial apenas em uma situação limite e é capaz de representar leis de potência assintóticas. Este modelo é capaz de descrever quatro tipos de comportamento de taxa de falha denominados monótono decrescente, monótono crescente, unimodal e curva da banheira, sempre com apenas três parâmetros e representa a unificação de vários modelos incluindo a versátil distribuição Burr XII. A Tabela 3.1 sumariza as possibilidades com as correspondentes faixas de parâmetros.

Tabela 3.1: Comportamento da taxa de falha q -Weibull de acordo com valores dos parâmetros q e β .

	$0 < \beta < 1$	$\beta = 1$	$\beta > 1$
$q < 1$	Curva da banheira (Figura 3.3.7)	Monótona crescente (Figura 3.3.4)	Monótona crescente (Figura 3.3.4)
$q = 1$	Monótona decrescente (Figura 3.3.9)	Constante	Monótona crescente (Figura 3.3.4)
$1 < q < 2$	Monótona decrescente (Figura 3.3.9)	Monótona decrescente (Figura 3.3.9)	Unimodal (Figura 3.3.5)

A Weibull usual é incapaz de representar a curva da banheira completa, pois $h_1(t)$ é monótona decrescente, monótona crescente ou estacionária, dependendo do valor de β . A modelagem da curva da banheira com a Weibull requer a montagem descontínua de funções com $\beta < 1$ para a fase de amaciamento, $\beta = 1$ para a fase intermediária de falha aleatória e $\beta > 1$ para a fase de desgaste. A q -Weibull reproduz a curva da banheira inteira de forma contínua com o mesmo conjunto de parâmetros e sem a necessidade de introduzir hipóteses adicionais. Não foi detectado nenhum registro anterior a este trabalho que tenha alcançado a representação da curva da banheira com a distribuição q -Weibull. Este modelo permite avaliar a confiabilidade, e por consequência a não-confiabilidade, o MTBF (tempo médio entre falhas), a moda, a mediana, os momentos e demais valores característicos da distribuição, considerando o ciclo de vida completo do item em estudo.

Uma vez que a taxa de falha da distribuição q -Weibull não é monótona, é possível realizar uma abordagem que considera num único modelo dois ou três modos de falha predominantes simultaneamente (veja Capítulo 4).

A distribuição q -Weibull é uma extensão natural da Weibull usual e sua definição é inspirada na estatística não-extensiva. A introdução de generalizações adicionais de forma empírica ou teórica, tais como o uso de transformações linear e não-linear do tempo, o uso de múltiplas distribuições, parâmetros dependentes do tempo dentre outras, tal como foi feito com a Weibull, podem futuramente aumentar a flexibilidade e a precisão da q -Weibull e abrir novas oportunidades para os profissionais de engenharia de confiabilidade. O Capítulo 5 mostra distribuições q -Weibull associadas no formalismo de portas lógicas para obter modelos com uma grande variedade de formatos de taxa de falha como exemplos.

4 Análise comparativa das distribuições generalizadas q -Weibull e q -exponencial aplicadas à engenharia de confiabilidade

4.1 Introdução

A modelagem de confiabilidade é um dos passos mais importantes para a avaliação da confiabilidade, disponibilidade, manutenibilidade e segurança (CDMS). Existem muitas distribuições estatísticas que podem modelar tempos de vida, contudo para alguns sistemas, as distribuições estatísticas clássicas não são satisfatórias porque suas taxas de falha são monótonas. As distribuições estatísticas generalizadas recentemente desenvolvidas de acordo com a mecânica estatística não extensiva são conhecidas como q -distribuições. Estas distribuições generalizadas têm sido aplicadas com sucesso em várias ciências. Este capítulo apresenta as q -distribuições com o objetivo de melhorar a modelagem de problemas de engenharia de confiabilidade. Primeiramente mostraremos duas funções deduzidas para analisar tempos de vida usando as distribuições q -Weibull e q -exponencial. Posteriormente, estas distribuições são aplicadas para descrever tempos de vida de quatro exemplos. Os resultados mostram que as q -distribuições se ajustam melhor aos dados e proporcionam uma flexibilidade extra às curvas de taxa de falha.

O principal foco deste capítulo¹ é comparar por meio de exemplos práticos, quatro modelos de tempos de vida. Os modelos utilizados são os usuais exponencial e Weibull e suas versões generalizadas, q -exponencial e q -Weibull. A metodologia utilizada é a aplicação dos modelos a exemplos práticos (equipamentos de poços de petróleo e uma estação de solda), com estimação dos parâmetros por meio do método de mínimos quadrados e utilização do Critério de Informação Akaike (AIC). A mesma metodologia pode ser aplicada a outros sistemas como por exemplo o mercado de ações. A seção B.1 mostra a utilização da distribuição q -Weibull para modelar os tempos entre valores extremos de índices da bolsa de valores da Espanha.

¹Alguns resultados obtidos neste capítulo foram publicados em Assis, Borges e Melo (2013) e em Sartori et al. (2009).

Os tempos de vida das bombas de fundo, hastes de bombeio e da estação de solda apresentam três comportamentos de taxa de falha distintos: decrescente, constante e crescente, perfazendo por completo a curva da banheira. A distribuição q -Weibull descreve, com apenas um conjunto de parâmetros, toda a curva encontrada. A tubulação de produção apresenta tempos de vida com comportamento unimodal em sua taxa de falha. A simplicidade e a flexibilidade de utilização do modelo q -Weibull trazem benefícios que ultrapassam o inconveniente de possuir um parâmetros a mais. As propriedades da distribuição q -Weibull, como por exemplo, momentos, não confiabilidade e confiabilidade, taxa de falha e análises das influências de parâmetros foram apresentadas no Capítulo 3.

4.2 Distribuições de tempos de vida

Algumas distribuições estatísticas tendem a representar melhor os tempos de vida e por isso são chamadas de distribuições de tempos de vida. Uma distribuição de tempos de vida mostra como os itens falham no tempo ou como suas falhas estão distribuídas no tempo. Tais distribuições são exatamente como qualquer outra distribuição estatística exceto pelo fato dos dados envolvidos serem tempo até a falha ou tempos de vida. Uma distribuição de tempos de vida é conhecida quando um ajuste é realizado e seus parâmetros são estimados.

4.2.1 Distribuições q -Weibull e q -exponencial

A função não confiabilidade de q -Weibull pode ser definida a partir da Equação 3.2.7 como

$$F_q(t) = 1 - \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{t-t_0}{\theta} \right)^\beta \right], \quad (4.2.1)$$

onde $\beta > 0$, $t > t_0$, $q < 2$ e $\theta > 0$ é fator de escala ($\theta = \eta - t_0$).

O caso particular $\beta = 1$ aplicado na Equação 4.2.1 retorna a função não confiabilidade da distribuição q -exponencial

$$F_q(t) = 1 - \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{t-t_0}{\theta} \right) \right]. \quad (4.2.2)$$

De maneira similar a Equação 4.2.1, é necessário que $q < 2$ a fim de que a Equação 4.2.2 seja normalizável.

A Equação 4.2.1) com os parâmetros $q < 2$ e $\beta > 0$ é a generalização de três modelos: Weibull (com $\beta > 0$ e $q = 1$), q -exponencial (com $\beta = 1$ e $q \neq 1$), e exponencial (com $\beta = 1$ e $q = 1$). Os quatro modelos (incluindo o q -Weibull) são comparados nos exemplos apresentados na seção 4.4.

4.2.2 Taxa de falha das distribuições

A taxa de falha da distribuição q -Weibull é definida pela Equação 3.2.9. O comportamento da taxa de falha da q -Weibull pode ser muito diferente do caso particular h_1 (taxa de falha da Weibull). Podem ser descritos quatro formatos diferentes da função taxa de falha $h_q(t)$:

- a) monótona decrescente para $1 < q < 2$ e $0 < \beta < 1$;
- b) monótona crescente para $q < 1$ e $\beta > 1$;
- c) unimodal para $1 < q < 2$ e $\beta > 1$;
- d) curva da banheira para $q < 1$ e $0 < \beta < 1$.

A taxa de falha constante é obtida para $q = 1$ e $\beta = 1$. Os formatos c) e d) não podem ser reproduzidos com a função taxa de falha Weibull ($q = 1$). No Capítulo 3 há uma análise detalhada da função taxa de falha q -Weibull.

Uma vez que consegue representar todo o ciclo de vida funcional de um item, cobrindo as fases de amaciamento, vida útil e envelhecimento, a distribuição q -Weibull se aproxima mais das recomendações de gestão de recursos das normas *British Standards Institution's* (BSI) PAS 55-1:2008 e PAS 55-2:2008. Tais normas buscam a integração de todos os aspectos do ciclo de vida do ativo, a partir do reconhecimento da necessidade de projeto, aquisição, operação manutenção, renovação, alteração, até o descarte final.

Um caso particular da Equação 3.2.9 é a função taxa de falha da distribuição q -exponencial, obtida com $\beta = 1$. A taxa de falha da distribuição exponencial é encontrada atribuindo $q = 1$ e $\beta = 1$ e é dada por

$$\lambda = \frac{1}{\theta}. \quad (4.2.3)$$

4.2.3 Estimação de parâmetros

Levando em conta que o q -logaritmo (veja Equação 2.4.3) é a função inversa da q -exponencial, a Equação 4.2.1 é escrita como $y = \beta x + b$, com $y = \ln \left\{ -\ln_{\frac{1}{2-q}} [1 - F_q(t)] \right\}$,

$$x = \ln(t - t_0) \text{ e } b = -\beta \ln \left[\frac{\theta}{(2-q)^{\frac{1}{\beta}}} \right].$$

Os dados amostrais são tempos até a falha organizados em ordem crescente e os valores de não confiabilidade são estimados usando a aproximação de Bernard do *median rank* fornecida em Johnson (1951)

$$\hat{F}_i = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}, \quad (4.2.4)$$

onde n é o tamanho da amostra, i é o número de ordem da falha variando de 1 até n . O *median rank* é o valor de probabilidade de falha para cada experimento de sorte que, quando são realizados n destes experimentos estatisticamente independentes, a probabilidade de ocorrerem i ou mais falhas é 50%, ou seja, é solução de $P(X \geq n) = 0,5$ na variável p dentro do contexto de uma variável de distribuição binomial $X \sim B(n, p)$. O *median rank* também poderia ser generalizado para o contexto de q -funções a fim representar situações em que a aproximação de Bernard se torne inadequada.

Para cada amostra de tempo t_i nós temos

$$x_i = \ln(t_i - t_0) \quad (4.2.5)$$

e

$$y_i = \ln \left[-\ln_{\frac{1}{2-q}}(1 - \hat{F}_i) \right]. \quad (4.2.6)$$

Uma maneira alternativa de calcular \hat{F}_i é considerá-la como a soma das frequências relativas de ocorrência de falha nos intervalos de tempo anteriores. Este procedimento é adequado para um grande número de amostras e é utilizado na seção 4.4.

Os parâmetros da Equação 4.2.1 são estimados pela maximização do coeficiente de determinação R^2 ,

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}_i]^2}{\sum_{i=1}^n [y_i - \bar{y}]^2}, \quad (4.2.7)$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} \beta > 0 \\ \theta > 0 \\ t_0 < t_{min} \\ q < 2, \end{cases} \quad (4.2.8)$$

onde \hat{y}_i é $\ln \left\{ -\ln \frac{1}{2-q} [1 - F_q(t_i)] \right\}$, \bar{y}_i é $\frac{\sum y_i}{n}$ e t_{min} é o menor tempo amostral.

A Equação 4.2.7 retorna $R^2 \leq 1$, incluindo valores negativos. Note que os parâmetros da distribuição Weibull podem ser determinados pela maximização de R^2 com a restrição adicional $q = 1$. O mesmo procedimento é também válido para os outros dois modelos generalizados pelo modelo q -Weibull, com as restrições adicionais mencionadas na subseção 4.2.1. Como critério adicional da qualidade do ajuste, foi calculado o erro quadrático médio, $EQM = \sum [F_q(t_i) - \hat{F}_i]^2 / n$. De maneira geral, quanto menor o EQM maior a qualidade do ajuste. O método da máxima verossimilhança não foi utilizado por apresentar dificuldades de convergência.

O Critério de Informação Akaike (AIC) é um índice que pode auxiliar na comparação de modelos com diferentes números de parâmetros. AIC é definido por (Akaike (1974))

$$AIC = n \ln \left(\frac{RSS}{n} \right) + 2K, \quad (4.2.9)$$

onde n é o número de pontos experimentais (x_i, y_i) , RSS é a soma dos quadrados dos resíduos e K é o número de parâmetros do modelo. Supõe-se que o melhor modelo seja aquele que possui o menor AIC. O AIC requer uma correção quando o número de pontos experimentais é pequeno (*bias-correction*). Para detalhes veja Hurvich e Tsai (1989).

$$AIC_c = n \ln \left(\frac{RSS}{n} \right) + 2K + \frac{2K(K+1)}{n-K-1}. \quad (4.2.10)$$

A diferença entre cada AIC_c e o menor AIC_c é Δ_i :

$$\Delta_i = AIC_{c_i} - \min [AIC_c], \quad (4.2.11)$$

onde $\min [AIC_c]$ é o menor AIC_c . O melhor modelo é aquele em que $\Delta_i = 0$ e o pior modelo possui o maior Δ_i .

4.3 Aplicação em equipamentos de poços de petróleo

A flexibilidade da distribuição q -Weibull pode ser observada pela comparação com o modelo Weibull de três parâmetros, quando aplicada a três exemplos extraídos de equipamentos de poços de petróleo.

Bombas de fundo 1 3/4" X 11'

A Tabela apresenta tempos até a falha (em dias) de bombas de petróleo.

Tabela 4.1: Tempo até falhar (em dias) de bombas de petróleo em ordem crescente

Tempos até a falha (em dias) de bombas de petróleo						
8	38	42	59	71	146	184
185	199	204	214	379	457	457
494	515	568	680	684	808	964

O ajuste da distribuição q -Weibull apresenta $\beta < 1$ e $q < 1$, conforme mostra a Tabela 4.2. O formato da função taxa de falha para esta combinação de resultados é a curva da banheira. O ajuste da distribuição Weibull indica uma taxa de falha levemente crescente ($\beta > 1$). O coeficiente de determinação R^2 do ajuste da distribuição q -Weibull é levemente superior ao da Weibull, da mesma forma que a q -Weibull tem um erro quadrático médio menor. Estas diferenças são indícios de que a distribuição q -Weibull se ajusta melhor aos tempos de vida que a Weibull.

Tabela 4.2: Parâmetros das distribuições q -Weibull e Weibull dos tempos de vida de bombas de fundo.

	β	θ (dias)	η (dias)	t_0 (dias)	q	R^2	EQM
Weibull	1,05	391	383	-7,66	1,00	0,9761	$2,16 \times 10^{-3}$
q -Weibull	0,82	1 277	1 277	-0,51	0,00	0,9815	$1,59 \times 10^{-3}$

As curvas das duas distribuições se afastam na medida em que o tempo aumenta. Fica evidente que para valores de tempo maiores a q -Weibull consegue se aproximar mais das amostras, ao passo que, a Weibull se afasta destes por apresentar decaimento menos acentuado. Esta característica da q -Weibull a torna mais flexível e permite modelar os formatos de “U” e unimodal. A Figura 4.3.1 mostra, para ambos os modelos, as curvas de confiabilidade e de taxa de falha das bombas.

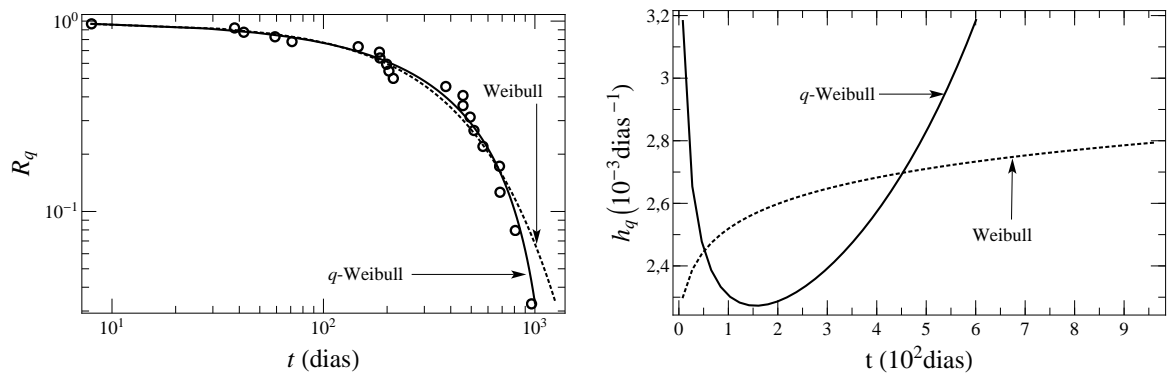


Figura 4.3.1: Modelos Weibull (linha tracejada) e q -Weibull (linha contínua). Dados experimentais (circunferências). Painel esquerdo: gráfico log-log das curvas de confiabilidade. Painel direito: curvas de taxa de falha. As abscissas mostram os tempos até a falha das bombas.

Hastes de bombeio

Na Tabela 4.3, 1 448 tempos até a falha de hastes de bombeio foram agrupados em 20 intervalos de tempo e a frequência relativa de ocorrência foi usada para estimar a não confiabilidade para cada intervalo.

Tabela 4.3: Tempo até falhar de hastes de bombeio (em dias).

i	Intervalos de tempo	Falhas	i	Intervalos de tempo	Falhas
1	1 $\leq t \leq$ 93,1	625	11	922 $< t \leq$ 1014,1	8
2	93,1 $< t \leq$ 185,2	320	12	1014,1 $< t \leq$ 1106,2	4
3	185,2 $< t \leq$ 277,3	170	13	1106,2 $< t \leq$ 1198,3	4
4	277,3 $< t \leq$ 369,4	65	14	1198,3 $< t \leq$ 1290,4	4
5	369,4 $< t \leq$ 461,5	65	15	1290,4 $< t \leq$ 1382,5	8
6	461,5 $< t \leq$ 553,6	67	16	1382,5 $< t \leq$ 1474,6	4
7	553,6 $< t \leq$ 645,7	12	17	1474,6 $< t \leq$ 1566,7	1
8	645,7 $< t \leq$ 737,8	33	18	1566,7 $< t \leq$ 1658,8	1
9	737,8 $< t \leq$ 829,9	33	19	1658,8 $< t \leq$ 1750,9	1
10	829,9 $< t \leq$ 922	22	20	1750,9 $< t \leq$ 1843	1

Os parâmetros das distribuições são mostrados na Tabela 4.4 e indicam que o ajuste do modelo q -Weibull, cuja taxa de falha tem o formato de curva da banheira, tem qualidade levemente superior a do modelo Weibull (de taxa de falha decrescente). O modelo q -Weibull tem um coeficiente de determinação um pouco maior e um erro quadrático médio bastante menor.

Tabela 4.4: Parâmetros dos ajustes dos tempos de vida das hastes de bombeio.

	β	θ (dias)	η (dias)	t_0 (dias)	q	R^2	EQM
Weibull	0,95	251	195	-56	1,00	0,9904	$2,05 \times 10^{-4}$
q -Weibull	0,42	462	520	59	0,46	0,9981	$2,74 \times 10^{-5}$

A Figura 4.3.2, no seu painel esquerdo, mostra as curvas e os dados amostrais. A distribuição q -Weibull se aproxima mais amostras na maior parte dos valores de tempo e especialmente em tempos superiores. O painel direito da mesma figura mostra as curvas de taxa de falha com formato de “U” (q -Weibull) e decrescente (para Weibull).

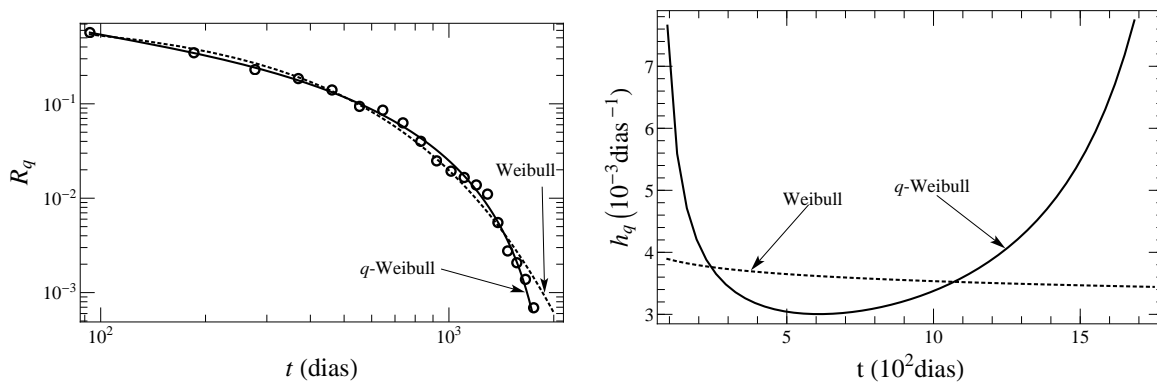


Figura 4.3.2: O modelo Weibull está em linha tracejada e q -Weibull em linha contínua. Os dados experimentais estão representados por circunferências. Painel esquerdo: gráfico log-log das curvas de confiabilidade. Painel direito: curvas de taxa de falha. As abscissas mostram os tempos até a falha de hastes de bombeio.

Tubulação de produção

A Tabela 4.5 mostra 115 valores de tempo diferentes (as repetições foram excluídas a fim de reduzir o tamanho da tabela). Todos os 438 valores amostrais foram usados para estimar a não confiabilidade por meio do *median rank*.

Tabela 4.5: Tempo até falhar de tubulação de produção (em dias).

Tempo em dias até a falha de tubulação de produção (repetições entre parênteses)											
1(2)	4(2)	6(10)	7(8)	8(7)	9(2)	10(3)	12(2)	14(4)	15(2)	17(9)	19(8)
20(3)	22(3)	23(3)	24(5)	25(1)	26(10)	27(5)	29(6)	30(5)	31(2)	32(1)	34(3)
35(5)	36(12)	38(16)	41(2)	42(3)	43(11)	44(2)	46(2)	47(5)	48(3)	51(2)	53(6)
55(6)	56(3)	60(2)	61(4)	63(9)	64(8)	65(6)	68(2)	69(3)	70(4)	73(6)	74(3)
75(2)	78(3)	79(3)	80(2)	81(4)	82(2)	83(4)	86(4)	87(4)	88(2)	89(6)	91(5)
92(3)	93(4)	94(3)	101(4)	106(3)	107(2)	108(3)	111(4)	117(3)	119(3)	121(3)	123(3)
124(3)	126(3)	133(4)	136(2)	142(3)	143(1)	148(2)	150(2)	154(2)	157(3)	161(4)	163(2)
167(3)	168(2)	170(5)	172(3)	177(2)	178(4)	185(4)	189(3)	194(3)	203(3)	207(6)	210(4)
219(3)	220(3)	222(3)	226(3)	227(2)	233(3)	234(3)	238(3)	245(3)	248(4)	265(2)	277(3)
347(4)	393(2)	425(3)	432(4)	488(2)	688(2)	691(3)					

A Tabela 4.6 mostra os valores dos parâmetros dos ajustes, o coeficiente de determinação R^2 e o erro quadrático médio (EQM). Desta vez a taxa de falha da distribuição q -Weibull tem formato unimodal ($\beta > 1$ e $q > 1$), ao passo que, o modelo Weibull tem taxa de falha crescente ($\beta > 1$). A distribuição q -Weibull apresentou um coeficiente de determinação maior e um menor erro médio quadrático.

Tabela 4.6: Parâmetros dos ajustes dos tempos até falhar de tubulação de produção.

	β	θ (dias)	η (dias)	t_0 (dias)	q	R^2	EQM
Weibull	1,12	105	105	0,61	1,00	0,9818	$5,81 \times 10^{-4}$
q -Weibull	1,31	65	65	0,24	1,30	0,9900	$2,52 \times 10^{-4}$

A Figura 4.3.3 mostra as curvas de confiabilidade no painel esquerdo. Note que para valores elevados de tempo, o modelo q -Weibull se aproxima muito mais das amostras que o Weibull. No painel direito da mesma figura estão as curvas de taxa de falha.

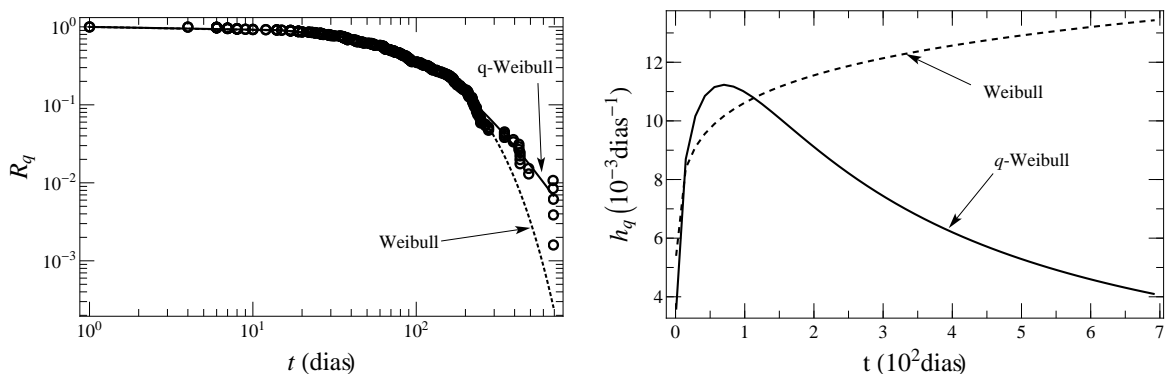


Figura 4.3.3: Modelos Weibull e q -Weibull em linhas tracejada e contínua, dados experimentais em circunferências. Painel esquerdo: gráfico log-log das curvas de confiabilidade. Painel direito: curvas de taxa falha. Tempos até a falha de tubulação de produção mostrados nas abscissas.

4.4 Aplicação em estação de solda robotizada

Esta seção compara o ajuste das quatro distribuições: q -Weibull, Weibull, q -exponencial e exponencial considerando os tempos de operação de uma estação de solda robotizada. Em Sartori et al. (2009), os modelos Weibull e q -Weibull foram comparados quanto à qualidade de ajuste a dados de tempo de operação de uma planta de processamento de gás natural.

Foram considerados aproximadamente 1250 tempos de operação (em minutos) de uma estação de solda robotizada usada em processo de manufatura. Os tempos de vida foram agrupados em 50 intervalos e a probabilidade de falha foi calculada para cada intervalo como a frequência relativa de ocorrência. Foram testados quatro modelos para este sistema: (a) distribuição exponencial; (b) distribuição Weibull; (c) distribuição q -exponencial e (d) distribuição q -Weibull. A Figura 4.4.1 mostra a variável y (obtida pela Equação 4.2.6) em função de $\ln(t - t_0)$ para cada modelo. A principal vantagem desta representação é que os pontos amostrais ficam dispostos numa linha reta se forem perfeitamente descritos pelo modelo.

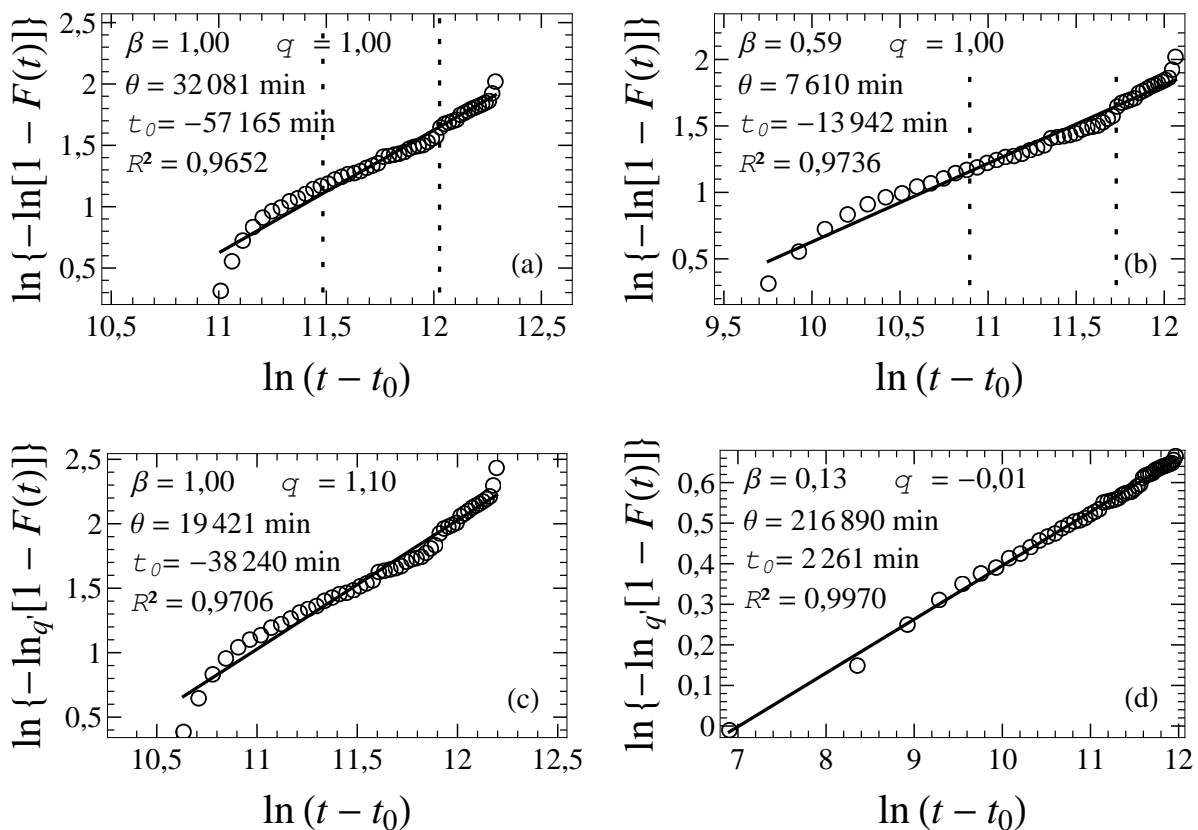


Figura 4.4.1: Gráficos de tempos até a falha (circunferências) e curvas ajustadas (linhas contínuas) dos modelos: (a) exponencial, (b) Weibull, (c) q -exponencial e (d) q -Weibull.

Os parâmetros calculados estão indicados. As linhas verticais nos painéis (a) e (b) são exemplos de valores limites de tempo ($t = 40\,000$ min e $t = 110\,000$ min) que separam três comportamentos diferentes de falha. A Figura 4.4.4 ilustra melhor esta divisão. Uma vez que cada modelo tem um valor diferente para o parâmetro t_0 , as escalas das abscissas são diferentes para cada gráfico.

(a) distribuição exponencial. Hipóteses compatíveis para esta distribuição: itens não reparáveis, modo de falha único e taxa de falha constante. Embora o coeficiente de determinação $R^2 = 0.9652$ indique uma boa qualidade de ajuste, a simplificação de taxa de falha constante é muito restritiva e não corresponde aos dados, como ficará claro a seguir. Os dados incluem todos os modos de falha e não há garantia de que a combinação de todos eles produzam taxa de falha constante. Outra maneira de observar esta limitação é considerar que o sistema possui vários modos de falha e todos eles com taxas de falha constantes. Ainda assim, a taxa de falha do sistema não é constante de acordo com a teoria de confiabilidade de sistema (para mais detalhes veja Lewis (1987))

(b) distribuição Weibull. Se a hipótese de falha constante assumida em (a) for relaxada para um comportamento monótono, então pode ser utilizado o modelo Weibull (com $\beta \neq 1$, $q = 1$). Este modelo pode descrever taxas de falha com decrescimento monótono (para $0 < \beta < 1$) ou crescimento monótono (para $\beta > 1$). Obviamente o caso particular $\beta = 1$ se reduz ao item (a). A Figura 4.4.1(b) mostra os resultados. O ajuste da distribuição Weibull tem coeficiente de determinação R^2 um pouco maior do que o da distribuição exponencial ($R^2 = 0.9736$). O valor calculado do parâmetro $\beta < 1$ indica que a taxa de falha para este exemplo deveria ser monotonicamente decrescente, contudo será mostrado na próxima seção que isto não é verdade. Este resultado se deve à limitação do modelo (b) imposta aos dados.

(c) distribuição q -exponencial . A generalização de (a) é obtida com a distribuição q -exponencial ($\beta = 1$, $q \neq 1$). É válido mencionar que a distribuição q -exponencial não se restringe à taxa de falha constante como no caso (a). Esta pode ser monótona decrescente ($1 < q < 2$) ou monótona crescente ($q < 1$). Os resultados são mostrados na Figura 4.4.1(c).

(d) distribuição q -Weibull. Este é o modelo mais geral que será considerado e apresenta taxa de falha não monótona. A inspeção visual da Figura 4.4.1(d) indica que a qualidade deste ajuste é maior do que as das análises anteriores e o coeficiente de determinação maior do que 0,99 confirma isto.

A Figura 4.4.2 apresenta a confiabilidade $R_q(t)$ em função do tempo para cada um dos quatro modelos (a)–(d). Note que a distribuição q -Weibull é capaz de descrever toda a variação de valores de tempo, enquanto que as outras distribuições se afastam dos pontos

experimentais para valores de tempo iniciais e finais.

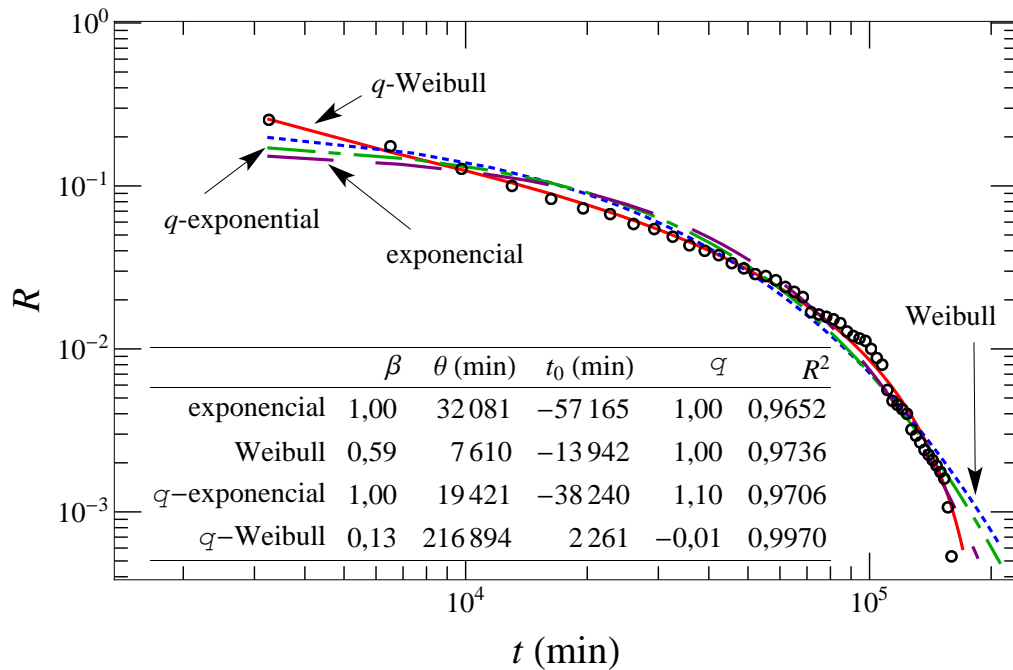


Figura 4.4.2: Gráfico do tempo até a falha (circunferências) e função confiabilidade calculada pelos modelos: exponencial (linha tracejada violeta), Weibull (linha pontilhada azul), q -exponencial (linha traço-ponto verde) e q -Weibull (linha contínua vermelha). A tabela em detalhe apresenta os parâmetros.

A Figura 4.4.1(b) não apresenta uma mudança abrupta na inclinação dos dados amostrais (*dog-leg*), que é típica quando ocorre a mistura de modos de falha, mas este é o caso para este exemplo, como pode ser visto com este procedimento: todos os 1250 tempos até a falha foram divididos em três grupos e um modelo Weibull ($q = 1$) foi ajustado para cada grupo. Para $t \leq 40\,000$ min, foi obtido $\beta < 1$ que corresponde a uma taxa de falha decrescente. Para a região intermediária $40\,000 \text{ min} < t \leq 110\,000$ min, foi encontrado $\beta \approx 1$, que significa taxa de falha constante, e a última região, $t > 110\,000$ min, teve $\beta > 1$, que corresponde a uma taxa de falha crescente. A Figura 4.4.3 mostra estes resultados. O limites de tempo 40 000 min e 110 000 min foram encontrados por meio da realização de testes com diferentes valores e foram escolhidos aqueles que resultaram nos melhores ajustes nos painéis da Figura 4.4.3.

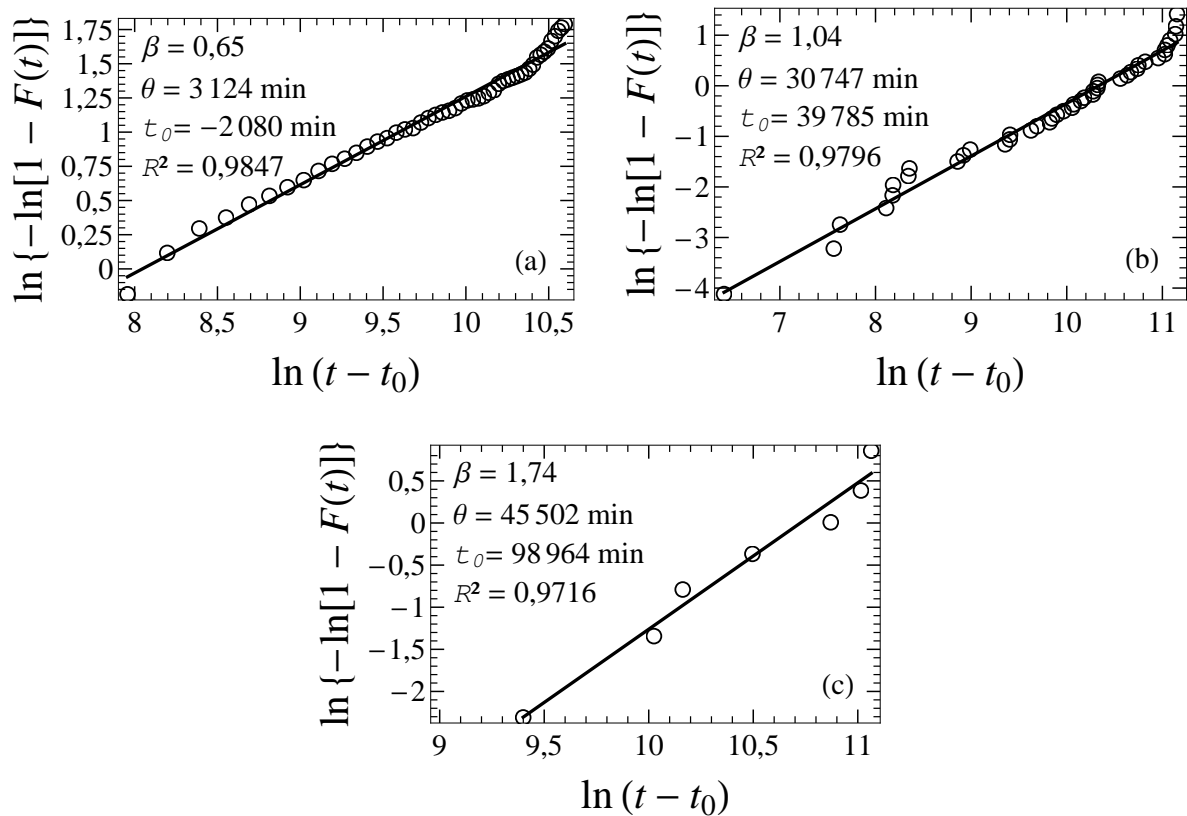


Figura 4.4.3: Exemplos de ajustes Weibull para amostras agrupadas pelo tempo até a falha: (a) tempo até a falha $\leq 40\,000$ min.; (b) $40\,000 <$ tempo até a falha $\leq 110\,000$ min, e (c) tempo até a falha $> 110\,000$ min.

A taxa de falha é decrescente em (a) ($\beta < 1$), praticamente constante em (b) ($\beta \approx 1$) e crescente em (c) ($\beta > 1$). As probabilidades de falha são estimadas por: (a) frequência relativa da ocorrência de falha; (b) e (c) *median rank*.

As curvas de taxa de falha são mostradas na Figura 4.4.4. Estas curvas são feitas com todos os dados, sem dividi-los nas três regiões mencionadas anteriormente. Fica evidente que os modelos exponencial, Weibull e q -exponencial são incapazes de reproduzir os três comportamentos detectados com um único conjunto de parâmetros enquanto que o modelo q -Weibull apresenta as regiões de taxa de falha decrescente, aproximadamente constante e finalmente crescente. As linhas verticais, que também aparecem nas Figuras 4.4.1(a) e 4.4.1(b), separam estes três comportamentos distintos.

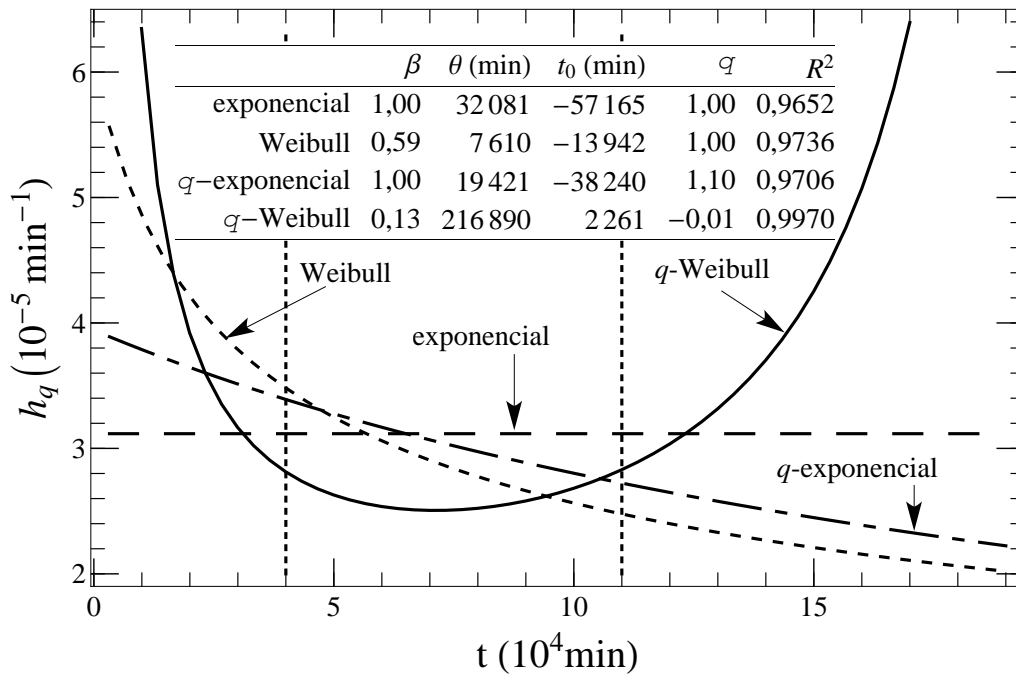


Figura 4.4.4: Curvas de taxa de falha calculadas pelos modelos: exponencial (linha tracejada), Weibull (linha pontilhada), q -exponencial (linha traço-ponto) e q -Weibull (linha contínua). As linhas verticais indicam a separação dos tempos de vida em três regimes distintos. Os parâmetros são mostrados no detalhe.

A Tabela 4.7 apresenta o AIC_c (Critério de Informação Akaike corrigido) e os valores Δ_i para os ajustes. De acordo com os resultados o modelo q -Weibull é o que se ajusta melhor possuindo o menor Δ_i .

Tabela 4.7: AIC_c (Critério de Informação Akaike corrigido) e Δ_i para os modelos.

Modelo	AIC_c	Δ_i
q -exponencial	-246,17	226.32
exponencial	-258,96	213.53
Weibull	-270,32	202.17
q -Weibull	-472,49	0

4.5 Conclusões

Os modelos Weibull e q -Weibull foram comparados por meio de três exemplos de equipamentos de poços de petróleo, que apresentaram comportamentos diferentes: taxa de falha em formato de banheira e em formato unimodal. Estes dois formatos não podem ser representados pela distribuição Weibull com um conjunto de parâmetros, de forma

contínua. As Figuras 4.3.1 e 4.3.2 mostram que a principal diferença no traçado do modelo q -Weibull é a queda mais íngreme para valores de tempo elevados. Esta característica faz deste modelo o mais apropriado para tais exemplos.

Para os ajustes da estação de solda robotizada foram comparados quatro modelos que descrevem o tempo de vida, sendo dois deles as versões generalizadas q -Weibull e q -exponencial das distribuições usuais Weibull e exponencial (casos particulares nos quais $q = 1$). As generalizações são baseadas na função q -exponencial. A aproximação do *median rank* e o método dos mínimos quadrados foram usados para estimar os parâmetros dos modelos para dois exemplos. Os resultados mostram que as q -distribuições são muito mais flexíveis para descrever formatos da função taxa de falha. Estas q -distribuições possivelmente poderão ser usadas com sucesso em outros sistemas e melhorar a solução de problemas de engenharia de confiabilidade.

Dentre os modelos considerados, a distribuição q -Weibull foi a mais apropriada para a estação de solda. Esta foi capaz de identificar três comportamentos distintos da taxa de falha: decrescente, constante e crescente, com o mesmo conjunto de parâmetros. Estes comportamentos podem ser interpretados como três modos de falha predominantes, uma vez que, todos os modos de falha fizeram parte das amostras de tempo. Em um outro contexto, as três fases podem representar o trecho de mortalidade infantil, vida útil e envelhecimento de um item.

Foi considerado também o Critério de Informação Akaike como mais uma fonte de informação para mostrar que a distribuição q -Weibull é realmente o melhor modelo, dentre os considerados, para representar os dados da estação de solda. As q -distribuições podem ser usadas com sucesso em outros sistemas e melhorar a modelagem de confiabilidade em problemas de engenharia.

Estes resultados poderiam ser esperados devido à presença do parâmetro adicional q , mas é importante lembrar que a melhoria dos ajustes não é meramente quantitativa (como deveria ser devido à inclusão do parâmetro adicional), mas também qualitativa uma vez que a distribuição q -Weibull pode descrever os comportamentos de banheira e unimodal que são impossíveis de serem descritos pelo modelo Weibull com um simples conjunto de parâmetros.

O desempenho adequado da função de um componente requer a sua operação em conjunto com outros formando equipamentos, subsistemas e sistemas. O próximo capítulo trata destas associações entre componentes considerando a distribuição q -Weibull para modelar os tempos de vida.

5 q -Weibull aplicada a Árvore de Falha Dinâmica

5.1 Introdução

Árvores de Falha (AF) são estruturas que usam portões booleanos para representar o modo pelo qual a falha dos componentes produz a falha do sistema (Vesely et al. (1981)). As árvores de falha podem ser analisadas de diversas maneiras e também podem ser convertidas em outras metodologias a exemplo da sua conversão para Diagramas Binários de Decisão (DBD) (ver Jinglun e Quan (1998)). Uma árvore de falha pode ser convertida diretamente em uma Rede Bayesiana (RB) e as técnicas básicas de inferência de uma RB podem ser usadas para obter os parâmetros clássicos de uma Árvore de Falha (Bobbio et al. (2001)).

Árvores de falha dinâmicas (AFD) são extensões das AF que têm sido mais utilizadas atualmente devido a capacidade de modelar dependência entre os eventos de falha. As Árvores de falha dinâmicas proporcionam uma análise de falha que é aplicável tanto a sistemas tolerantes à falha quanto a sistemas não tolerantes. Sistemas tolerantes a falhas podem responder ativamente a falhas e erros. São programados para antecipar certos tipos de falhas e erros e incluir técnicas de detecção, de recuperação ou reconfiguração (Doyle e Dugan (1995)). Uma AFD usa os portões tradicionais OR, AND, e KofN presentes nas AF, mas incluem quatro outras portas: PAND, PDEP, WSP and SEQ. Estes portões acrescentam a possibilidade de modelar dependências tais como falhas em sequência, falhas que são desencadeadas por um gatilho e associação de componentes principal e sobressalentes.

Uma das principais diferenças entre AF e AFD é que nestas últimas, a sequência de ocorrência das falhas pode ser considerada. A modelagem matemática de sequencialidade pode ser feita de maneira exata ou por simulação dentre outros métodos. Long, Sato e Zhang (2000) aplicaram simulação de Monte Carlo em análise de falhas sequenciais comparando os resultados com o cálculo exato realizado por múltiplas integrações. Merle et al. (2010) definiram eventos como variáveis temporais, e com a criação de dois operadores temporais, modelaram as portas com prioridade. Uma AFD também é capaz de modelar as falhas de sistemas de proteção e segurança nos quais um equipamento pode falhar em operação ou em modo de espera. Cadeias de Markov (CM) foram usadas para

esta tarefa por Meshkat, Dugan e Andrews (2002). Para Bobbio et al. (2008), árvores de falha dinâmica possuem funcionalidade similar às Redes Bayesianas Dinâmicas sendo possível converter um problema tratado por um método em outro. Há ainda propostas de integração entre modelos como a árvore de falha generalizada de Codetta-Raiteri (2011), que engloba as árvores de falha paramétricas, dinâmicas e reparáveis.

Rauzy (2011) estendeu os trabalhos de Merle et al. (2010) introduzindo a álgebra das sequências que pode ser interpretada como a álgebra dos eventos básicos. Khakzad, Khan e Amyotte (2011) aplicam Redes Bayesianas em análise de segurança de sistemas comparando as RB com as Árvores de Falha.

Em resumo, a avaliação da confiabilidade e da segurança de um sistema considerando falhas sequenciais é uma questão importante nas indústrias, uma vez que a confiabilidade e a segurança de tais sistemas dependem, não só dos estados falhos dos componentes do sistema, mas também da sequência de ocorrência de tais falhas.

A utilização do modelo q -Weibull cuja natureza é capaz de modelar interações espaciais de longo alcance e/ou memória de longa duração, em conjunto com estruturas lógicas de AFD que consideram combinação e sequência de falhas em equipamentos ou componentes, pode possibilitar a predição de confiabilidade e taxa de falha de subsistemas ou sistemas de forma coerente com o arranjo funcional de seus componentes.

O principal foco deste capítulo é apresentar um método de confiabilidade de sistema baseado na distribuição q -Weibull calculando cada porta de uma AFD de forma exata e por simulação de Monte Carlo.

5.1.1 Modelagem q -Weibull

Associando-se cada componente a um conjunto de parâmetros ν , o i -ésimo componente tem seus parâmetros como

$$\nu = \{\beta_i, \eta_i, t_{0_i}, q_i\}. \quad (5.1.1)$$

A função densidade de probabilidade de cada componente é expressa por (veja Equação 3.2.1)

$$f_{q,i}(t) = \begin{cases} \frac{\beta_i(2-q_i)}{(\eta_i-t_{0_i})} \left(\frac{t-t_{0_i}}{\eta_i-t_{0_i}}\right)^{\beta_i-1} \exp_{q_i} \left[- \left(\frac{t-t_{0_i}}{\eta_i-t_{0_i}}\right)^{\beta_i} \right], & t \geq t_{0_i} \\ 0, & t < t_{0_i}, \end{cases} \quad (5.1.2)$$

a função não confiabilidade para cada componente é

$$F_{q,i}(t) = \begin{cases} 1 - \exp_{\frac{1}{2-q_i}} \left[- (2 - q_i) \left(\frac{t-t_{0_i}}{\eta_i - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right], & t \geq t_{0_i} \\ 0, & t < t_{0_i}, \end{cases} \quad (5.1.3)$$

ou utilizando a definição da Equação 3.1.2

$$F_{q,i}(t) = 1 - \left[1 + (q_i - 1) \left(\frac{[t - t_{0_i}]_+}{\eta_i - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right]_{+}^{\frac{2-q_i}{1-q_i}} \quad q_i \neq 1, \quad (5.1.4)$$

e a função confiabilidade de cada componente é

$$R_{q,i}(t) = \begin{cases} \exp_{\frac{1}{2-q_i}} \left[- (2 - q_i) \left(\frac{t-t_{0_i}}{\eta_i - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right], & t \geq t_{0_i} \\ 1, & t < t_{0_i}, \end{cases} \quad (5.1.5)$$

ou

$$R_{q,i}(t) = \left[1 + (q_i - 1) \left(\frac{[t - t_{0_i}]_+}{\eta_i - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right]_{+}^{\frac{2-q_i}{1-q_i}} \quad q_i \neq 1. \quad (5.1.6)$$

A função taxa de falha $h_{q,i}$ é

$$h_{q,i}(t) = \frac{f_{q,i}(t)}{R_{q,i}(t)}. \quad (5.1.7)$$

5.2 Portas das Árvores de Falha Dinâmicas

Árvores de Falha Dinâmicas (AFD) usam as portas AND, OR e KofN definidas para as Árvores de Falha (estáticas). Além das portas lógicas estáticas, as AFD conseguem modelar componentes sobressalentes, falhas que ocorrem apenas se as entradas falham em uma ordem específica, situações de dependência nas quais a falha de uma entrada provoca a falha em outra entrada e ainda configurações em que a falha só pode acontecer em uma ordem predefinida das entradas.

Esta seção apresenta o cálculo exato para a confiabilidade resultante de cada tipo

de porta de uma AFD e verifica tais valores com o resultado da simulação de Método de Monte Carlo (MC). O método de MC foi executado com a geração de 50.000 valores aleatórios para cada componente ou evento.

Seja X uma variável aleatória que denota tempo de funcionamento e segue a distribuição q -Weibull. A função inversa da não confiabilidade $F_q^{-1}(\bullet)$ é usada para calcular cada valor de tempo X correspondente a uma não confiabilidade gerada aleatoriamente U (veja Lemieux (2009)).

A aplicação de \ln_q em ambos os lados da Equação 4.2.1 resulta em

$$\ln_{\frac{1}{2-q_i}} [1 - F_{q,i}(t)] = \left[- (2 - q_i) \left(\frac{t - t_{0_i}}{\eta_i - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right], \quad (5.2.1)$$

que elevada ao termo $\frac{1}{\beta_i}$ fica

$$\left\{ \frac{\ln_{\frac{1}{2-q_i}} [1 - F_{q,i}(t)]}{q_i - 2} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}} = \frac{t - t_{0_i}}{\eta_i - t_{0_i}}. \quad (5.2.2)$$

Assim temos

$$t = t_{0_i} + (\eta_i - t_{0_i}) \left\{ \frac{\ln_{\frac{1}{2-q_i}} [1 - F_{q,i}(t)]}{q_i - 2} \right\}^{\frac{1}{\beta_i}}. \quad (5.2.3)$$

Assuma que U é uma variável aleatória entre 0 e 1 que segue a distribuição uniforme. Esta variável será associada ao valor da função não confiabilidade $F_{q,i}(t)$

$$U \sim U(0, 1). \quad (5.2.4)$$

Note que U e $1 - U$ são iguais e os tempos aleatórios são gerados por

$$X = F^{-1}(U) = t_{0_i} + (\eta_i - t_{0_i}) \left(\frac{\ln_{\frac{1}{2-q_i}} U}{q_i - 2} \right)^{\frac{1}{\beta_i}}, \quad (5.2.5)$$

ou utilizando a definição de \ln_q da Equação 2.4.3

$$X = F^{-1}(U) = t_{0_i} + (\eta_i - t_{0_i}) \begin{cases} \left(\frac{U^{\frac{1-q_i}{2-q_i}} - 1}{q_i - 1} \right)^{\frac{1}{\beta_i}}, & q \neq 1 \\ (-\ln U)^{\frac{1}{\beta_i}}, & q = 1 \end{cases}. \quad (5.2.6)$$

Foram criados 18 componentes hipotéticos cujos tempos de funcionamento seguem a distribuição q -Weibull conforme mostrado na Tabela 5.1. Estes componentes são as entradas das portas AND, OR, KofN, PDep PAnd e SEQ. A Tabela 5.2 mostra os parâmetros de outros 5 componentes hipotéticos utilizados nas portas WSP. O tempo limite máximo t_{lim} (veja Equação 3.2.11) é o tempo a partir do qual é certeza haver falha. $t_{lim}atv$ e $t_{lim}dor$ são estes tempos calculados para componentes em estado ativo e dormência. O termo dormência e o seu respectivo fator α são explicados na subseção 5.2.7.

Tabela 5.1: Parâmetros da q -Weibull dos componentes (C_1 a C_{18}), valores t_{lim} e formatos da função taxa de falha.

Componente	β	η (h)	t_0 (h)	q	α	t_{lim}	Formato
C_1	0,5	5000	0	1,2	1	∞	Decrescente
C_2	1	4000	0	1	1	∞	Constante
C_3	10	10000	0	0,5	1	10717,7	Crescente
C_4	2,5	2500	0	1,2	1	∞	Unimodal
C_5	0,5	4500	0	0,5	1	18000	Banheira
C_6	2,5	4500	0	1,2	1	∞	Unimodal
C_7	0,5	5000	0	0,6	1	31250	Banheira
C_8	2,5	3500	0	1,5	1	∞	Unimodal
C_9	0,5	4500	0	0,4	1	12500	Banheira
C_{10}	4	1500	0	1,5	1	∞	Unimodal
C_{11}	1	1000	0	1	1	∞	Constante
C_{12}	1	2000	0	1	1	∞	Constante
C_{13}	0,5	3500	0	0,5	1	14000	Banheira
C_{14}	10	10000	0	1	1	∞	Crescente
C_{15}	10	7000	0	1	1	∞	Crescente
C_{16}	1	10000	0	1	1	∞	Constante
C_{17}	1	600	0	1	1	∞	Constante
C_{18}	8	1500	0	1,5	1	∞	Unimodal

Tabela 5.2: Parâmetros da q -Weibull para os componentes das portas WSP, tempos $t_{lim}atv$ e $t_{lim}dor$ e formatos das curvas de taxa de falha.

Componente	β	η (h)	t_0 (h)	q	α	$t_{lim}atv$	$t_{lim}dor$	Formato
C_{20}	0,5	5000	0	1,2	0,5	∞	∞	Decrescente
C_{21}	1	4000	0	1	0,5	∞	∞	Constante
C_{22}	10	10000	0	1	0,5	∞	∞	Crescente
C_{23}	2,5	2500	0	1,2	0,5	∞	∞	Unimodal
C_{24}	0,5	4500	0	0,5	0,5	18000	36000	Banheira

O valores dos parâmetros foram escolhidos de forma a obter uma visualização melhor nos gráficos de falha acumulada e taxa de falha e para cobrir o maior número de combinações de formatos de taxas de falhas das entradas de cada porta. A taxa de falha

do componente C_3 é crescente, tal como as dos componentes C_{14} e C_{15} . Contudo o componente C_3 tem um corte na curva de não confiabilidade em $t_{lim} = 10717,7$ h (veja Tabela 5.1 e Figura 5.2.1), assim $F_{q,C_3}(t > t_{lim}) = 1$, enquanto que em C_{14} a não confiabilidade tende assintoticamente a 1 para $t \rightarrow \infty$.

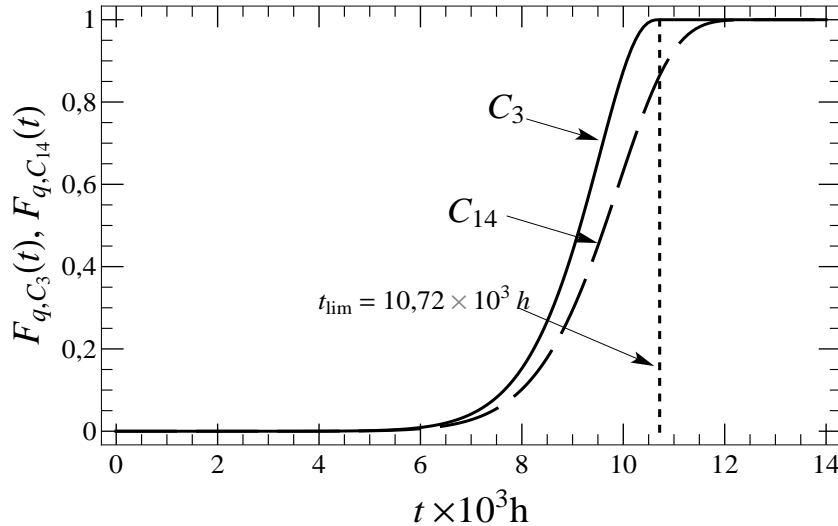


Figura 5.2.1: $F_{q,C_3}(t)$ com linha contínua $F_{q,C_{14}}(t)$ com linha tracejada.

Como consequência do corte da função de falha acumulada, a função taxa de falha diverge em t_{lim} . A taxa de falha não pode ser calculada para valores superiores a t_{lim} , o que significa dizer que nenhum item sobrevive além de t_{lim} e portanto nenhum item é capaz de falha em $t > t_{lim}$. Uma vez que o objetivo é analisar o formato geral das taxas de falha resultantes das portas, evita-se tratar esta descontinuidade e parâmetros que proporcionem uma taxa de falha crescente, entretanto sem divergência, foram adotados.

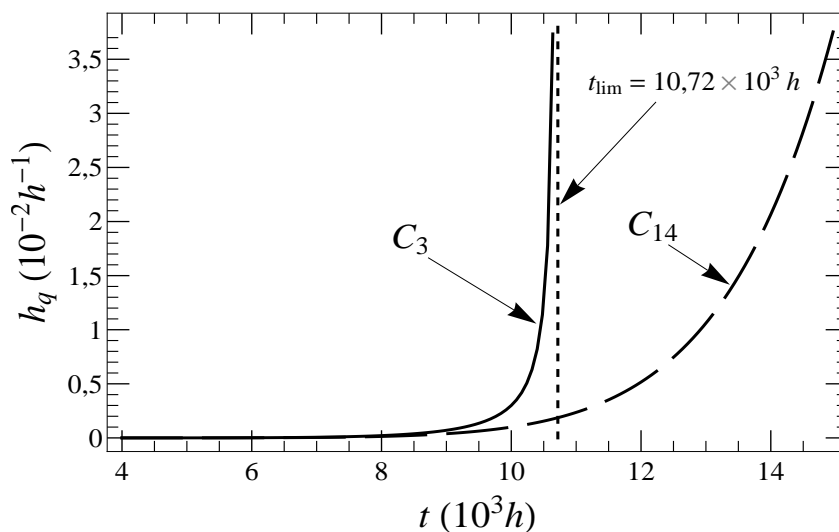


Figura 5.2.2: $h_{q,C_3}(t)$ com linha contínua $h_{q,C_{14}}(t)$ com linha tracejada.

Os componentes das entradas das portas AND, OR, KofN, PDep, PAnd e SEQ e os formatos de entrada de cada caso são mostrados na Tabela 5.3. Os casos marcados com * são possíveis graças à distribuição q -Weibull não ser monótona. Note que nestes casos, pelo menos uma entrada tem função taxa de falha com formato unimodal ou banheira. A rigor, o diferencial da utilização desta distribuição pode ser visto mais claramente nestes casos, embora isto nem sempre possa ser evidenciado nos formatos de taxa de falha.

Tabela 5.3: Componentes de entradas das portas AND, OR, KofN, PDep, PAnd e SEQ.

Caso	AND	OR	PDep	Pand	Seq	Entradas	Caso	KofN	Entradas
a)	1-2	1-2	1-2	1-2	1-2	$\searrow -$	a)	1-2-15	$\searrow - \nearrow$
b)	1-15	1-15	1-15	1-14	1-14	$\searrow \nearrow$	b)*	1-2-4	$\searrow - \cap$
c)*	1-4	1-6	1-10	1-4	1-4	$\searrow \cap$	c)*	1-11-5 1-12-5 1-2-5	$\searrow - \cup$
d)*	1-9	1-5	1-5	1-5	1-5	$\searrow \cup$	d)*	1-15-10	$\searrow \nearrow \cap$
e)	2-15	2-15	2-14	2-14	2-14	$- \nearrow$	e)*	1-15-9	$\searrow \nearrow \cup$
f)*	2-4	2-8	11-10	11-10	11-10	$- \cap$	f)*	1-4-9	$\searrow \cap \cup$
g)*	12-5	2-7	12-5	12-5	12-5	$- \cup$	g)*	11-15-18	$- \nearrow \cap$
h)*	15-8	15-10	14-10	14-10	14-10	$\nearrow \cap$	h)*	11-15-13	$- \nearrow \cup$
i)*	15-5	15-5	15-5	15-5	15-5	$\nearrow \cup$	i)*	2-10-13	$- \cap \cup$
j)*	4-7	10-9	10-9	10-9	10-9	$\cap \cup$	j)*	15-10-13	$\nearrow \cap \cup$

Legenda

\searrow	Decrescente	$-$	Constante	\nearrow	Crescente	\cap	Unimodal	\cup	Banheira
------------	-------------	-----	-----------	------------	-----------	--------	----------	--------	----------

Os componentes das portas WSP e os formatos das taxas de falha das respectivas entradas são mostrados na Tabela 5.4. Os casos assinalados com * são possíveis apenas com a implementação da distribuição q -Weibull na porta WSP.

Tabela 5.4: Componentes de entrada das portas WSP.

Caso	WSP	Entradas	Legenda	
1)	20-20	$\searrow \searrow$	\searrow	Decrescente
2)	21-21	$- -$	$-$	Constante
3)	22-22	$\nearrow \nearrow$	\nearrow	Crescente
4)*	23-23	$\cap \cap$	\cap	Unimodal
5)*	24-24	$\cup \cup$	\cup	Banheira
6)*	23-24	$\cap \cup$		
7)*	24-24-24	$\cup \cup \cup$		

5.2.1 AND

A saída da porta AND apresenta estado falho se todas as suas entradas estão falhas. Esta porta representa uma associação de componentes em paralelo se a função de interesse

é a não confiabilidade. A não confiabilidade resultante numa porta AND em função das não confiabilidades de seus componentes de entrada é expressa por:

$$AND_{list}(t) = \prod_{j=1}^n F_{q,list_j}(t), \quad (5.2.7)$$

onde $list$ é um conjunto de índices que representam todos os componentes de entrada da porta AND, n é o número total de entradas da porta e t é o instante de tempo. Assim uma porta AND que tem como entradas os componentes C_5 e C_8 fica $AND_{C_5,C_8}(t) = \prod_{j=1}^2 F_{q,list_j}(t)$ onde $list = \{5; 8\}$. Para a distribuição q -Weibull temos a função de falha acumulada

$$AND_{list}(t) = \prod_{i=list_1,2,\dots,n} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left[1 + (q_i - 1) \left(\frac{[t-t_{0_i}]_+}{\eta_i - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right]^{\frac{q_i-2}{q_i-1}}, \quad q_i \neq 1 \\ 1 - \exp \left[- \left(\frac{[t-t_{0_i}]_+}{\eta_i - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right], \quad q_i = 1 \end{array} \right\} \quad (5.2.8)$$

e função densidade de falha equivalente, ou seja, a derivada temporal da Equação 5.2.8 é

$$AND'_{list}(t) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \left\{ \begin{array}{l} F_{q,list_j}(t) \quad , \quad i \neq j \\ f_{q,list_j}(t) \quad , \quad i = j \end{array} \right\} \right) \quad (5.2.9)$$

A Figura 5.2.3 mostra a representação simbólica de uma porta AND.

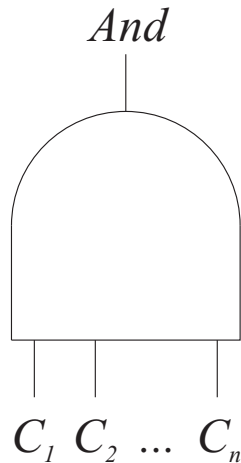


Figura 5.2.3: Representação simbólica da porta AND

Cada entrada da porta AND recebe um valor de tempo de falha. A porta devolve o maior tempo de falha de suas entradas, isto é, ela falha quando todas as suas entradas assumirem o estado falho. O método é então repetido e uma distribuição de tempos de falha é construída para a porta AND. A confiabilidade da porta AND pode ser calculada ao dividir o tempo total em intervalos e calcular a proporção de amostras que sobrevivem ao fim de cada intervalo. O valor da não confiabilidade é o complemento deste valor. Para ilustrar melhor o método, considere o exemplo da Tabela 5.5 onde temos 1000 valores de tempo de funcionamento em meses para compressores de refrigerador.

Tabela 5.5: Dados do teste de 1000 compressores de refrigerador. Adaptado de Krishnamoorthi (1992).

Intervalo em meses	Número de falhas	Sobrevivente ao fim do intervalo	Confiabilidade ao fim do intervalo	Não Confiabilidade ao fim do intervalo
0 – 0	0	1000	1,000	0
$0 < t \leq 10$	347	653	0,653	0,347
$10 < t \leq 20$	61	592	0,592	0,408
$20 < t \leq 30$	69	523	0,523	0,477
$30 < t \leq 40$	87	436	0,436	0,564
$40 < t \leq 50$	101	335	0,335	0,665
$50 < t \leq 60$	103	232	0,232	0,768
$60 < t \leq 70$	101	131	0,131	0,869
$70 < t \leq 80$	97	34	0,034	0,966
$80 < t \leq 90$	34	0	0,000	1
Total	1000			

A primeira coluna mostra os intervalos de tempo em meses considerados. A coluna intitulada como número de falhas mostra quantos valores de tempo de falha ocorrem em cada intervalo. O total desta coluna é igual ao total de amostras de tempo. A terceira coluna apresenta a quantidade de sobreviventes, ou seja, itens que ainda estão em estado operacional, ao fim de cada intervalo. A confiabilidade é a proporção de sobreviventes ao final de cada intervalo em relação ao total de itens analisados e a não confiabilidade ou falha acumulada é o complementar da confiabilidade. Neste exemplo a não confiabilidade aos dez meses de idade é : $F(10) = 0,347$.

O algoritmo para cálculo da não confiabilidade da porta AND (veja Algoritmo 5.1) tem m parâmetros de entrada que são os conjuntos de parâmetros da distribuição q -Weibull para cada uma das entradas, a saber: *component_1*, *component_2*, ..., *component_m*. O valor de saída do algoritmo é a lista *times* (tempos de falha da porta AND). Durante a execução são usadas as variáveis t_i (tempo aleatório) e n (quantidade de tempos aleatórios) e as funções $\text{InvF}(\text{component})$ que retorna um tempo aleatório seguindo

a distribuição q -Weibull com parâmetros especificados por componente e $\max\{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ que retorna o maior dos valores t_1, t_2, \dots, t_m .

Algoritmo 5.1 AND_Monte_Carlo (component_1, component_2, ..., component_m)

Input(component_1, ..., component_m)

n=0

times={}

While n < 50.000

 t1=InvF(component_1)

 t2=InvF(component_2)

 ...

 tm=InvF(component_m)

 times=times+{max[t1,t2,...,tm]}

 n=n+1

End_While Output(times)

A Figura 5.2.4 mostra o gráfico da função não confiabilidade AND_{C_4,C_7} e das entradas C_4 e C_7 . Note que o valor da não confiabilidade resultante AND é inferior aos valores de não confiabilidade dos componentes e que esta diferença diminui à medida em tais valores se aproximam dos limites 0 e 1.

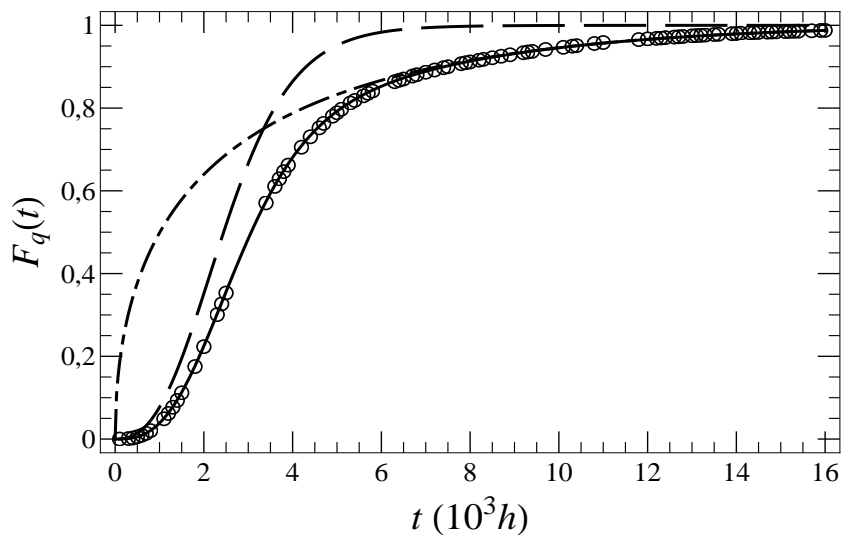


Figura 5.2.4: Não confiabilidade para a porta $AND_{C_4,C_7}(t)$ em linha contínua, $F_{q,C_4}(t)$ com linha tracejada e $F_{q,C_7}(t)$ com linha traço-ponto. Os resultados de Monte Carlo são representados em círculos.

De acordo com os formatos das funções taxa de falha dos componentes podem ser obtidos vários formatos de taxa de falha resultante. As Figuras 5.2.5 e 5.2.6 mostram alguns exemplos.

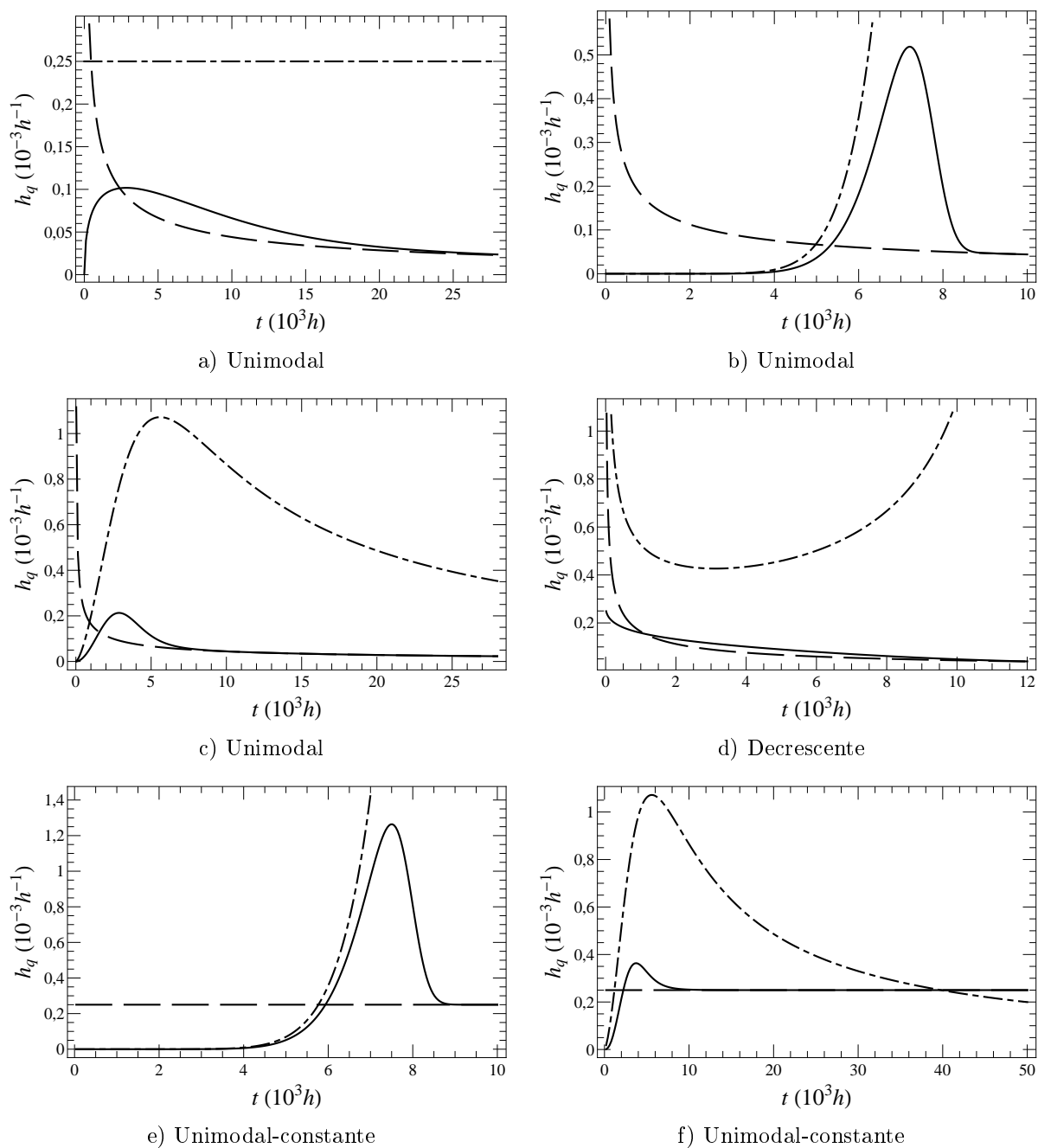


Figura 5.2.5: Funções taxa de falha para uma porta AND e suas duas entradas. Primeira entrada em linha tracejada, segunda em linha traço-ponto e saída em linha contínua. Entradas de cada painel: a) C_1 e C_2 ; b) C_1 e C_{15} ; c) C_1 e C_4 ; d) C_1 e C_9 ; e) C_2 e C_{15} e f) C_2 e C_4 .

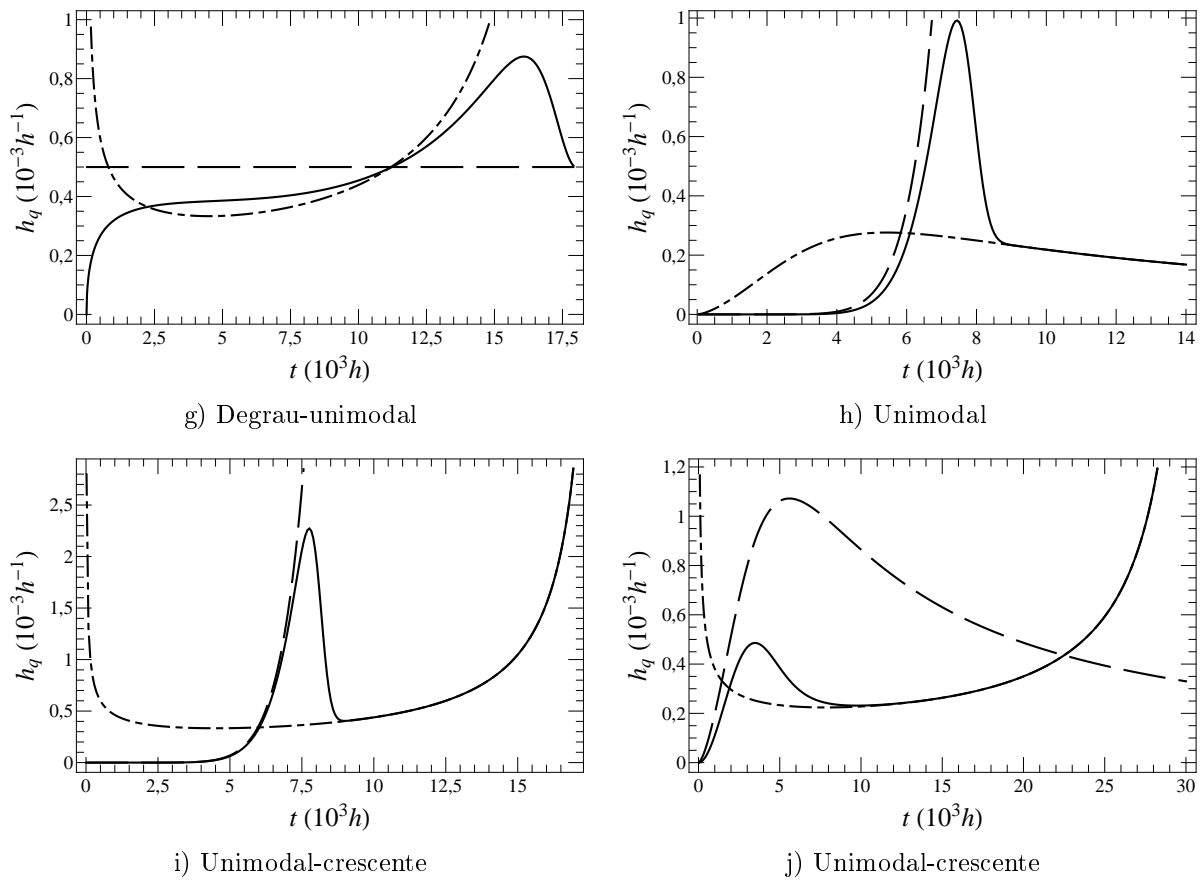


Figura 5.2.6: Funções taxa de falha para uma porta AND e suas duas entradas. Primeira entrada em linha tracejada, segunda em linha traço-ponto e saída em linha contínua. Entradas de cada painel: g) C_{12} e C_5 ; h) C_{15} e C_8 ; i) C_{15} e C_5 ; j) C_4 e C_7 .

Os valores dos parâmetros utilizados nas Figuras 5.2.5 e 5.2.6 são mostrados na Tabela 5.1. Cada curva de taxa de falha da saída AND foi construída a partir de uma porta com duas entradas. Os formatos das taxas de falha dos componentes e formato resultante são mostrados na Tabela 5.6.

Tabela 5.6: Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas AND.

Painel	Entrada I	Entrada II	Saída AND
a)	C_1 decrescente	C_2 constante	Unimodal
b)	C_1 decrescente	C_{15} crescente	Unimodal
c)	C_1 decrescente	C_4 unimodal	Unimodal
d)	C_1 decrescente	C_9 formato de “U”	Decrescente
e)	C_2 constante	C_{15} crescente	Unimodal-constante
f)	C_2 constante	C_4 unimodal	Unimodal-constante
g)	C_{12} constante	C_5 formato de “U”	Degrau-unimodal
h)	C_{15} crescente	C_8 unimodal.	Unimodal
i)	C_{15} crescente	C_5 formato de “U”	Unimodal-crescente
j)	C_4 unimodal	C_7 formato de “U”	Unimodal-crescente

As Figuras 5.2.5 e 5.2.6 não esgotam todas as possibilidades de formato, uma vez que não foram cobertas todas as possibilidades de valores dos parâmetros nem criadas figuras para AND com 3 ou mais entradas. Murthy, Xie e Jiang (2004) nomeia de tipo III(c) um arranjo de funções de falha acumulada com modelos Weibull modificados similar a AND e classifica alguns formatos de taxa de falha.

5.2.2 OR

A porta OR resulta em estado falho se pelo menos uma de suas entradas falha. Esta porta representa uma associação em série onde se pelo menos um componente falha, todo o conjunto da associação falha. A função de falha acumulada para a porta OR é expressa por

$$OR_{list}(t) = 1 - \prod_{j=1}^n [1 - F_{q,list_j}(t)] , \quad (5.2.10)$$

onde t é o instante de tempo, n é o número de entradas da porta e $list$ é um conjunto com os índices de identificação de todos os componentes de entrada da porta. Se uma porta OR tem como entrada os componentes C_{11} e C_2 , temos $list = \{11, 2\}$ e a não confiabilidade da associação igual a OR_{C_{11},C_2} . A função de falha acumulada resultante de uma porta OR considerando a distribuição q -Weibull da Equação 5.1.3 é

$$OR_{list}(t) = 1 - \prod_{i=list_{1,2,\dots,n}} \left\{ \begin{array}{l} \left[1 + (q_i - 1) \left(\frac{[t-t_{0_i}]_+}{\eta_i - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right]^{\frac{q_i-2}{q_i-1}} , q_i \neq 1 \\ \exp \left[- \left(\frac{[t-t_{0_i}]_+}{\eta_i - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right] , q_i = 1 \end{array} \right\} , \quad (5.2.11)$$

e a sua derivada em relação ao tempo é

$$OR'_{list}(t) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n \begin{cases} 1 - F_{q,list_j}(t) & , i \neq j \\ f_{q,list_j}(t) & , i = j \end{cases} \right), \quad (5.2.12)$$

A Figura 5.2.7 mostra a representação simbólica de uma porta OR.

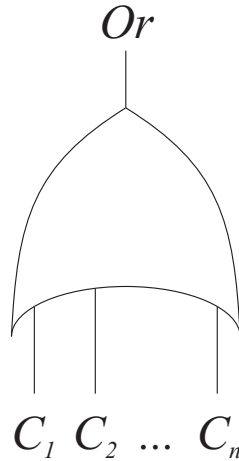


Figura 5.2.7: Representação simbólica da porta OR.

Em cada ciclo da simulação de Monte Carlo, um valor de tempo para cada entrada da porta OR é gerado, segundo a Equação 5.2.6. A porta devolve o menor dos tempos de suas entradas, ou seja, o tempo em que ocorreu a primeira falha em uma de suas entradas. Os ciclos são repetidos um grande número de vezes e assim tem-se uma distribuição de tempos da porta, conforme mostrado no Algoritmo 5.2. O algoritmo para a porta OR é semelhante ao da porta AND no que diz respeito aos valores de entrada, saída, variáveis e funções envolvidas exceto pelo uso da função $\min[t1, t2, \dots, tm]$ que retorna o menor dos valores de entrada.

Algoritmo 5.2 OR_Monte_Carlo (component_1, component_2, ..., component_m)

```

Input(component_1, ..., component_m)
n=0
times={}
While n<50.000
    t1=InvF(component_1)
    t2=InvF(component_2)
    ...
    tm=InvF(component_m)
    times=times+{min[t1,t2,...,tm]}
    n=n+1
End_While Output(times)

```

A Figura 5.2.8 mostra as curvas de não confiabilidade de uma porta OR e suas entradas.

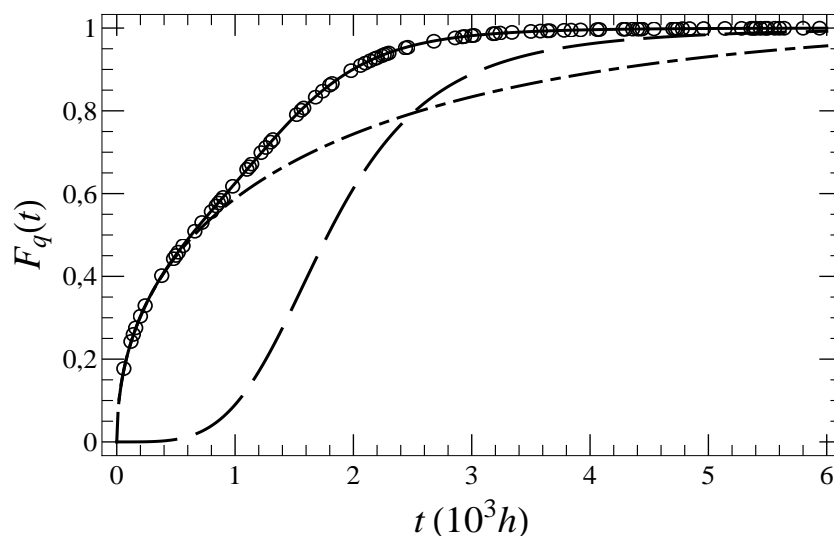


Figura 5.2.8: Função não confiabilidade resultante da porta $OR_{C_{10},C_9}(t)$ em linha contínua e não confiabilidade de suas entradas: $F_{q,C_{10}}(t)$ em linha tracejada e $F_{q,C_9}(t)$ representada por linha traço-ponto. Os círculos são valores gerados pela simulação de Monte Carlo.

As Figuras 5.2.9 e 5.2.10 apresentam alguns dos formatos de taxa de falha resultante em uma porta OR de duas entradas. Note que o formato da função taxa de falha mostrada em b) é semelhante à curva da banheira modelada pela distribuição q -Weibull. Logo a distribuição q -Weibull pode representar, desde que com os parâmetros adequados, o comportamento da falha resultante de dois modos de falha distintos: um com taxa de falha decrescente e outro crescente. Murthy, Xie e Jiang (2004) faz referência ao modelo Weibull modificado denominado de tipo III(b) no qual por meio de uma associação OR podem ser obtidos três formatos de taxa de falha: decrescente, crescente e curva da banheira.

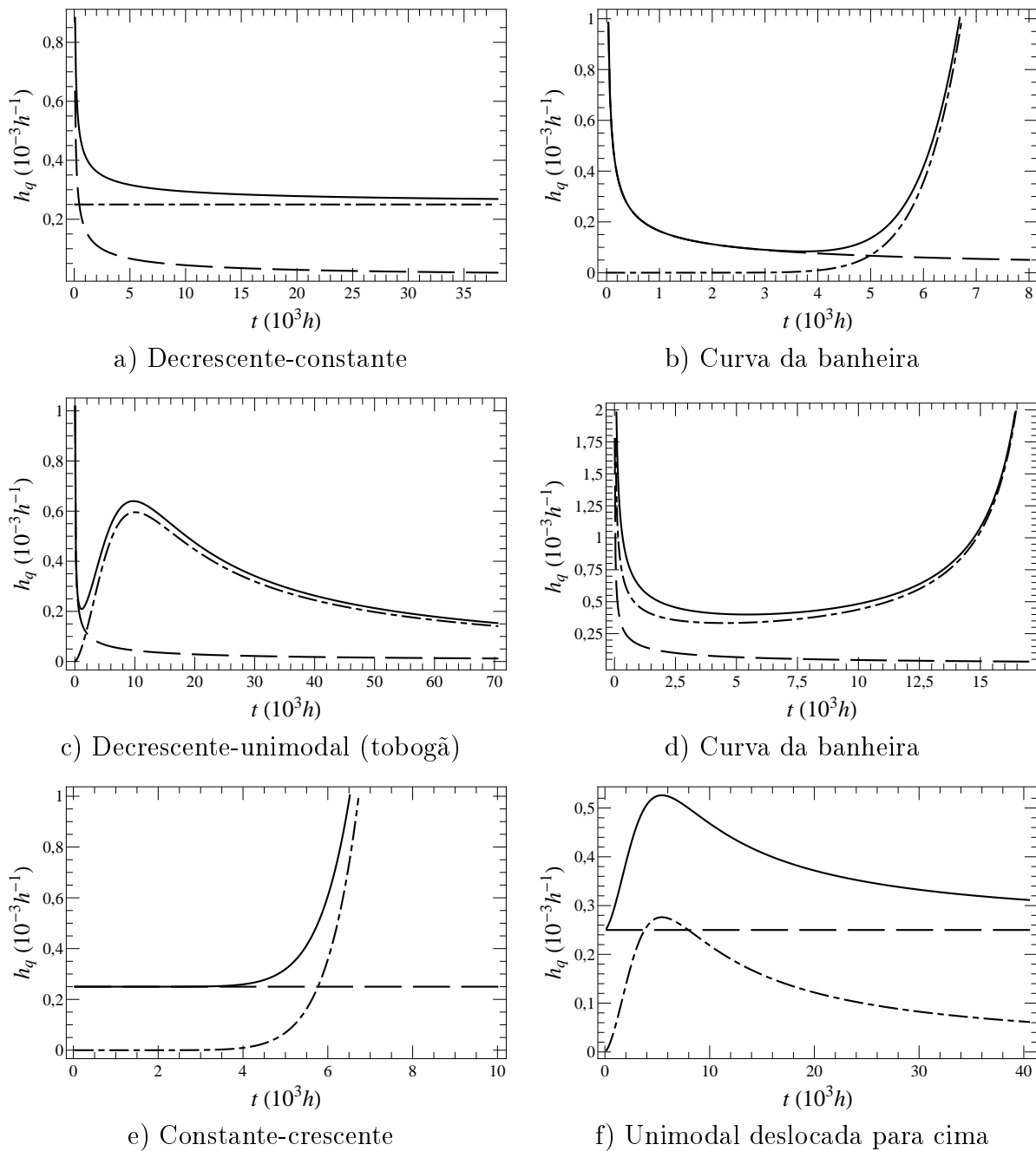
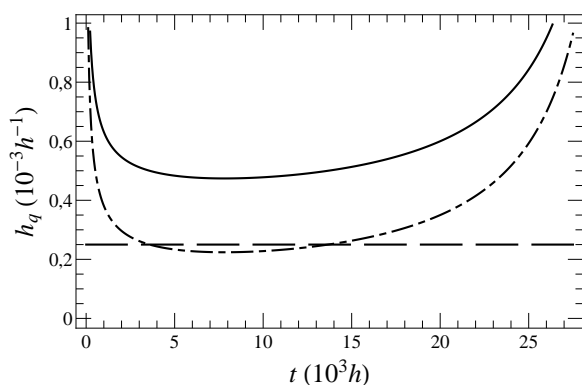
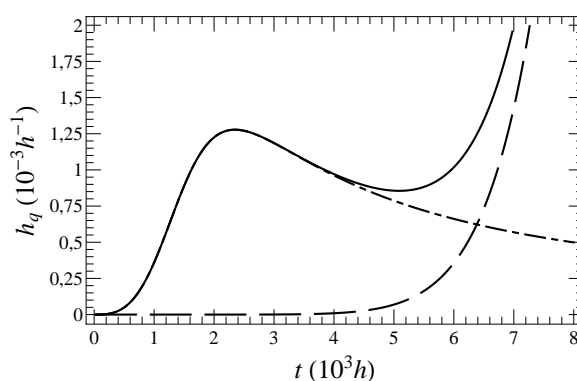


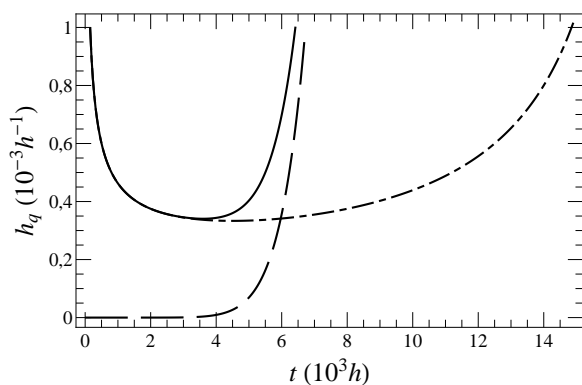
Figura 5.2.9: Funções taxa de falha para uma porta OR e suas duas entradas. Primeira entrada em linha tracejada, segunda em linha traço-ponto e saída em linha contínua. Entradas de cada painel: a) C_1 e C_2 ; b) C_1 e C_{15} ; c) C_1 e C_6 ; d) C_1 e C_5 ; e) C_2 e C_{15} e f) C_2 e C_8 .



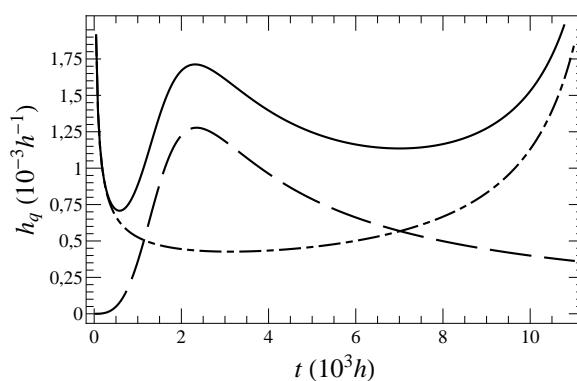
g) Curva da banheira



h) Unimodal-crescente



i) Curva da banheira



j) Formato de "W"

Figura 5.2.10: Funções taxa de falha para uma porta OR e suas duas entradas. Primeira entrada em linha tracejada, segunda em linha traço-ponto e saída em linha contínua. Entradas de cada painel: g) C_2 e C_7 ; h) C_{15} e C_{10} ; i) C_{15} e C_5 ; j) C_{10} e C_9 .

Os valores dos parâmetros utilizados nas Figuras 5.2.9 e 5.2.10 são mostrados na Tabela 5.1. Cada curva de taxa de falha da saída OR foi construída a partir de uma porta com duas entradas. Os formatos das taxas de falha dos componentes e formato resultante são mostrados na Tabela 5.7.

Tabela 5.7: Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas OR.

Painel	Entrada I	Entrada II	Saída OR
a)	C_1 decrescente	C_2 constante	Decrescente-constante
b)	C_1 decrescente	C_{15} crescente	Formato de “U”
c)	C_1 decrescente	C_6 unimodal	Decrescente-unimodal ou tobogã
d)	C_1 decrescente	C_5 formato de “U”	Formato de “U”
e)	C_2 constante	C_{15} crescente	Constante-crescente
f)	C_2 constante	C_8 unimodal	Unimodal deslocada para cima
g)	C_2 constante	C_7 formato de “U”	Formato de “U” deslocado para cima
h)	C_{15} crescente	C_{10} unimodal.	Unimodal-crescente
i)	C_{15} crescente	C_5 formato de “U”	Formato de “U”
j)	C_{10} unimodal	C_9 formato de “U”	Formato de “W”

5.2.3 KofN

KofN é uma associação de n componentes que resulta em falha se pelo menos k dos n falham. A porta KofN pode ser interpretada como uma associação de portas AND e OR que produzirá o estado falho quando no mínimo k de suas entradas estão em estado falho. A função de falha acumulada para esta porta é

$$\begin{aligned}
 KofN_{list,k}(t) &= \\
 &= \sum_{x=0}^{2^m-1} \begin{cases} \prod_{j=1}^m \left[x_j + (1 - 2x_j) F_{q,list_j}(t) \right], & \sum_{j=1}^m x_j \leq (m - k) \\ 0, & \sum_{j=1}^m x_j > (m - k), \end{cases} \quad (5.2.13)
 \end{aligned}$$

e sua derivada temporal é

$$\begin{aligned}
 KofN'_{list,k}(t) &= \\
 &= \sum_{x=0}^{2^m-1} \begin{cases} \sum_{i=1}^m \left[\prod_{j=1}^m \left\{ \begin{aligned} & \left[x_j + (1 - 2x_j) \times \right. \\ & \left. \times F_{q,list_j}(t) \right] , i \neq j \\ & (1 - 2x_j) f_{q,list_j}(t) , i = j \end{aligned} \right\} \right], & \sum_{j=1}^m x_j \leq (m - k) \\ 0, & \sum_{j=1}^m x_j > (m - k), \end{cases} \quad (5.2.14)
 \end{aligned}$$

onde $list$ é um conjunto dos índices de todas entradas da porta KofN, m é a quantidade de entradas da porta, k é o número mínimo de entradas falhas que causam a falha da porta, t é o instante de tempo e x_j é o j -ésimo bit da representação de x na base 2, sendo que $j = 1$ é o bit mais significativo. Por exemplo se $list = \{2, 5, 7\}$ e $k = 2$, temos tempos uma porta 2de3, $m = 3$, x varia de 0 até $2^3 - 1 = 7$ e quando $x = 6$ temos $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$ pois $6_{10} = 110_2$. Esta situação significa que C_2 e C_5 estão funcionando e C_7 está falho. A Figura 5.2.11 mostra a representação simbólica da porta KofN.

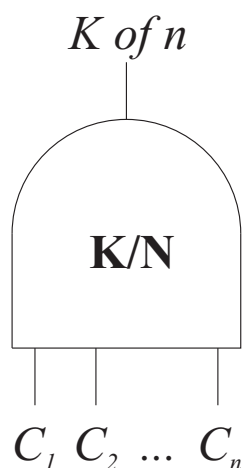


Figura 5.2.11: Representação simbólica da porta KofN.

Na simulação de Monte Carlo, a porta KofN retorna como tempo de falha o k -ésimo menor instante de tempo de falha de suas entradas. Por exemplo se os tempos de entrada numa porta 2de3 são 11h, 45h, e 19h, a porta retorna 19h, o segundo menor tempo. O Algoritmo 5.3 recebe, como dados de entrada, os parâmetros de cada componente de suas entradas e o valor k . Gera um valor de tempo aleatório para cada componente a cada ciclo de execução e armazena tais valores em ordem crescente na variável *sample*. O k -ésimo valor de tempo desta variável é armazenado na lista *times*. Os ciclos são repetidos 50.000 vezes e uma distribuição de tempos de falha é retornada.

Algoritmo 5.3 KofN_Monte_Carlo (component_1, component_2, ..., component_n, k)

```

Input(component_1, ..., component_n, k)
j=0
times={}
While j<50.000
t1=InvF(component_1)
t2=InvF(component_2)
....
tm=InvF(component_n)
sample=sort[{t1,t2,...,tm}]
times=times+{sample[k]}
j=j+1
End_While Output(times)

```

A Figura 5.2.12 mostra os valores de não confiabilidade para uma porta KofN e suas entradas.

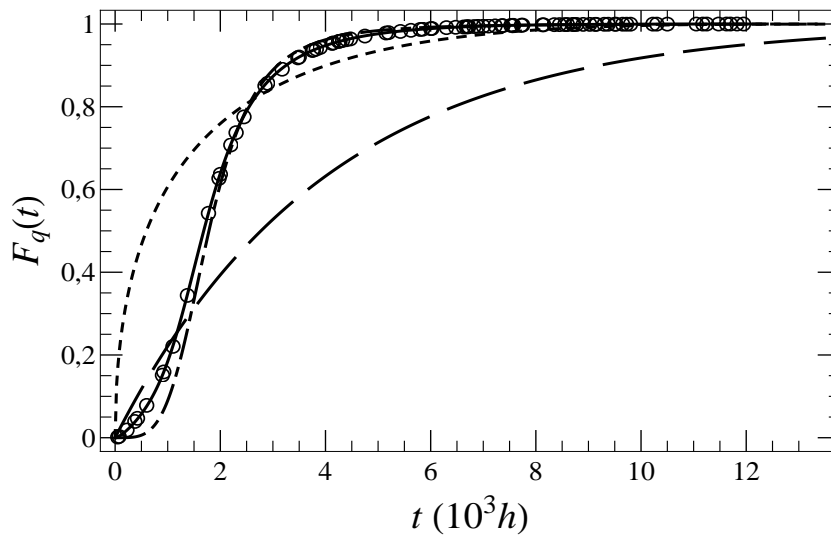


Figura 5.2.12: Função não confiabilidade resultante $KofN_{\{C_1, C_{10}, C_{13}\}, 2}(t)$ traçada com linha contínua, $F_{q, C_1}(t)$ em linha tracejada, $F_{q, C_{10}}(t)$ em linha traço ponto e $F_{q, C_{13}}(t)$ representada em linha pontilhada. Os círculos representam os valores de não confiabilidade gerados por simulação de Monte Carlo.

As Figuras 5.2.13 e 5.2.14 mostram alguns exemplos de curvas de taxa de falha de portas KofN e de suas 3 entradas.

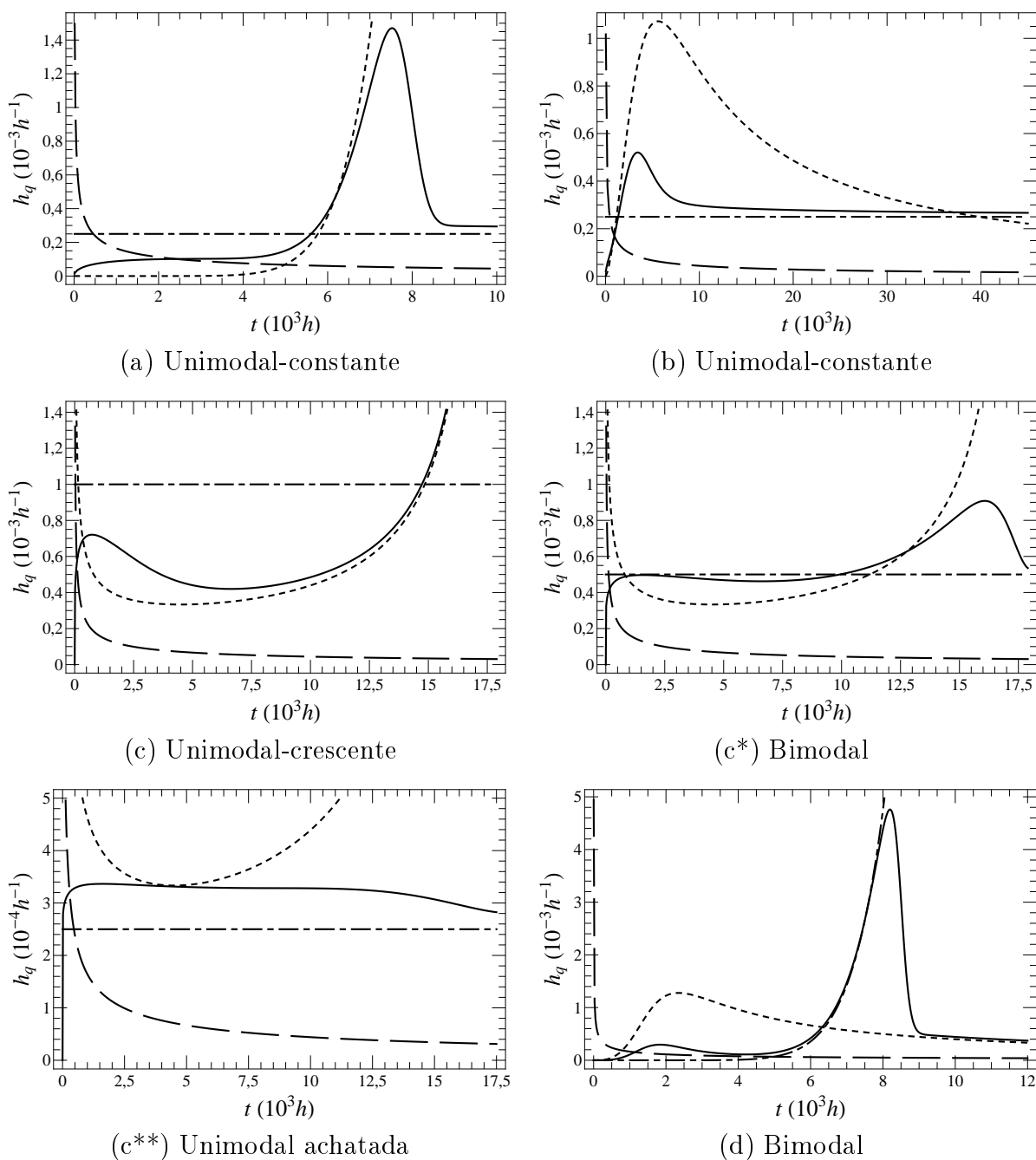


Figura 5.2.13: Funções taxa de falha de portas KofN e suas 3 entradas. As funções taxa de falha das entradas estão em linha tracejada, traço-ponto e pontilhada, a saída é apresentada em linha contínua. Os componentes usados em cada painel são: a) C_1 , C_2 e C_{15} ; b) C_1 , C_2 e C_4 ; c) C_1 , C_{11} e C_5 ; c*) C_1 , C_{12} e C_5 ; c**) C_1 , C_2 e C_5 ; d) C_1 , C_{15} e C_{10} .

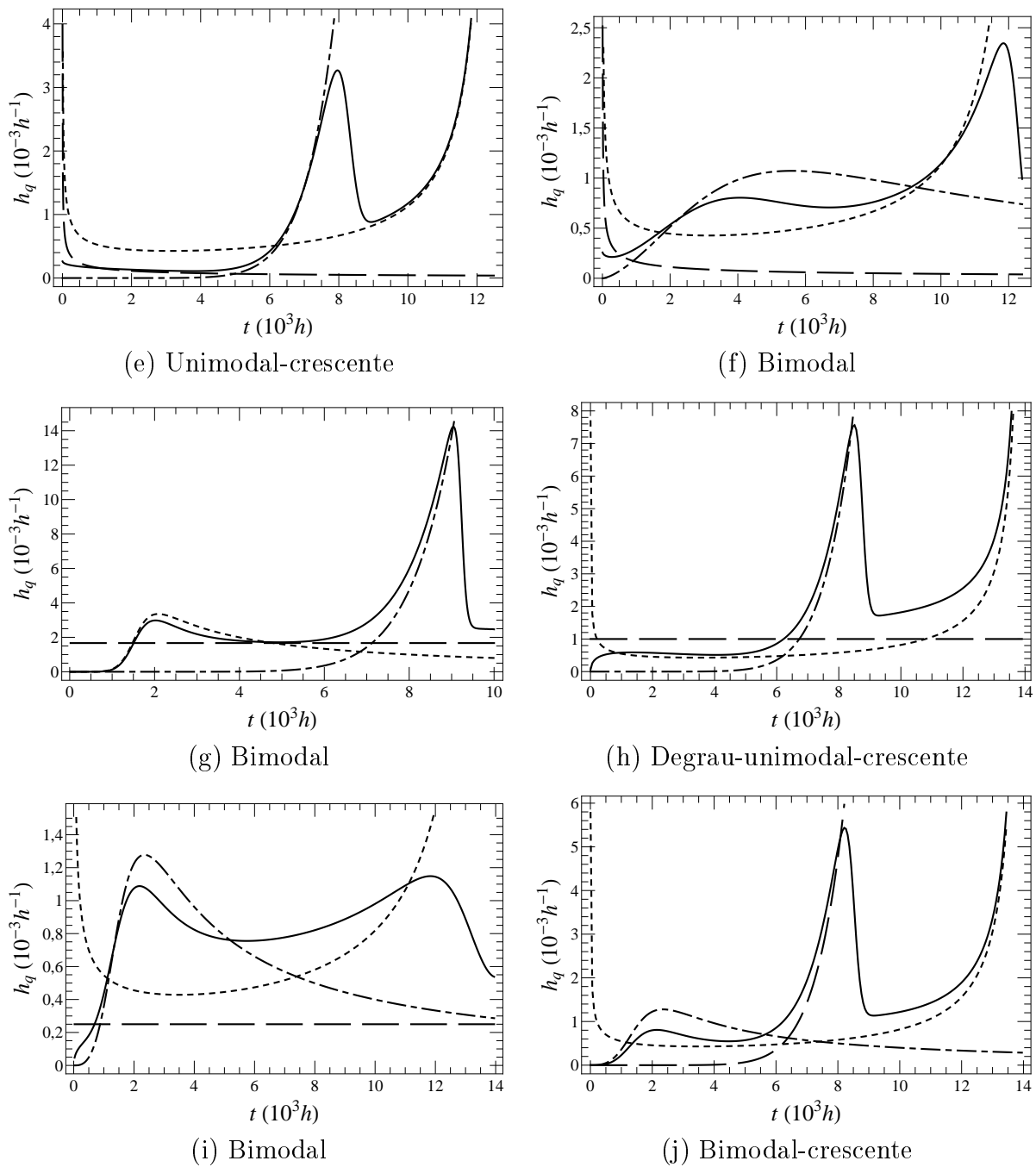


Figura 5.2.14: Funções taxa de falha de portas KofN e suas 3 entradas. As funções taxa de falha das entradas estão em linha tracejada, traço-ponto e pontilhada, a saída é apresentada em linha contínua. Os componentes usados em cada painel são: e) C_1 , C_{15} e C_9 ; f) C_1 , C_4 e C_9 ; g) C_{17} , C_{15} e C_{18} ; h) C_{11} , C_{15} e C_{13} ; i) C_2 , C_{10} e C_{13} ; j) C_{15} , C_{10} e C_{13} .

Em todos gráficos das Figuras 5.2.13 e 5.2.14, a curva de não confiabilidade da porta está traçada em linha contínua, e as curvas das entradas estão em linha tracejada, traço-ponto e pontilhada respectivamente, segundo a ordem em que aparecem nas descrições:

A Tabela 5.8 mostra os formatos das entradas e saídas das portas PDep das Figuras 5.2.17 e 5.2.18.

Tabela 5.8: Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas KofN.

Parte	Entrada I	Entrada II	Entrada III	Saída KofN
a)	C_1 decrescente	C_2 constante	C_{15} crescente	Unimodal-constante
b)	C_1 decrescente	C_2 constante	C_4 unimodal	Unimodal-constante
c)	C_1 decrescente	C_{11} constante	C_5 formato de “U”	Unimodal-crescente
c*)	C_1 decrescente	C_{12} constante	C_5 formato de “U”	Bimodal
c**)	C_1 decrescente	C_2 constante	C_5 formato de “U”	Unimodal achatada
d)	C_1 decrescente	C_{15} crescente	C_{10} unimodal	Bimodal
e)	C_1 decrescente	C_{15} crescente	C_9 formato de “U”	Unimodal-crescente
f)	C_1 decrescente	C_4 unimodal	C_9 formato de “U”	Bimodal
g)	C_{17} constante	C_{15} crescente	C_{18} unimodal	Bimodal
h)	C_{11} constante	C_{15} crescente	C_{13} formato de “U”	Degrau-unimodal-crescente
i)	C_2 constante	C_{10} unimodal	C_{13} formato de “U”	Bimodal
j)	C_{15} crescente	C_{10} unimodal.	C_{13} formato de “U”	Bimodal-crescente

Note que os itens c), c*) e c**) foram calculados com entradas com taxa de falha de formatos decrescente, constante e de formato de “U”. O que diferencia estes gráficos é o valor da taxa de falha constante tomado em cada caso. À medida em que aumenta, este valor torna a taxa de falha resultante em unimodal achatada, bimodal e unimodal-crescente. Os valores de todos os parâmetros utilizados estão na Tabela 5.1.

5.2.4 PDep – Dependência probabilística (*Probabilistic dependency*)

A porta PDep representa uma associação em que um evento gatilho (T) induz a falha de componentes dependentes, quaisquer que sejam seus estados operacionais (falho ou não falho). Toda vez que um evento gatilho ocorre, seus componentes dependentes falham com probabilidade $p_d \leq 1$. Segundo Bobbio et al. (2008), PDep é a generalização da porta FDEP que apresenta apenas $p_d = 1$. Nesta porta, a falha do componente não tem influência sobre o evento gatilho. A probabilidade de ocorrência do evento gatilho é

$$F_T(t) = \int_0^t f_T(t_1) dt_1, \quad (5.2.15)$$

onde $f_T(t_1)$ é o valor da função densidade de probabilidade do evento gatilho para o tempo t_1 .

A probabilidade de falha de cada componente no instante t é $F_{q,i}(t)$ e o seu complemento é $F_{q,i}^C(t) = R_{q,i}(t)$. A probabilidade do componente ser levado a falhar devido

exclusivamente ao gatilho é p_d , então a probabilidade de falha para cada componente PDep é

$$\begin{aligned}
 PDep_{i,T}(t) &= F_T(t)F_{q,i}(t) + F_T^C(t)F_{q,i}(t) + F_T(t)F_{q,i}^C(t)p_d \\
 &= F_{q,i}(t) [F_T(t) + F_T^C(t)] + F_T(t)F_{q,i}^C(t)p_d \\
 &= F_{q,i}(t) + (1 - F_{q,i}(t)) F_T(t)p_d,
 \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

e a função densidade de falha de falha para a porta PDep, ou seja, a derivada em relação ao tempo da não confiabilidade é

$$\begin{aligned}
 PDep'_{i,T}(t) &= f_{q,i}(t) + (1 - F_{q,i}(t))' F_T(t)p_d + (1 - F_{q,i}(t)) f_T(t)p_d \\
 &= f_{q,i}(t) - f_{q,i}(t)F_T(t)p_d + (1 - F_{q,i}(t)) f_T(t)p_d \\
 &= f_{q,i}(t) (1 - F_T(t)p_d) + (1 - F_{q,i}(t)) f_T(t)p_d.
 \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

A Figura 5.2.15 mostra a representação simbólica de uma porta PDep com um gatilho T e n entradas de componentes.

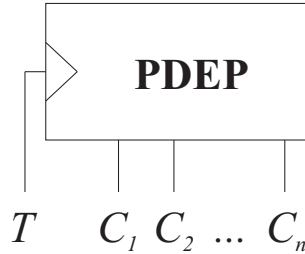


Figura 5.2.15: Representação simbólica de uma porta PDep.

A porta PDep retorna o valor de tempo de falha de seu gatilho se este tempo é menor que o tempo de falha do componente afetado pelo gatilho e, por outro lado, a porta retorna o tempo de falha do componente se este for menor. Para portas PDep com vários componentes de entrada, o raciocínio é o mesmo, de forma que as análises seguintes vão abordar, apenas para simplificação, uma porta PDep com apenas uma entrada.

O Algoritmo 5.4 recebe como dados de entrada os parâmetros de seu componente, do gatilho e o valor de probabilidade p_d . Os tempos de falha do componente e do gatilho são gerados segundo a Equação 5.2.6 e armazenados nas variáveis t_{comp} e t_{trig} respectivamente. Se t_{comp} é menor que t_{trig} então o componente falhou sem a ocorrência do evento gatilho e seu tempo de falha é armazenado na variável $sample$. Caso contrário, um valor aleatório entre 0 e 1 é gerado e comparado com a variável pd . Se este valor é

menor ou igual a pd significa que o gatilho provocará a falha do componente e o valor da variável t_{trig} será atribuído a variável $sample$, guardando assim o tempo de mais uma amostra. Caso contrário, a amostra será o tempo de falha do componente. Estes passos são repetidos um grande número de vezes e a lista $times$ será devolvida com a distribuição dos tempos da porta PDep.

Algoritmo 5.4 PDep_Monte_Carlo (component, trigger, pd)

```
Input(component, trigger, pd)
j=0
times={}
While j < 50.000
  t_comp=InvF(component)
  t_trig=InvF(trigger)
  If t_comp <= t_trig then
    sample=t_comp
  Else
    If Random(0;1) <= pd then
      sample=t_trig
    else
      sample=t_comp
    End_If
  End_If
  times=times+{sample}
j=j+1
End_While Output(times)
```

A Figura 5.2.16 mostra as curvas de não confiabilidade para a porta PDep, o componente de entrada e seu gatilho.

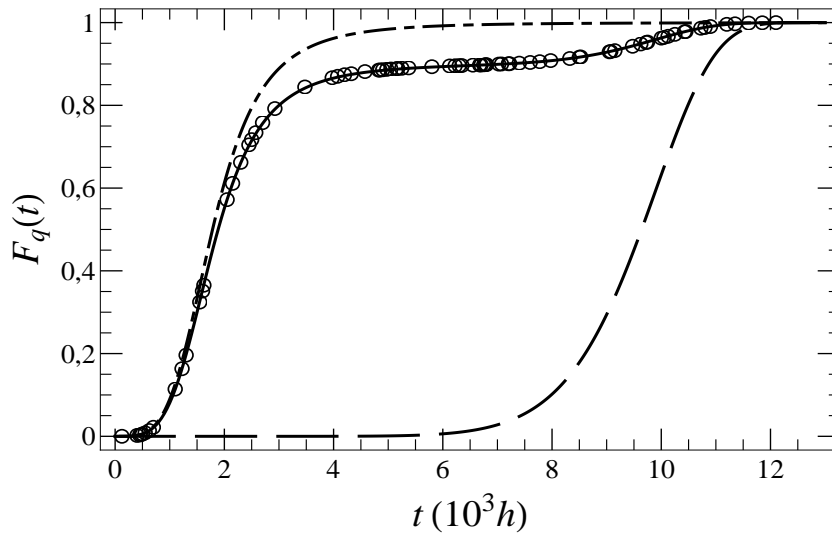


Figura 5.2.16: Função não confiabilidade $PDep_{C_{14},C_{10}}(t)$ calculada com $p_d = 0,9$ em linha contínua e as não confiabilidades do componente $F_{q,C_{14}}(t)$ em linha tracejada e do gatilho $F_{q,C_{10}}(t)$ em linha traço-ponto. Os círculos representam a não confiabilidade calculada por Monte Carlo. Todos os parâmetros estão mostrados na Tabela 5.1.

As Figuras 5.2.17 e 5.2.18 mostram as funções taxa de falha para portas PDep em linha contínua, para seu componente em linha tracejada e para o gatilho em linha traço-ponto. Uma vez que, gatilho e componente têm funções diferentes, no mesmo gráfico também é mostrada a curva da taxa de falha PDep (em linha cinza) com a seguinte configuração: componente em linha traço-ponto e gatilho em linha tracejada.

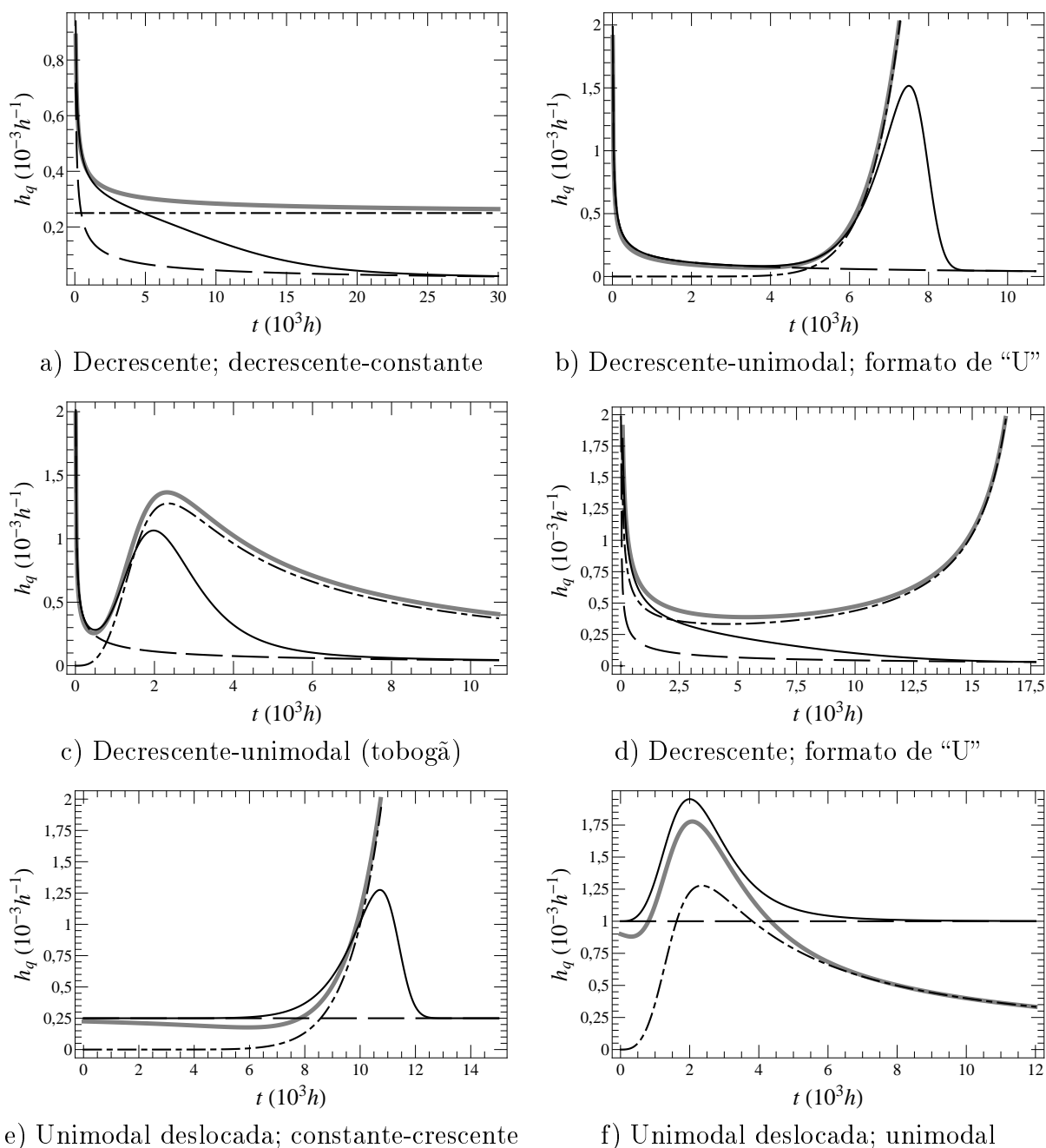
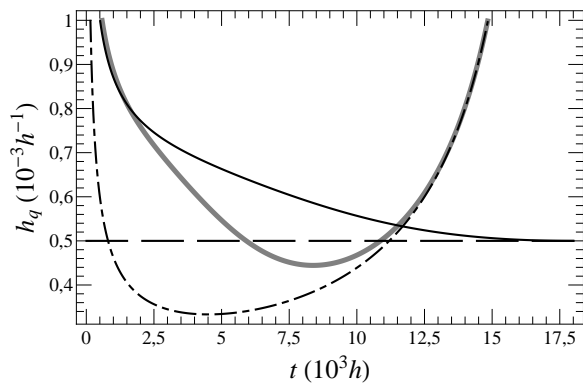
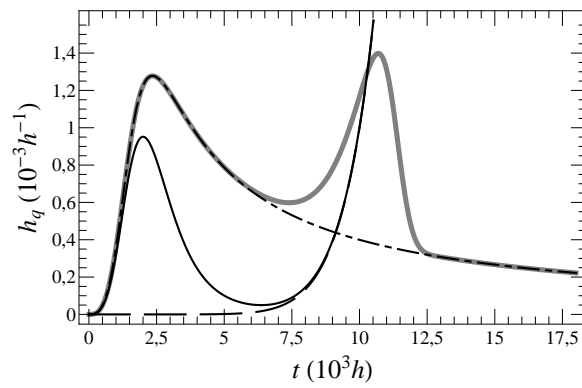


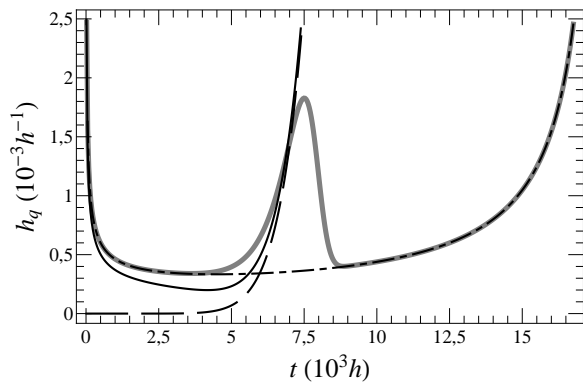
Figura 5.2.17: Funções taxa de falha da porta PDep representadas em linhas contínuas preta e cinza e de suas entradas, em linha tracejada e traço-ponto. A curva mostrada em linha preta contínua tem componente em linha tracejada e gatilho em traço-ponto. A taxa de falha em linha cinza contínua tem o componente em linha traço-ponto e o gatilho em linha tracejada. Para cada painel os componentes das curvas tracejadas e traço ponto são respectivamente: a) C_1 e C_2 ; b) C_1 e C_{15} ; c) C_1 e C_{10} ; d) C_1 e C_5 ; e) C_2 e C_{14} ; f) C_{11} e C_{10} . Os parâmetros utilizados estão na Tabela 5.1.



g) Decrescente-constante; formato de "U"



h) Unimodal-crescente; bimodal



i) Formato de "U"; formato de "W"

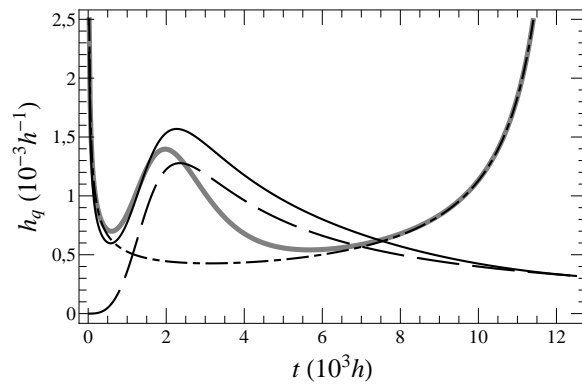
j) Decrescente-unimodal (tobogã);
formato de "W"

Figura 5.2.18: Extensão da Figura 5.2.17 para os casos i) e j). Os componentes em cada painel (linhas tracejada e traço-ponto) são: g) C_{12} e C_5 ; h) C_{14} e C_{10} ; i) C_{15} e C_5 ; j) C_{10} e C_9 .

A Tabela 5.9 mostra os formatos das entradas e saídas das portas PDep das Figuras 5.2.17 e 5.2.18.

Tabela 5.9: Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas PDep.

Parte	Entrada I	Entrada II	Taxa de falha	
			I componente II gatilho	II componente I gatilho
a)	C_1 decrescente	C_2 constante	Decrescente	Decrescente-constante
b)	C_1 decrescente	C_{15} crescente	Decrescente-unimodal	Formato de “U”
c)	C_1 decrescente	C_{10} unimodal	Decrescente-unimodal	Decrescente-unimodal
d)	C_1 decrescente	C_5 formato de “U”	Decrescente	Formato de “U”
e)	C_2 constante	C_{14} crescente	Unimodal deslocada	Constante-crescente
f)	C_{11} constante	C_{10} unimodal	Unimodal deslocada	Unimodal
g)	C_{12} constante	C_5 formato de “U”	Decrescente-constante	Formato de “U”
h)	C_{14} crescente	C_{10} unimodal.	Unimodal-crescente	Bimodal
i)	C_{15} crescente	C_5 formato de “U”	Formato de “U”	Formato de “W”
j)	C_{10} unimodal	C_9 formato de “U”	Decrescente-unimodal	Formato de “W”

5.2.5 PAND – AND com Prioridade (*Priority AND*)

Esta porta resulta em estado falho se e somente se todas as suas entradas falham em uma ordem predefinida. A principal diferença entre as portas PAND e AND é que nesta última a falha de todas as suas entradas gera falha na saída ao passo que numa PAND é preciso que as falhas ocorram em uma ordem especificada, embora qualquer ordem seja possível de ocorrer.

A modelagem da porta PAND necessita da definição probabilística da sequência de eventos. Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias que assumem os valores x_1 e x_2 respectivamente. As funções densidade de probabilidade que controlam tais variáveis são $f_1(x_1)$ e $f_2(x_2)$ mostradas na Figura 5.2.19.

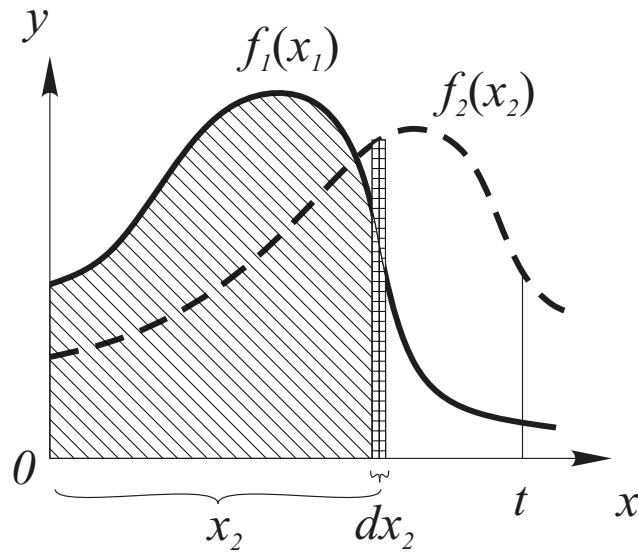


Figura 5.2.19: Funções densidade de probabilidade $f_1(x_1)$ e $f_2(x_2)$.

A probabilidade da variável aleatória X_1 ser menor ou igual ao valor x_2 é

$$P(X_1 < x_2) = \int_{x_1=0}^{x_1=x_2} f_1(x_1) dx_1, \quad (5.2.18)$$

assim a probabilidade de $X_1 < X_2$ até o valor t é

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \int_{x_2=0}^{x_2=t} \left(f_2(x_2) dx_2 \int_{x_1=0}^{x_1=x_2} f_1(x_1) dx_1 \right) \\ &= \int_{x_2=0}^{x_2=t} \int_{x_1=0}^{x_1=x_2} f_2(x_2) f_1(x_1) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

Considerando as variáveis aleatórias como tempos de funcionamento de componentes seguindo a distribuição q -Weibull, a probabilidade do componente C_1 falhar antes do componente C_2 até o tempo t é

$$PAND_{C_1, C_2}(t) = \int_{x_2=t_{02}}^{x_2=t} \int_{x_1=t_{01}}^{x_1=x_2} f_{q,2}(x_2) f_{q,1}(x_1) dx_1 dx_2. \quad (5.2.20)$$

A formulação pode ser estendida para n componentes de entrada como

$$\begin{aligned}
PAND_{C_1, C_2, \dots, C_n}(t) = & \\
& \int_{x_n=t_{0n}}^{x_n=t} \int_{x_{n-1}=t_{0_{n-1}}}^{x_{n-1}=x_n} \dots \\
\cdots \int_{x_2=t_{0_2}}^{x_2=x_3} \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=x_2} & f_{q,n}(x_n) f_{q,n-1}(x_{n-1}) \cdots f_{q,2}(x_2) f_{q,1}(x_1) dx_1 dx_2 \cdots \\
& \cdots dx_{n-1} dx_n, \\
& t_{0_1} \leq t_{0_2} \leq \cdots \leq t_{0_n},
\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

a derivada em relação ao tempos de $PAND_{C_1, C_2, \dots, C_n}(t)$ é

$$\begin{aligned}
PAND'_{C_1, C_2, \dots, C_n}(t) = & \\
& f_{q,n}(t) \int_{x_{n-1}=t_{0_{n-1}}}^{x_{n-1}=t} \int_{x_{n-2}=t_{0_{n-2}}}^{x_{n-2}=x_{n-1}} \dots \\
\cdots \int_{x_2=t_{0_2}}^{x_2=x_3} \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=x_2} & f_{q,n-1}(x_{n-1}) f_{q,n-2}(x_{n-2}) \cdots f_{q,2}(x_2) f_{q,1}(x_1) dx_1 dx_2 \cdots \\
& \cdots dx_{n-2} dx_{n-1}, \\
& t_{0_1} \leq t_{0_2} \leq \cdots \leq t_{0_n}
\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

A Figura 5.2.20 mostra a representação simbólica da porta PAND. As entradas resultam em falha se ocorrem da esquerda para a direita.

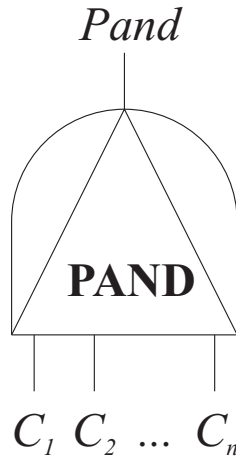


Figura 5.2.20: Representação simbólica da porta PAND.

A simulação de Monte Carlo é feita gerando n tempos até a falha segundo a distribui-

ção q -Weibull. A porta retornará o maior tempo de entrada se todos os tempos estiverem em ordem crescente. Caso contrario a porta gera um tempo de saída infinito. Os valores de tempo infinitos não são computados na contagem dos intervalos para o cálculo da confiabilidade (veja Tabela 5.5), mas são considerados como amostras e esta quantidade é armazenada na variável q . Uma vez que as falhas das entradas podem ocorrer fora da ordem definida, nem todas as circunstâncias de entrada produzirão tempos finitos e, por consequência, esta porta produz $\lim_{t \rightarrow \infty} PAND_{C_1, C_2, \dots, C_n}(t) < 1$. O Algoritmo 5.5 gera um total de 50.000 valores de tempo finitos que montam a distribuição de tempos de vida da porta PAND.

Algoritmo 5.5 PAND_Monte_Carlo (component_1, ..., component_m)

```

Input(component_1, ..., component_m)
n=0
q=0
times={}
While n < 50.000
    t1=InvF(component_1)
    ...
    tm=InvF(component_m)
    If t1 <= t2 <= ... <= tm then
        times=times+{tm}
        n=n+1
    Else
        times=times+{Infinity}
        q=q+1
    End_If
End_While
Output(times)

```

A Figura 5.2.21 mostra a função não confiabilidade da porta PAND e de suas entradas.

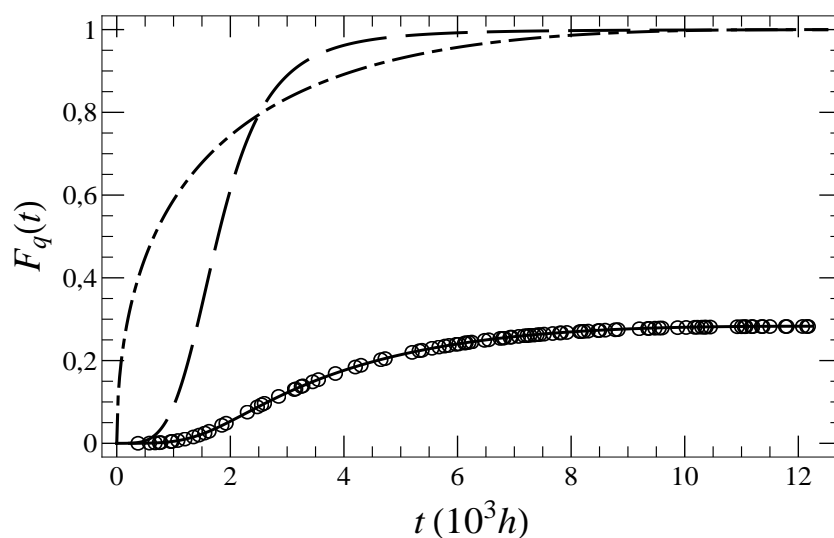


Figura 5.2.21: Função não confiabilidade $PAnd_{C_{10},C_9}(t)$ traçada em linha contínua, e não confiabilidades $F_{q,C_{10}}(t)$, da primeira entrada, com linha tracejada e $F_{q,C_9}(t)$, a segunda entrada com linha traço ponto. Os círculos são os resultados da não confiabilidade calculada por Monte Carlo.

As Figuras 5.2.22 e 5.2.23 mostram alguns exemplos de funções taxa de falha para uma porta PAND de duas entradas. A Tabela 5.10 mostra os componentes utilizados em cada gráfico, os formatos de suas taxas de falha e os formatos da taxa de falha PAND. Note que para todos os exemplos testados não houve alteração no formato da taxa de falha resultante PAND em decorrência da inversão de suas entradas. Os valores dos parâmetros utilizados estão na Tabela 5.1.

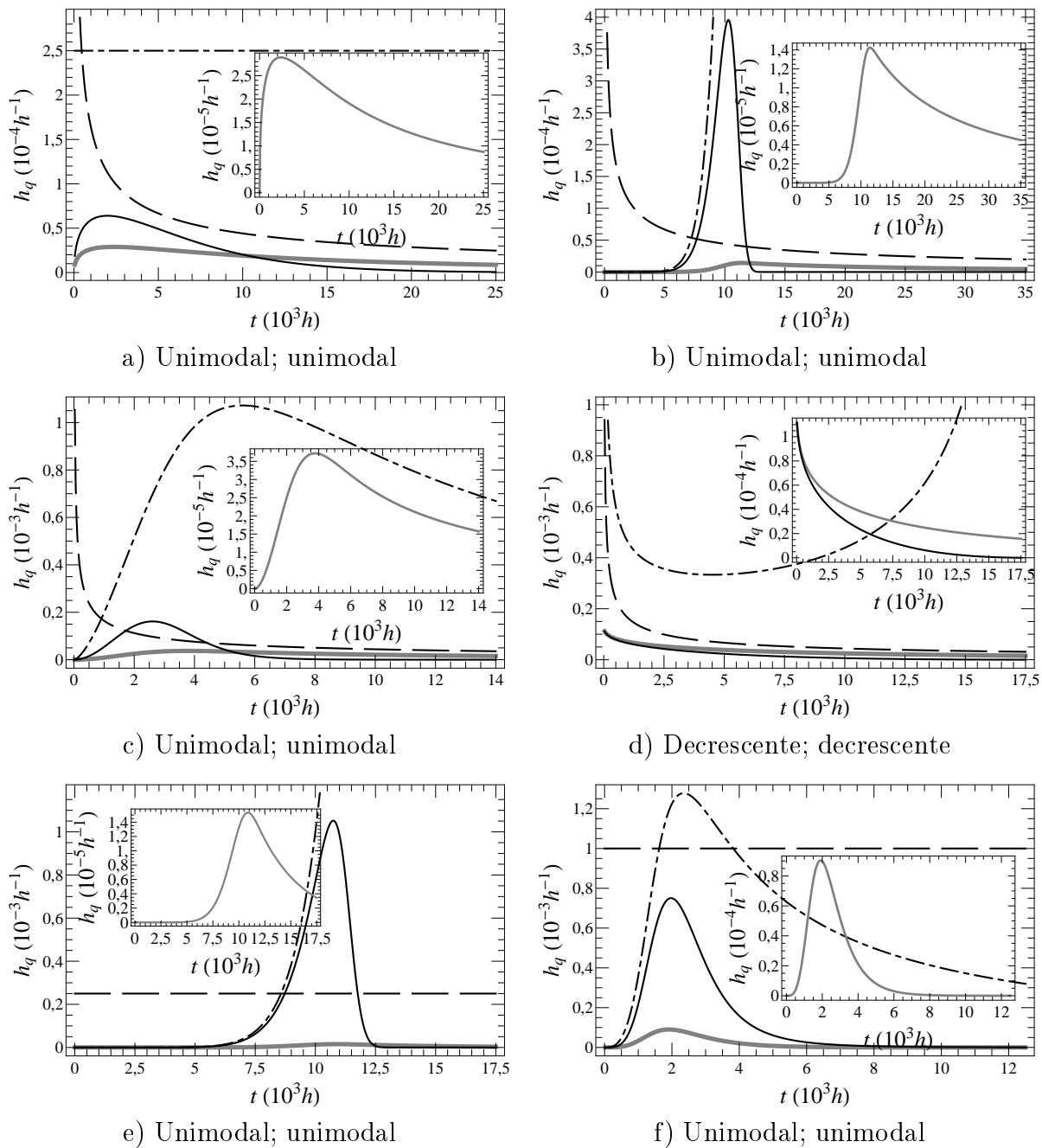
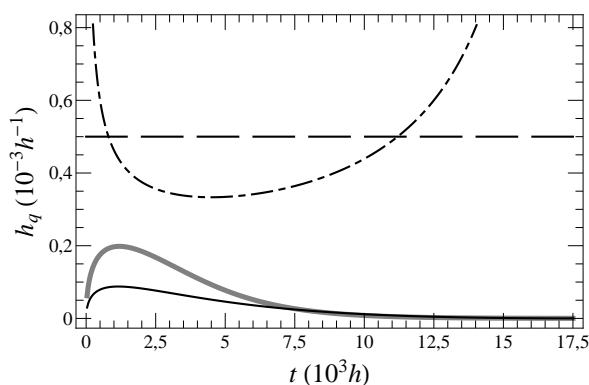
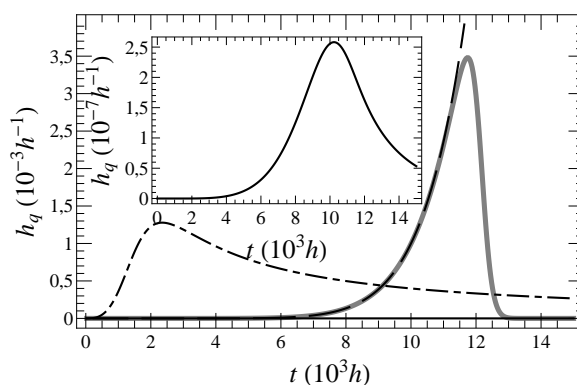


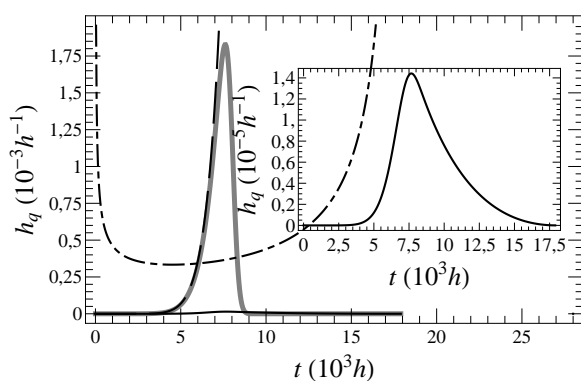
Figura 5.2.22: Funções taxa de falha para portas PAND de duas entradas. Em linha preta contínua, para a falha do componente em linha tracejada antes do componente em linha traço-ponto, em linha cinza contínua para a situação inversa. Os detalhes mostram as menores taxas de falha resultantes do gráfico principal. Os componentes das linhas tracejadas e traço-ponto são respectivamente: a) C_1 e C_2 ; b) C_1 e C_{14} ; c) C_1 e C_4 ; d) C_1 e C_5 ; e) C_2 e C_{14} e f) C_{11} e C_{10} .



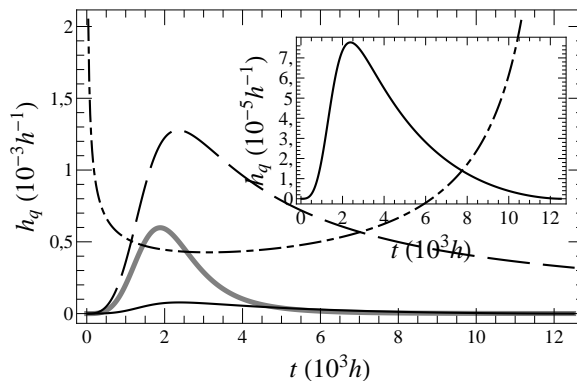
g) Unimodal; unimodal



h) Unimodal; unimodal



i) Unimodal; unimodal



j) Unimodal; unimodal

Figura 5.2.23: Extensão da Figura 5.2.22 para os casos g), h), i) e j). Os componentes das linhas tracejadas e traço-ponto de cada painel são respectivamente: g) C_{12} e C_5 ; h) C_{14} e C_{10} ; i) C_{15} e C_5 e j) C_{10} e C_9 .

Tabela 5.10: Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas PAND.

Painel	Entrada I (tracejada)	Entrada II (traço-ponto)	Taxa de falha
a)	C_1 decrescente	C_2 constante	Unimodal
b)	C_1 decrescente	C_{14} crescente	Unimodal
c)	C_1 decrescente	C_4 unimodal	Unimodal
d)	C_1 decrescente	C_5 formato de "U"	Decrescente
e)	C_2 constante	C_{14} crescente	Unimodal
f)	C_{11} constante	C_{10} unimodal	Unimodal
g)	C_{12} constante	C_5 formato de "U"	Unimodal
h)	C_{14} crescente	C_{10} unimodal	Unimodal
i)	C_{15} crescente	C_5 formato de "U"	Unimodal
j)	C_{10} unimodal	C_9 formato de "U"	Unimodal

5.2.6 SEQ – Sequência forçada (*Sequence Enforcing*)

A porta SEQ tem o funcionamento muito parecido com a porta PAND, entretanto na SEQ as falhas só podem ocorrer em uma única ordem específica. Então a porta SEQ retorna falha quando todas suas entradas falham. A função de não confiabilidade desta porta é

$$\begin{aligned}
 SEQ_{C_1, C_2, \dots, C_n}(t) = & \\
 & K_{SEQ} \int_{x_n=t_0_n}^{x_n=t} \int_{x_{n-1}=t_0_{n-1}}^{x_{n-1}=x_n} \dots \\
 \dots \int_{x_2=t_0_2}^{x_2=x_3} \int_{x_1=t_0_1}^{x_1=x_2} & f_{q,n}(x_n) f_{q,n-1}(x_{n-1}) \dots f_{q,2}(x_2) f_{q,1}(x_1) dx_1 dx_2 \dots \\
 & \dots dx_{n-1} dx_n, \\
 & t_{0_1} \leq t_{0_2} \leq \dots \leq t_{0_n},
 \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

onde

$$\begin{aligned}
 K_{SEQ} = \frac{1}{\int_{x_n=t_0_n}^{x_n=\infty} \dots \int_{x_2=t_0_2}^{x_2=x_n} \int_{x_1=t_0_1}^{x_1=x_2} f_{q,n}(x_n) \dots f_{q,2}(x_2) f_{q,1}(x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n} \\
 t_{0_1} \leq t_{0_2} \leq \dots \leq t_{0_n}
 \end{aligned} \tag{5.2.24}$$

O termo K_{SEQ} é um coeficiente de normalização para a porta. Este valor é necessário pela imposição de ordem das falhas inerente a SEQ. A derivada de $SEQ_{C_1, C_2, \dots, C_n}(t)$ em relação ao tempo é

$$\begin{aligned}
 SEQ'_{C_1, C_2, \dots, C_n}(t) = & \\
 & K_{SEQ} f_{q,n}(t) \int_{x_{n-1}=t_0_{n-1}}^{x_{n-1}=x_n} \int_{x_{n-2}=t_0_{n-2}}^{x_{n-2}=x_n} \dots \\
 \dots \int_{x_2=t_0_2}^{x_2=x_3} \int_{x_1=t_0_1}^{x_1=x_2} & f_{q,n-1}(x_{n-1}) f_{q,n-2}(x_{n-2}) \dots f_{q,2}(x_2) f_{q,1}(x_1) dx_1 dx_2 \dots \\
 & \dots dx_{n-2} dx_{n-1}, \\
 & t_{0_1} \leq t_{0_2} \leq \dots \leq t_{0_n},
 \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

A Figura 5.2.24 mostra a representação simbólica da porta SEQ.

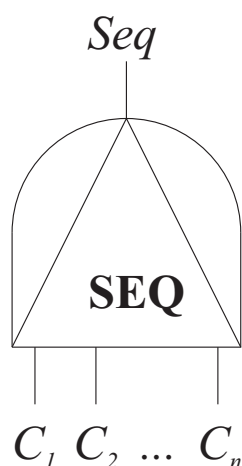


Figura 5.2.24: Representação simbólica da porta SEQ.

O Algoritmo 5.6 recebe os parâmetros de todas as entradas da porta por meio das variáveis $component_1, \dots, component_m$ e executa o ciclo de geração dos tempos aleatórios. Os tempos são verificados a respeito de terem a mesma ordem especificada pelas entradas da porta. Para cada verificação positiva, o maior tempo gerado é acrescentado na lista $times$. O ciclo é repetido até que ocorram 50.000 verificações positivas (nisto reside a diferença para o Algoritmo 5.5 da porta PAND), então a distribuição de tempos de falha é retornada por meio da variável $times$.

Algoritmo 5.6 SEQ_Monte_Carlo ($component_1, \dots, component_m$)

Input($component_1, \dots, component_m$)

$n=0$

$times=\{\}$

While $n < 50.000$

$t1=InvF(component_1)$

 ...

$tm=InvF(component_m)$

 If $t1 \leq t2 \leq \dots \leq tm$ then

$times=times+\{tm\}$

$n=n+1$

 End_If

End_While

Output($times$)

A Figura 5.2.25 mostra a não confiabilidade de uma porta SEQ e de suas entradas.

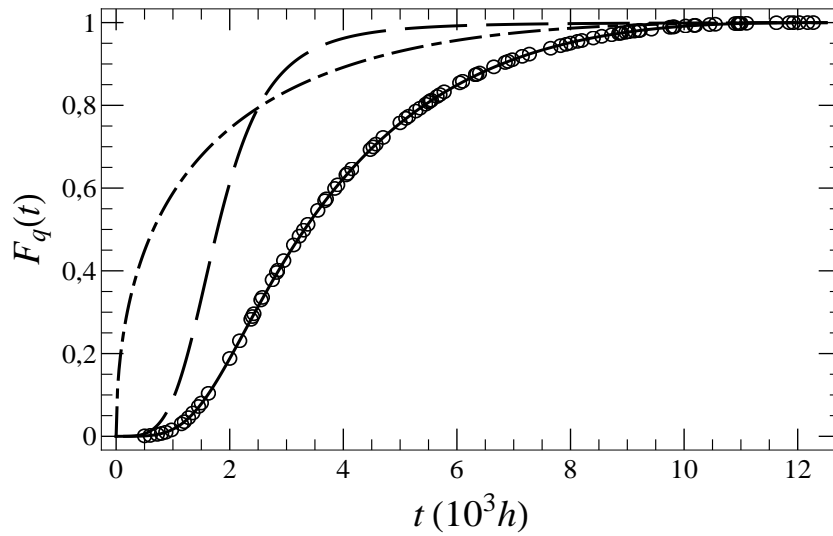


Figura 5.2.25: Função não confiabilidade $SEQ_{C_{10}, C_9}(t)$ em linha contínua, não confiabilidade do primeiro componente $F_{q, C_{10}}(t)$ traçada em linha tracejada e do segundo componente $F_{q, C_9}(t)$ em linha traço-ponto. Os círculos são os valores de não confiabilidade calculados por simulação de Monte Carlo.

As Figuras 5.2.26 e 5.2.27 mostram, para alguns exemplos, as funções taxa de falha para portas SEQ e suas entradas. Os parâmetros das distribuições estão na Tabela 5.1. A Tabela 5.11 mostra os formatos das funções taxa de falha dos componentes e das saídas das portas SEQ.

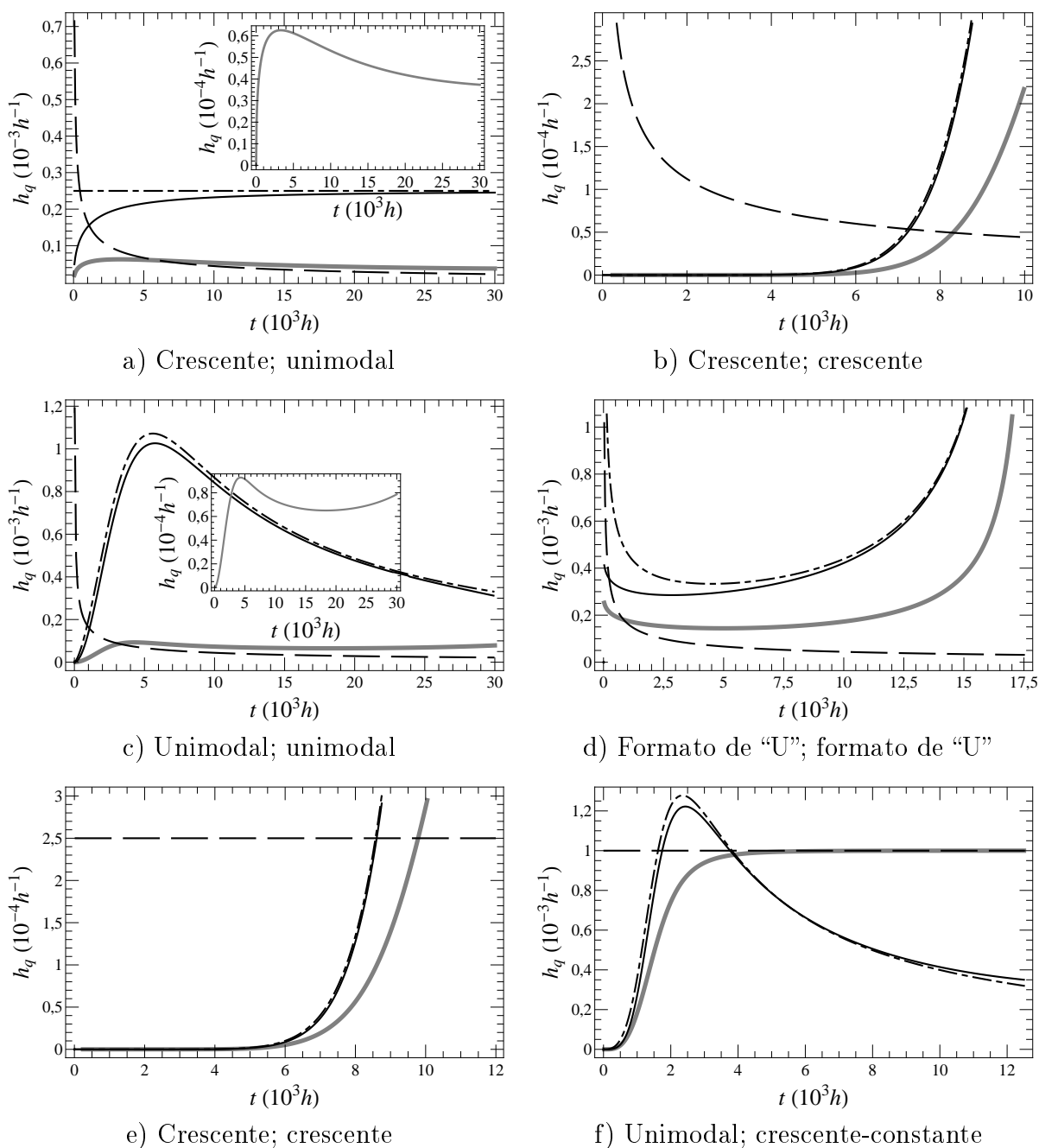


Figura 5.2.26: Funções taxa de falha de dois componentes e da porta SEQ. O primeiro componente em linha tracejada e o segundo com linha traço ponto. A função taxa de falha resultante da SEQ traçada em linha preta contínua se refere a porta em que ocorre a falha do primeiro componente antes do segundo. A curva contínua em cinza mostra a taxa de falha SEQ para a falha do segundo componente antes do primeiro. O detalhe mostra o gráfico da menor taxa de falha do gráfico principal. Os componentes das taxas de falha em linhas tracejada e traço-ponto são: a) C_1 e C_2 ; b) C_1 e C_{14} ; c) C_1 e C_4 ; d) C_1 e C_5 ; e) C_2 e C_{14} e f) C_{11} e C_{10}

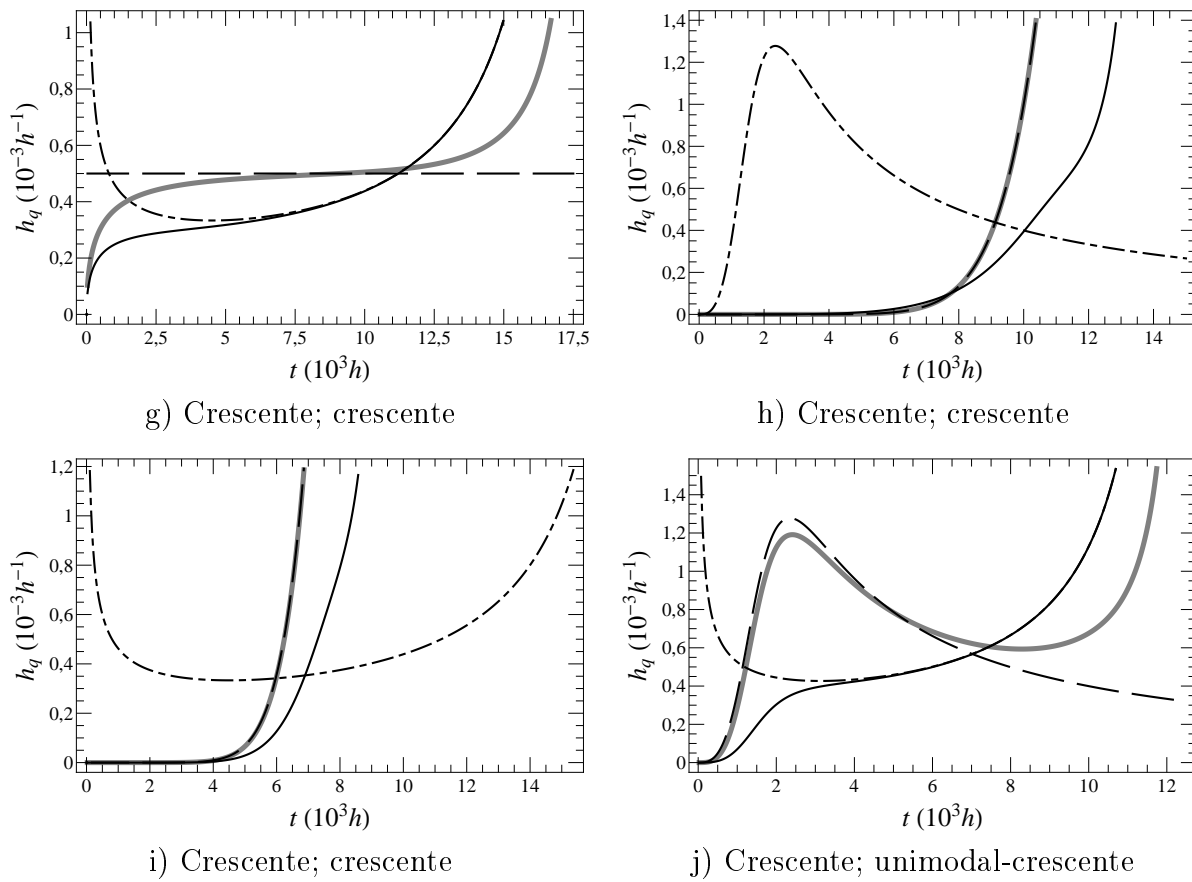


Figura 5.2.27: Extensão da Figura 5.2.26 para os casos g), h), i) e j). Os componentes das taxas de falha em linhas tracejada e traço-ponto são: g) C_{12} e C_5 ; h) C_{14} e C_{10} ; i) C_{15} e C_5 e j) C_{10} e C_9 .

Tabela 5.11: Formatos da função taxa de falha das entradas e saída de portas SEQ.

Painel	Entrada I	Entrada II	Taxa de falha I depois II	Taxa de falha II depois I
a)	C_1 decrescente	C_2 constante	Crescente	Unimodal
b)	C_1 decrescente	C_{14} crescente	Crescente	Crescente
c)	C_1 decrescente	C_4 unimodal	Unimodal	Unimodal
d)	C_1 decrescente	C_5 formato de "U"	Formato de "U"	Formato de "U"
e)	C_2 constante	C_{14} crescente	Crescente	Crescente
f)	C_{11} constante	C_{10} unimodal	Unimodal	Crescente-constante
g)	C_{12} constante	C_5 formato de "U"	Crescente	Crescente
h)	C_{14} crescente	C_{10} unimodal	Crescente	Crescente
i)	C_{15} crescente	C_5 formato de "U"	Crescente	Crescente
j)	C_{10} unimodal	C_9 formato de "U"	Crescente	Unimodal-crescente

5.2.7 WSP – Sobressalente (*Warm spare*)

Uma porta WSP modela a situação em que um componente principal pode ser substituído por um sobressalente ou mais sobressalentes com a mesma funcionalidade. A porta WSP retorna falha se o componente principal falha e todos os seus sobressalentes falham ou estão indisponíveis. Um componente reserva torna-se indisponível se ele for compartilhado por outra porta WSP e estiver em uso por ela. O reserva também pode falhar mesmo sem estar em operação, embora a sua propensão em falhar nesta circunstância deva ser menor, uma vez que está em estado de dormência (veja Bobbio et al. (2008)). A Figura 5.2.28 mostra a representação simbólica de uma porta WSP.

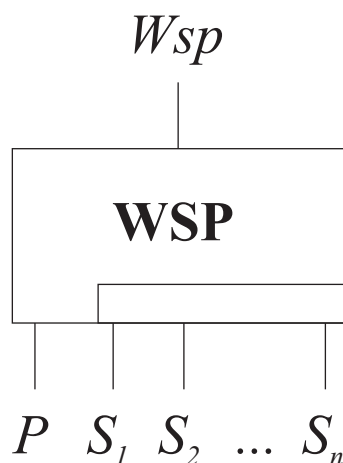


Figura 5.2.28: Representação simbólica da porta WSP.

Assumindo que a taxa de falha de um componente em operação é λ , a sua taxa de falha fora de operação é $\alpha\lambda$, onde α é o fator de dormência e está limitado por $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Os componentes reserva são chamados de quentes se $\alpha = 1$ e frios se $\alpha = 0$. Uma vez que a distribuição q -Weibull tem taxa de falha variável, o parâmetro η_d é usado para controlar a escala de tempo e expressar a dormência como

$$\eta_d = \frac{\eta}{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.2.26)$$

onde η_d é o η com dormência. Esta definição não cobre os componentes reservas frios, mas isto pode ser modelado diretamente na função de falha acumulada tornando-a nula para sobressalentes em dormência.

A função densidade de probabilidade do componente reserva S_i em estado de dormência é

$$f_{S_i dor_\alpha}(t) = \frac{\beta_i (2 - q_i)}{\left(\frac{\eta_i}{\alpha} - t_{0_i}\right)^{\beta_i}} [t - t_{0_i}]_+^{\beta_i - 1} \exp_{q_i} \left[- \left(\frac{[t - t_{0_i}]_+}{\frac{\eta_i}{\alpha} - t_{0_i}} \right)^{\beta_i} \right], \quad (5.2.27)$$

onde S_i é o i -ésimo componente reserva da porta WSP, α é o fator de dormência, β_i, η_i, t_{0_i} e q_i são os parâmetros da distribuição q -Weibull do i -ésimo componente reserva e $[x]_+$ é o maior dos valores: x ou 0.

A análise da falha da porta WSP foi dividida em duas partes. Na primeira, o componente reserva falha em estado de dormência, antes do componente principal. Na segunda parte, o componente principal falha e o sobressalente falha posteriormente. A Tabela 5.12 mostra os dois casos possíveis.

Tabela 5.12: Possíveis situações das falhas dos componentes.

Caso	Falha anterior	Falha posterior
1	S_{1dor}	P
2	P	S_{1atv}

A Figura 5.2.29 mostra as funções densidade de probabilidade para o caso 1.

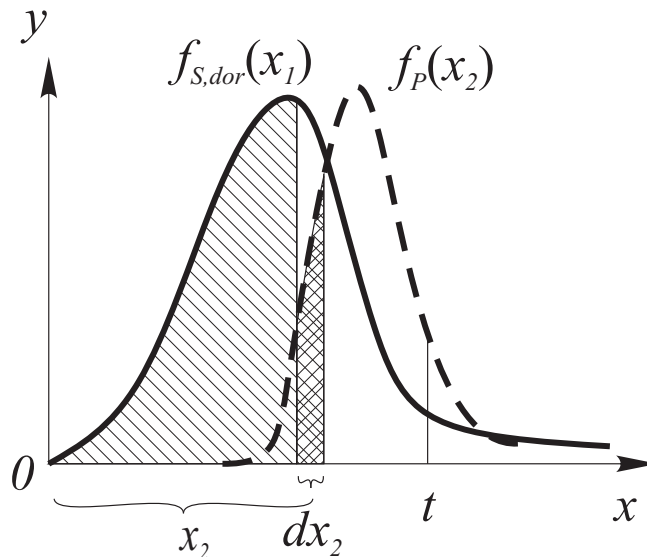


Figura 5.2.29: Função densidade de probabilidade do componente reserva no estado de dormência, em linha contínua, e a função densidade para o componente principal traçada em linha tracejada.

A Figura 5.2.30 as duas funções densidade de probabilidade para o caso 2.

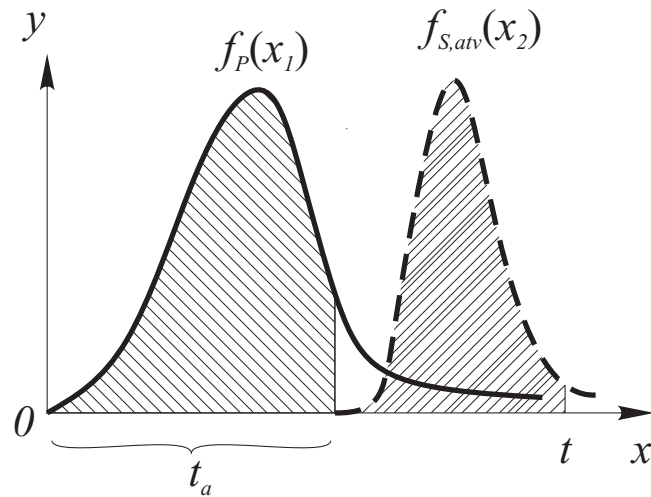


Figura 5.2.30: Função densidade de probabilidade para a falha do componente principal traçada em linha contínua e a f.d.p. para o componente reserva em estado ativado traçada em linha tracejada. O componente reserva entra em operação no instante de tempo t_a (tempo de ativação) em que o principal falha.

A falha da porta WSP ocorre se as falhas se processam conforme o caso 1 ou o caso 2. Considerando que os eventos falha do sobressalente em estado de dormência e posterior falha do componente principal em estado ativo (caso 1) e falha do componente principal antes da falha do componente sobressalente em estado ativo (caso 2) são eventos independentes, a probabilidade de falha WSP pode ser escrita como

$$WSP_{P_1, S_1}(t) = 1 - [1 - WSP_{P_1, S_1}^{S \rightarrow P}(t)] [1 - WSP_{P_1, S_1}^{P \rightarrow S}(t)], \quad (5.2.28)$$

onde $WSP_{P_1, S_1}^{S \rightarrow P}(t)$ é a não confiabilidade em t especificada para o caso 1 e $WSP_{P_1, S_1}^{P \rightarrow S}(t)$ é o mesmo para o caso 2.

Pode-se recorrer à subseção 5.2.5 para definir $WSP_{P_1, S_1}^{S \rightarrow P}(t)$ como a probabilidade do sobressalente falhar antes do principal, então a sua expressão é

$$\begin{aligned} WSP_{P_1, S_1}^{S \rightarrow P}(t) &= \int_{x_2=t_0_2}^{x_2=t} \int_{x_1=t_0_1}^{x_1=x_2} f_{q,P}(x_2) f_{S_1 \text{ dor}_\alpha}(x_1) dx_1 dx_2, \quad t_0_1 \leq t_0_2 \\ &= \int_{x_2=t_0_2}^{x_2=t} f_{q,P}(x_2) F_{S_1 \text{ dor}_\alpha}(x_2) dx_2, \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

onde $f_{q,P}(t_a)$ é a f.d.p. da falha do componente principal. A probabilidade de falha para o caso 2 é calculada de forma similar. A diferença é que o sobressalente só entra em estado

operacional depois da falha do componente principal, daí a necessidade de mover o tempo inicial para um valor adequado fazendo $x_2 - x_1$ como argumento de $f_{S_{1atv}}(\bullet)$ e não apenas x_2 como a analogia com o caso 1 sugere.

$$\begin{aligned} WSP_{P_1, S_1}^{P \rightarrow S}(t) &= K_{WSP} \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=t} f_{q,P}(x_1) \left[\int_{x_2=x_1}^{x_2=t} f_{S_{1atv}}(x_2 - x_1) dx_2 \right] dx_1 \\ &= K_{WSP} \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=t} f_{q,P}(x_1) F_{S_{1atv}}(t - x_1) dx_1, \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

com

$$K_{WSP} = \frac{1}{\int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=\infty} f_{q,P}(x_1) F_{S_{1atv}}(t - x_1) dx_1}. \quad (5.2.31)$$

A função densidade para a porta WSP é (veja no Apêndice A subseção A.9.1):

$$\begin{aligned} WSP'_{P_1, S_1}(t) &= f_{q,P}(t) F_{S_{1dor\alpha}}(t) \times \\ &\quad \left[1 - K_{WSP} \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=t} f_{q,P}(x_1) F_{S_{1atv}}(t - x_1) dx_1 \right] + \\ &\quad \left[1 - \int_{x_2=t_{0_2}}^{x_2=t} f_{q,P}(x_2) F_{S_{1dor\alpha}}(x_2) dx_2 \right] \times \\ &\quad K_{WSP} \left\{ \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=t} f_{q,P}(x_1) f_{S_{1atv}}(t - x_1) dx_1 + f_{q,P}(t) F_{S_{1atv}}(0) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

O Algoritmo 5.7 gera a distribuição dos tempos de vida a partir da repetição de 50.000 vezes do ciclo de geração de tempo da porta WSP. Cada ciclo compreende a geração de 3 tempos aleatórios: tp que representa o tempo de funcionamento do componente principal, $tdor$ que significa o tempo de falha do sobressalente em estado de dormência e $tatv$ que é o tempo de falha do sobressalente em estado ativo. Este último valor é gerado pela soma de dois outros valores aleatórios: tp e o tempo de falha do sobressalente em estado ativo. Isto se deve ao fato de o componente sobressalente entrar em operação apenas depois da falha do principal.

Se os tempos em ordem crescente forem $tdor$, tp e $tatv$, ou seja, o componente sobressalente falhou em dormência antes do componente principal e o tempo de falha do sobressalente ativo foi maior que os anteriores, o resultado do ciclo de execução será tp .

Em qualquer outra combinação de posições, o resultado será $tatv$ e o ciclo de execução se encerrará.

Algoritmo 5.7 WSP_Monte_Carlo (spare_dormancy, spare_active, principal)

Input(spare_dormancy, spare_active, principal)

n=0

While n<50.000

 tp=InvF(principal)

 tdor=InvF(spare_dormancy)

 tatv=InvF(principal)+InvF(spare_active)

 times={}

 If tdor < tp then

 times=times+{Min(tp,tatv)}

 Else

 times=times+{tatv}

 End_If

 n=n+1

End_While

Output(times)

A Figura 5.2.31 mostra curvas de não confiabilidade para um porta WSP e suas entradas.

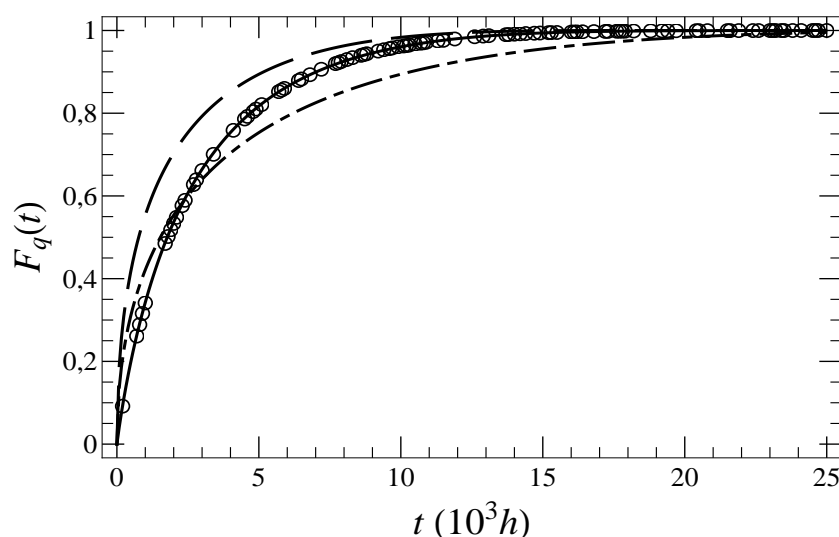


Figura 5.2.31: Função não confiabilidade $WSP_{C_{24},C_{24}}(t)$ para componente principal e sobressalente iguais a C_{24} traçada em linha contínua, função não confiabilidade do componente ativo $F_{q,C_{24}atv}(t)$ em linha tracejada e do componente em dormência $F_{q,C_{24}dor}(t)$ em linha traço-ponto. Os círculos mostram a não confiabilidade WSP calculada por simulação de Monte Carlo. Os parâmetros utilizados estão na Tabela 5.2.

As Figuras 5.2.32, 5.2.33, 5.2.34, 5.2.35 e 5.2.36 a seguir são referentes a portas WSP

com um componente principal e um componente sobressalente com os mesmos parâmetros de distribuição *q*-Weibull. Em todos os gráficos, a função taxa de falha $WSP_{C_i, C_i}(t)$ é traçada em linha contínua, a taxa de falha $h_{q, C_i, atv}(t)$ do componente principal *i* (ou sobressalente ativo) em linha tracejada e taxa de falha do sobressalente em dormência $h_{q, C_i, dor}(t)$ é desenhada com linha traço ponto. Para a Figura 5.2.32, foram usados os parâmetros do componente C_{20} , ou seja $i = 20$; para a Figura 5.2.33, o componente usado é o C_{21} ($i = 21$) e assim por diante até a Figura 5.2.36 onde $i = 24$. Os valores dos parâmetros de todos os componentes são mostrados na Tabela 5.2.

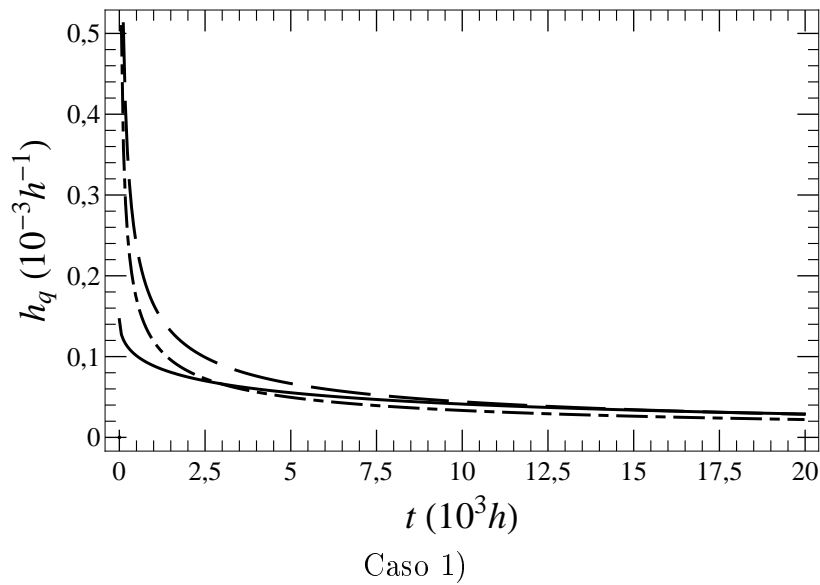


Figura 5.2.32: Funções taxa de falha para porta WSP (linha contínua) de componentes principal e reserva iguais a C_{20} (ativo em linha tracejada e dormente em linha traço-ponto). As funções taxa de falha dos componentes e da porta têm o mesmo formato decrescente. A função taxa de falha WSP se mantém abaixo da taxa de falha do componente ativo para tempos menores e se aproxima desta para tempos maiores

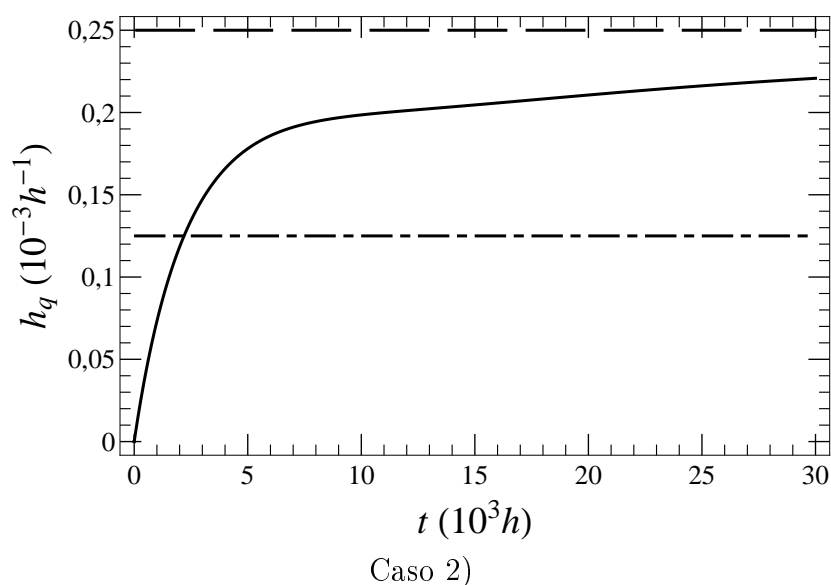


Figura 5.2.33: Funções taxa de falha para porta WSP (linha contínua) de componentes principal e reserva iguais a C_{21} (ativo em linha tracejada e dormente em linha traço-ponto). Embora o formato da função taxa de falha dos componentes (ativo em linha tracejada e dormente em linha traço-ponto) seja constante, o formato da taxa de falha WSP é crescente (linha contínua) se aproximando da taxa do componente principal ativo para tempos maiores.

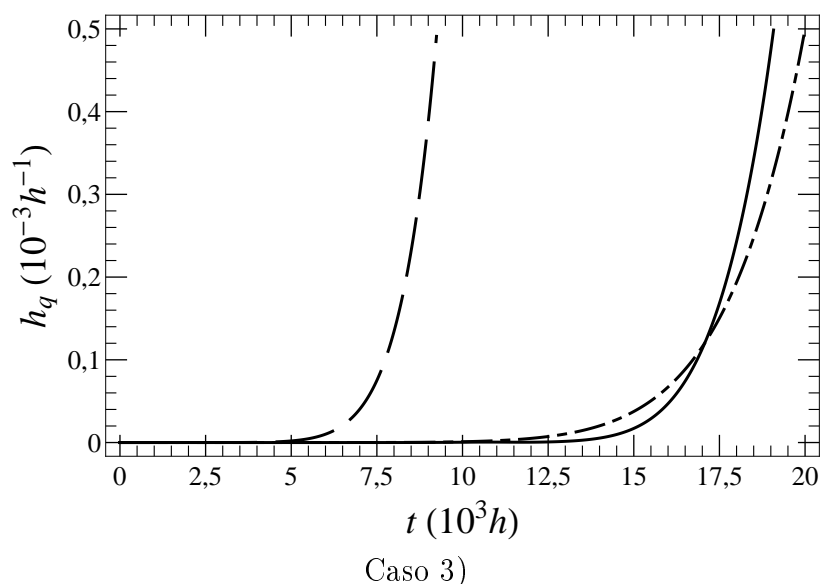
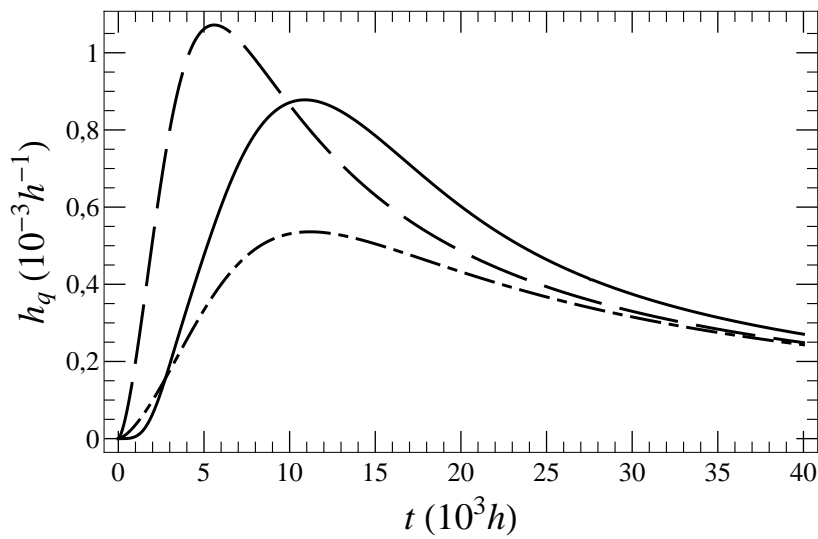
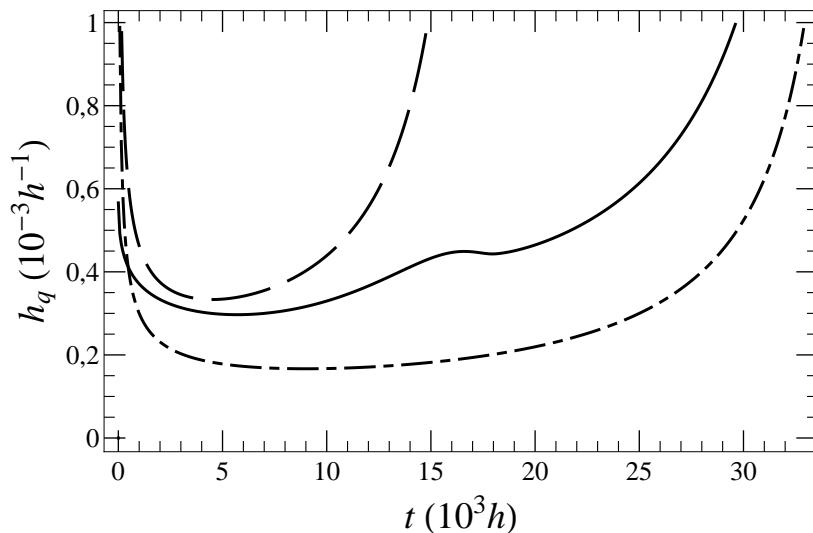


Figura 5.2.34: Funções taxa de falha para porta WSP (linha contínua) de componentes principal e reserva iguais a C_{22} (ativo em linha tracejada e dormente em linha traço-ponto). Todos os formatos das funções taxa de falha são crescentes. A taxa de falha WSP se mantém abaixo da taxa de falha do componente ativo.



Caso 4)

Figura 5.2.35: Funções taxa de falha para porta WSP (linha contínua) de componentes principal e reserva iguais a C_{23} (ativo em linha tracejada e dormente em linha traço-ponto). Todos os formatos de taxa de falha são unimodais. A taxa de falha resultante tornou-se, para alguns valores de tempo, superior a taxa de falha do componente ativo embora o valor máximo da taxa de falha WSP seja inferior a taxa de sua entrada em estado ativo.



Caso 5)

Figura 5.2.36: Funções taxa de falha para porta WSP (linha contínua) de componentes principal e reserva iguais a C_{24} (ativo em linha tracejada e dormente em linha traço-ponto). A distorção encontrada entre $15 \times 10^3 h$ e $20 \times 10^3 h$ se deve ao valor limite $t_{lim} = 18.000 h$ (veja a Tabela 5.2) que significa o maior tempo de funcionamento do componente principal e o maior instante de tempo em que o sobressalente entra em operação. A função da taxa de falha resultante tem formato de “U” distorcido.

A modelagem da porta WSP permite cobrir situações nas quais os componentes principal e reserva não são iguais, por exemplo $WSP_{C_{23},C_{24}}(t)$ é uma porta onde o componente principal é o C_{23} e o sobressalente é o C_{24} . A Figura 5.2.37 mostra o gráfico da função não confiabilidade para este exemplo.

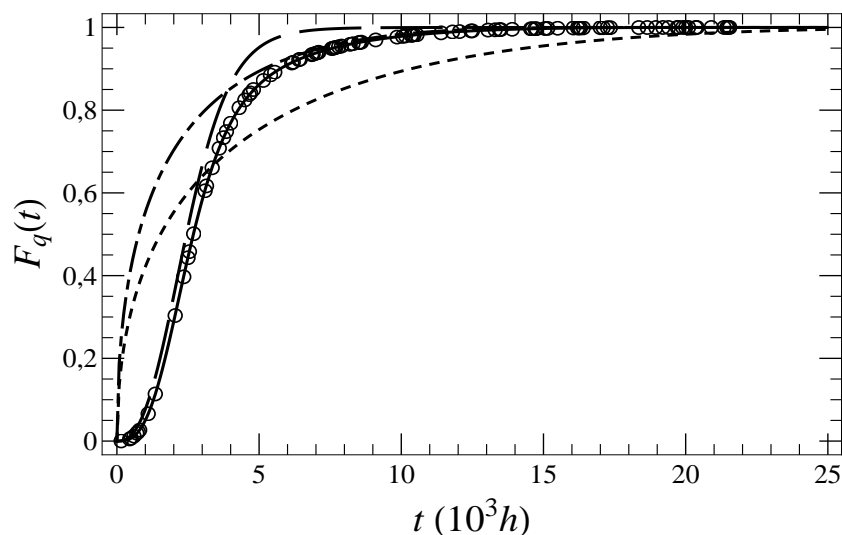
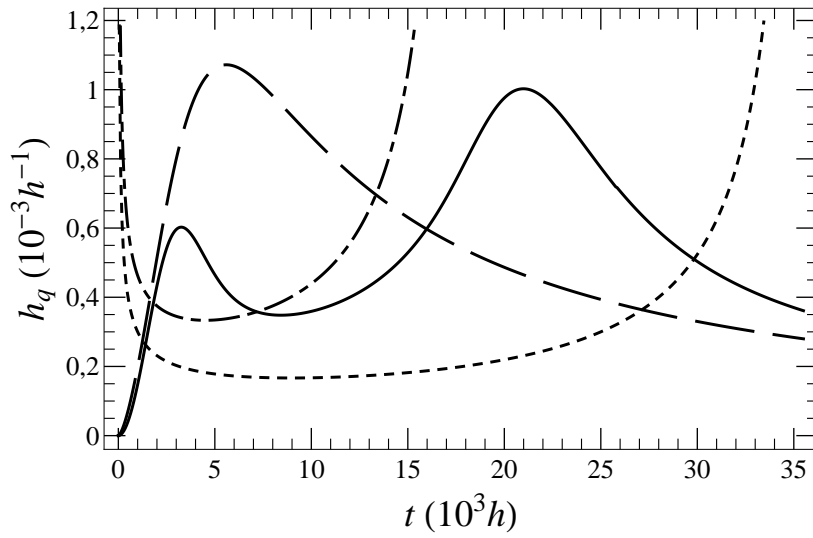


Figura 5.2.37: $WSP_{C_{23},C_{24}}(t)$ em linha contínua, $F_{q,C_{23}atv}(t)$ representando a não confiabilidade do componente principal em linha tracejada, $F_{q,C_{24}atv}(t)$ denotando a não confiabilidade do componente reserva para o estado ativo em linha traço-ponto e $F_{q,C_{24}dor}(t)$, o mesmo para estado dormente com linha pontilhada. Os círculos representam a não confiabilidade da porta calculada por simulação de Monte Carlo.

A Figura 5.2.38 mostra as curvas de taxa de falha da porta $WSP_{C_{23},C_{24}}$ e suas entradas.



Caso 6)

Figura 5.2.38: Função taxa de falha para a porta $WSP_{C_{23},C_{24}}$ traçada em linha contínua (bimodal) resultante do componente principal C_{23} cuja taxa de falha (unimodal) é mostrada em linha tracejada para seu estado ativo, e o componente sobressalente C_{24} tem sua taxa de falha (formato de “U”) para estado ativo em linha traço-ponto e para dormência em linha pontilhada. Os valores dos parâmetros são mostrados na Tabela 5.2.

A formulação matemática ainda permite expressar a falha do componente reserva com dois conjuntos de parâmetros distintos: um para a falha no estado ativo e outro para modelar a falhar em dormência. Esta funcionalidade permite cobrir a falha do componente em estado ativo com um modo de falha diferente do estado dormente, não só em escala de tempo, mas também no formato da função taxa de falha.

Uma porta WSP pode ser definida com dois ou mais componentes sobressalentes. Para o caso de dois reservas, considere que o componente principal e o primeiro reserva funcionam como um novo componente principal numa nova porta WSP. Esta nova porta teria como único reserva, o segundo componente sobressalente. Em outras palavras, a formulação de uma porta WSP com um único reserva substitui a função de falha acumulada de um novo componente principal. Este procedimento pode ser repetido para modelar portas com 3 ou mais sobressalentes.

Para dois sobressalentes a não confiabilidade WSP2S é

$$WSP2S_{P_1, S_1, S_2}(t) = 1 - \left[1 - WSP_{[P_1, S_1], S_2}^{S_2 \mapsto [P_1, S_1]}(t) \right] \left[1 - WSP_{[P_1, S_1], S_2}^{[P_1, S_1] \mapsto S_2}(t) \right], \quad (5.2.33)$$

onde

$$WSP_{[P_1, S_1], S_2}^{S_2 \mapsto [P_1, S_1]}(t) = \int_{x_2=t_{0_2}}^{x_2=t} WSP'_{P_1, S_1}(x_2) F_{S_2 dor_\alpha}(x_2) dx_2 \quad (5.2.34)$$

e

$$WSP_{[P_1, S_1], S_2}^{[P_1, S_1] \mapsto S_2}(t) = K_{WSP2S} \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=t} WSP'_{P_1, S_1}(x_1) F_{S_2 atv}(t - x_1) dx_1 \quad (5.2.35)$$

com

$$K_{WSP2S} = \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=\infty} WSP'_{P_1, S_1}(x_1) F_{S_2 atv}(t - x_1) dx_1. \quad (5.2.36)$$

O Algoritmo 5.8 cria a distribuição de 50.000 tempos de vida para uma porta WSP com dois componentes sobressalentes. Cada tempo é criado de forma similar ao Algoritmo 5.7 com a diferença que o tempo do componente principal é criado com um ciclo do mesmo Algoritmo 5.7 (com os componentes principal e primeiro sobressalente). Apesar de ser possível definir o Algoritmo 5.8 com recursividade, a forma estruturada não recursiva foi preferida para maior clareza.

Algoritmo 5.8 WSP2S_Monte_Carlo (spare_dormancy_1, spare_active_1, spare_dormancy_2, spare_active_2, principal)

```

Input(spare_dormancy_1, spare_active_1, spare_dormancy_2, spare_active_2,
      principal)
Module_WSP(spare_dormancy_1, spare_active_1, principal):=
  tp=InvF(principal)
  tdor_1=InvF(spare_dormancy_1)
  tatv_1=InvF(principal)+InvF(spare_active_1)
  If tdor_1 < tp then
    time=Min(tp,tatv_1)
  Else
    time=tatv_1
  End_If
  Output(time)
End Module_WSP
n=0
While n<50.000
  tmod=Module_WSP(spare_dormancy_1, spare_active_1, principal)
  tdor_2=InvF(spare_dormancy_2)
  tatv_2=Module+InvF(spare_active_2)
  times={}
  If tdor_2 < tmod then
    times=times+{Min(tmod,tatv_2)}
  Else
    times=times+{tatv_2}
  End_If
  n=n+1
End_While
Output(times)

```

A Figura 5.2.39 mostra a não confiabilidade para uma porta WSP com dois componentes sobressalentes.

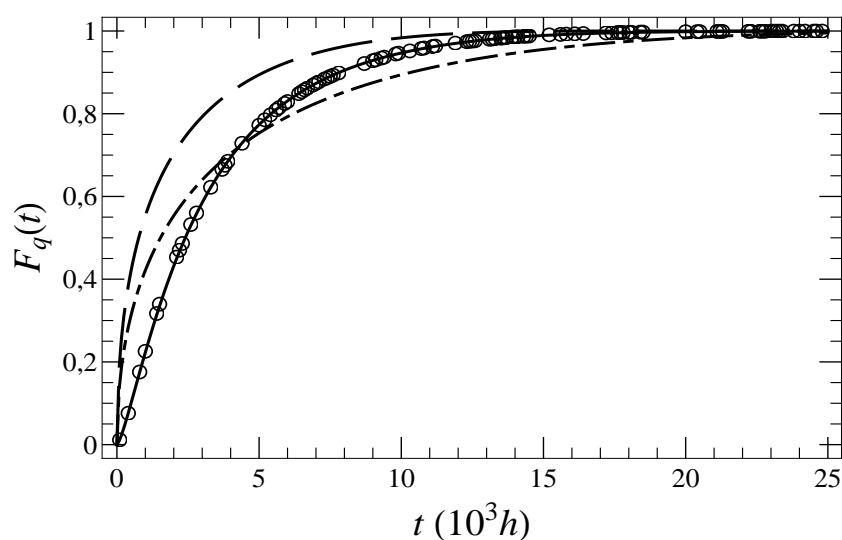


Figura 5.2.39: Função não confiabilidade $WSP2S_{C_{24},C_{24},C_{24}}(t)$ traçada em linha contínua, não confiabilidade, $F_{q,C_{24}atv}(t)$ em linha tracejada, $F_{q,C_{24}dor}(t)$ em linha traço-ponto e círculos representam a não confiabilidade calculada por Monte Carlo.

Os valores de não confiabilidade resultante são inferiores aos valores do componente reserva até aproximadamente 4.000 h e são sempre inferiores à não confiabilidade do componente em estado ativo. Os parâmetros utilizados nos gráficos estão na Tabela 5.2. A Figura 5.2.40 mostra as funções taxa de falha.

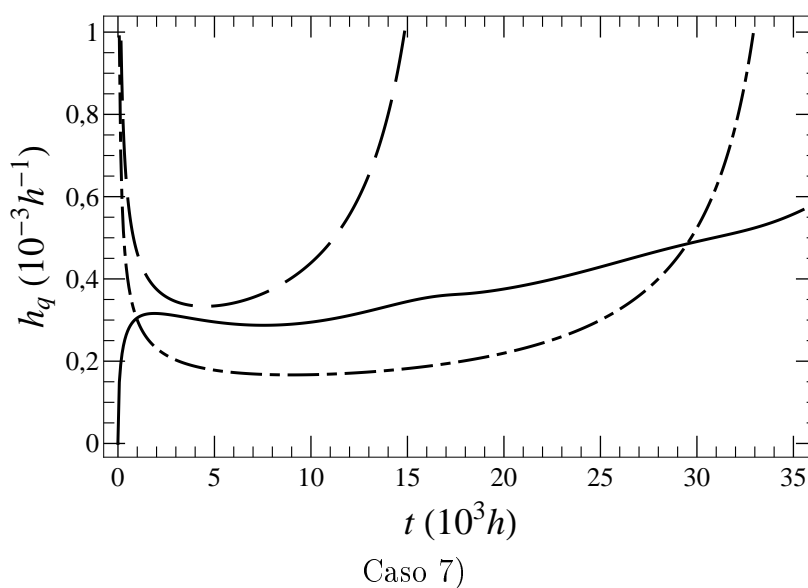


Figura 5.2.40: Funções taxa de falha da porta $WSP2S_{C_{24},C_{24},C_{24}}$ (formato de subida em degrau distorcido) traçada em linha contínua, do componente C_{24} (formato de "U") em estado ativo em linha tracejada e do mesmo componente em estado de dormência em linha traço-ponto (formato de "U").

5.3 Conclusões

Árvore de falha dinâmica é uma ferramenta importante para a análise de confiabilidade pois permite considerar o estado falho dos componentes e também a ordem em que a falha se processa.

Este capítulo mostrou o cálculo exato de cada uma das portas de uma árvore de falha dinâmica: AND, OR, KofN, PDep, PAND, SEQ e WSP. Para cada porta foi desenvolvido um algoritmo e para a geração de tempos por simulação de Monte Carlo. Em todos os casos apresentados, a simulação de Monte Carlo se mostrou adequada para substituir o cálculo analítico conforme inspeção das Figuras 5.2.4, 5.2.8, 5.2.12, 5.2.16, 5.2.21, 5.2.25, 5.2.31, 5.2.37 e 5.2.39.

Dois componentes foram usados para exemplificar o formato da taxa de falha das portas AND, OR, PDep, PAND e SEQ. Em cada porta foram combinados 2 formatos diferentes nas entradas com a finalidade de determinar os formatos resultantes (10 para AND e OR e 20 para PDep, PAND e SEQ devido às sequências possíveis das falhas das entradas). Para a porta KofN foram utilizados 3 formatos diferentes de taxa de falha nas entradas perfazendo também um total de 10 formatos. Para a porta WSP foram criados 7 casos diferentes. Em 5 deles um componente principal foi associado a um reserva com mesmo formato de taxa de falha. Em outro, os componentes principal e reserva tiveram formatos diferentes de taxa de falha e, no último, dois componentes reserva foram associados a um principal, todos com o mesmo formato de taxa de falha. Com estes exemplos, vários formatos de taxa de falha resultante foram encontrados incluindo praticamente todos os tipos de formato classificados em Murthy, Xie e Jiang (2004, p. 48) (que inclui várias de modificações do Weibull como parâmetros dependentes do tempo, exponenciais aninhadas e Weibull exponenciada) conforme a Figura 5.3.1.

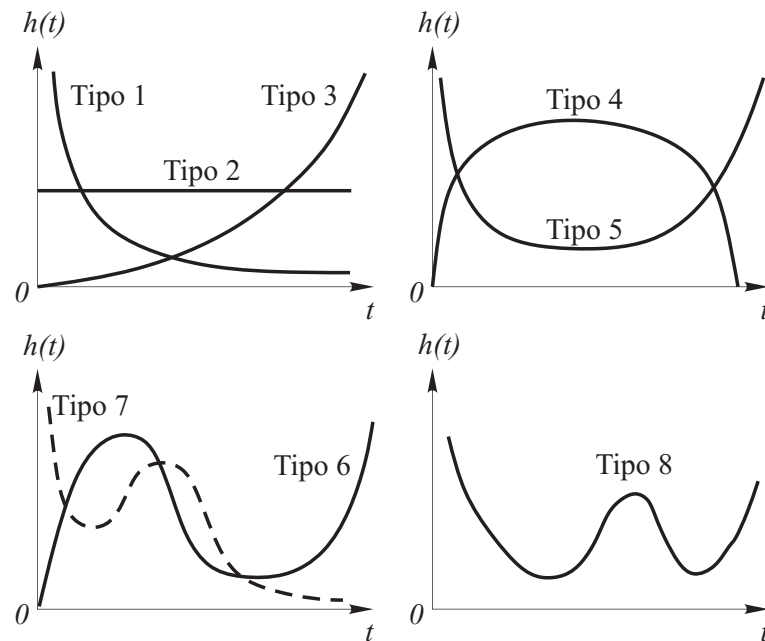


Figura 5.3.1: Formatos de taxa de falha. Figura refeita a partir de Murthy, Xie e Jiang (2004, p. 48)

A porta que modela a dependência probabilística PDep com apenas 2 entradas (e consequentemente 6 parâmetros) tem taxas de falha resultantes que englobam 10 formatos diferentes:

- a) decrescente;
- b) decrescente-constante;
- c) decrescente-unimodal;
- d) constante-crescente;
- e) unimodal;
- f) unimodal deslocada;
- g) unimodal-crescente;
- h) bimodal;
- i) formato de “U”;
- j) formato de “W”.

Este modelo parece ter sido o mais versátil quando são comparados seus resultados ao número de parâmetros necessários para sua utilização. Trabalhos futuros poderão utilizar as funções densidade e acumulada deduzidas segundo o formalismo PDep como uma distribuição derivada da q -Weibull.

A variedade de formatos de taxa de falha encontrados não é creditada a modificações no modelo da distribuição probabilística encontrada, mas a flexibilidade do modelo

q -Weibull em conjunto com a capacidade da Árvore de falha dinâmica em representar associações combinacionais e prioritárias.

Os formatos de taxa de falha unimodal e banheira podem ser obtidos a partir de duas entradas, uma com taxa de falha decrescente, e outra crescente, em portas AND e OR respectivamente. Isto acarreta no uso de mais 3 parâmetros quando em comparação com a distribuição q -Weibull que é capaz de proporcionar estes resultados com apenas 3 parâmetros.

A Tabela 5.13 mostra alguns dos formatos de taxa de falha possíveis devido a implementação da distribuição q -Weibull em AFD.

Tabela 5.13: Alguns formatos resultantes de aplicação da q -Weibull em AFD.

Formato	Porta	Casos
Bimodal	KofN	c*) d) f) g) i)
Bimodal-crescente	KofN	j)
Crescente-constante	SEQ	f)
Decrescente-constante	PDep	g)
Decrescente-unimodal	OR	c)
Decrescente-unimodal	PDep	c) j)
Degrau-unimodal	AND	g)
Degrau-unimodal-crescente	KofN	h)
Formato de “W”	OR	j)
Formato de “W”	PDep	i) j)
Unimodal achatada	KofN	c**))
Unimodal deslocada para cima	OR	f)
Unimodal-constante	AND	f)
Unimodal-constante	KofN	b)
Unimodal-crescente	AND	i) j)
Unimodal-crescente	OR	h)
Unimodal-crescente	KofN	c) e)
Unimodal-crescente	SEQ	j)
Unimodal-crescente e Bimodal	PDep	h)

Uma vez que é possível prever a falha de um sistema a partir de seus componentes, uma política de manutenção programada pode ser criada para reduzir os custos de manter um sistema em operação. Ao estabelecer um critério para que uma tarefa de manutenção seja iniciada, pode-se antecipar à condição falha e evitar os prejuízos de uma parada não esperada. O Capítulo 6 trata da aplicação da distribuição q -Weibull em modelos de manutenção corretiva e preventiva.

6 Manutenções corretiva e preventiva baseadas no modelo q -Weibull

6.1 Introdução

Conforme Dhillon (2006), manutenção corretiva é a ação corretiva realizada por causa de falhas ou deficiências encontradas durante a manutenção preventiva, ou seja, é a ação que repara um item para o seu estado de funcionamento. Geralmente a manutenção corretiva é uma manutenção não planejada.

As atividades de manutenção preventiva são responsáveis por uma proporção significativa do total das atividades de manutenção. Este tipo de manutenção procura manter as instalações em bom estado operacional pela inspeção sistemática, detecção e correção de falhas incipientes. Um programa de manutenção preventiva adequado pode ampliar a vida produtiva do equipamento, reduzir as perdas de produção causadas por suas falhas e melhorar a saúde e segurança do pessoal de manutenção. Especialmente no caso de falhas que têm consequências catastróficas, por exemplo, em aeronaves, plantas nucleares e químicas, testes e atividades de inspeção constituem uma importante parte do trabalho de manutenção que deve enfatizar a segurança (veja Rommert (1996))

Substituição e reparo têm sido tratados por diferentes métodos. Chen e Feldman (1997) tratam o problema de substituição e reparo mínimo modificado como processo de Markov. Kumar e Westberg (1997) usam o modelo de falha proporcional para mostrar a importância das variáveis monitoradas em um plano de manutenção e calcula os custos totais com base em custos da manutenção planejada e não planejada e nos valores das variáveis monitoradas estimando um intervalo ótimo de substituição ou valores limites das variáveis monitoradas.

Hongzhou (2002) resume, classifica e compara várias políticas de manutenção existentes para sistemas com uma ou várias unidades (com ênfase em apenas uma unidade) tais como: substituição por idade, substituição em bloco, manutenção preventiva periódica, limite de falha, manutenção oportunista. Kim (2004) apresenta um modelo para determinar até quando a manutenção preventiva realizada em intervalos de tempo ao longo do período de garantia vale a pena quando é suportada pelo comprador.

Yeh e Chang (2007) calcularam o valor limite de taxa de falha para produtos aluga-

dos com tempos de vida que seguem a distribuição Weibull. Quando este valor é atingido, ações adicionais de manutenção preventiva são tomadas para reduzir as falhas dos produtos. Neste cenário o valor limite de taxa de falha é calculado para minimizar o custo total esperado.

Panagiotidou e Tagaras (2007) apresentam um modelo para otimização de manutenção preventiva em um processo de produção com dois estados de qualidade: sob controle e fora de controle. Apresentam ainda exemplos numéricos com as distribuições Weibull e Gama. Castro (2009) determina o intervalo ótimo entre sucessivas manutenções preventivas e a quantidade ótima destas manutenções antes do sistema ser substituído que minimizam a taxa de custo esperado, considerando dois modos de falha, uma passível de manutenção e outro não. O método utiliza taxa de falha não decrescente e são apresentados exemplos numéricos para modelos de leis de potência. You, Li e Meng (2011) desenvolvem duas políticas de manutenção preventiva sujeitas a reparos imperfeitos e condições operacionais variáveis utilizando o modelo de falha proporcional estendido (EPHM).

Manutenção preventiva baseada no tempo é a substituição de um sistema, subsistema ou componente, ainda que em perfeito estado de funcionamento, em intervalos de tempo constante. A manutenção preventiva deve ser chamada de manutenção preditiva quando existir uma razão plausível para o agendamento do serviço. São apresentadas as formulações para aplicar três razões diferentes: mínima confiabilidade admissível, máxima taxa de falha permitida e mínimo custo estimado por ciclo de manutenção.

Embora exista um grande número de trabalhos sobre manutenções corretiva e preventiva, não foram encontradas aplicações da distribuição q -Weibull. As expressões de confiabilidade, da não confiabilidade e sua derivada temporal sob manutenção preventiva baseada nesta distribuição foram deduzidas. Dois tipos de análises foram feitas: reparo perfeito e reparo imperfeito. Os efeitos da substituição preventiva nas curvas de confiabilidade e taxa de falha são discutidos para dois casos: um item com taxa de falha unimodal e outro com taxa de falha crescente no tempo. Será mostrado que o intervalo de substituição pode ser calculado de três maneiras diferentes. Primeiramente pela adoção de um valor mínimo admissível para a confiabilidade até um instante t , posteriormente pela determinação de uma taxa de falha máxima permitida e finalmente pela minimização da função de custo por ciclo de manutenção.

6.2 Confiabilidade e manutenção com o modelo q -Weibull

A função confiabilidade foi definida na Equação 3.2.6. Esta definição não inclui nenhuma ação de manutenção mas será usada para o cálculo da confiabilidade afetada por ação de manutenção.

Assuma que T é o intervalo de tempo para a manutenção preventiva. O valor de confiabilidade $R_q(t)$ quando $t \leq T$ não é influenciado pela manutenção, assim a confiabilidade de um item sob manutenção periódica é:

$$Rm_q(t) = R_q(t). \quad (6.2.1)$$

6.2.1 Manutenção com reparo perfeito

Primeiramente consideraremos que o modelo assume que a manutenção é capaz de tornar o sistema tão bom quanto novo, assim, sempre que o sistema está operacional em $t > T$, este não sofre nenhum efeito por ter idade superior a T . O valor da confiabilidade no intervalo de tempo $T < t \leq 2T$ é

$$Rm_q(t) = R_q(T)R_q(t - T), \quad T < t \leq 2T, \quad (6.2.2)$$

$R(t - T)$ é a confiabilidade no tempo adicional além de T . Neste caso, $t - T$ unidades de tempo desde que a manutenção reparou o item para a condição de novo no instante T . A Equação 6.2.3 estende o conceito para qualquer valor de tempo t (veja detalhes em Lewis (1987)).

$$Rm_q(t) = R_q(T)^n R_q(t - nT) \quad \text{com} \quad nT < t \leq (n + 1)T \\ n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.2.3)$$

onde $R_q(T)^n$ é a probabilidade de sobrevivência a n intervalos de manutenção e $R_q(t - nT)$ é a probabilidade de sobreviver além da última manutenção preventiva. A quantidade de intervalos de manutenções preventivas até o instante de tempo t é expressa por:

$$n(t) = \text{integerpart} \left(\frac{t}{T} \right), \quad (6.2.4)$$

onde $\text{integerpart}(x)$ retorna a parte inteira de x efetuando a remoção da parte fracionária. A Equação 6.2.3 pode ser reescrita como:

$$Rm_{q,T}(t) = R_q(T)^{n(t)} R_q[t - n(t)T], \quad (6.2.5)$$

que nos termos da distribuição q -Weibull é

$$Rm_{q,T}(t) = \left\{ \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{n(t)} \times \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{t-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]. \quad (6.2.6)$$

Uma vez que os parâmetros β , η , t_0 e q são conhecidos, um valor mínimo admissível de confiabilidade pode ser especificado para um dado instante t ($Rm_{q,T}(t)$) e o intervalo de manutenção preditiva ¹ pode ser calculado resolvendo a Equação 6.2.6 em T .

A função não confiabilidade para manutenção preventiva é:

$$Fm_{q,T}(t) = 1 - \left\{ \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{n(t)} \times \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{t-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]. \quad (6.2.7)$$

A Equação 6.2.7 pode ser reescrita de outra forma (veja 3.2.1):

$$Fm_{q,T}(t) = 1 - \left\{ \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{n(t)} \times \left\{ 1 - \int_{n(t)T}^t \left\{ \frac{\beta(2-q)}{(\eta-t_0)} \left(\frac{x-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \times \exp_q \left[- \left(\frac{x-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\} dx \right\}, \quad (6.2.8)$$

ou ainda

$$Fm_{q,T}(t) = 1 - \left\{ \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{n(t)} + \int_{n(t)T+t_0}^t \left\{ \left\{ \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \times \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{n(t)} \times \frac{\beta(2-q)}{(\eta-t_0)} \left(\frac{x-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \times \exp_q \left[- \left(\frac{x-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\} dx. \quad (6.2.9)$$

Note que a primeira parte da soma que compõe a Equação 6.2.9, ou seja, $1 -$

¹O termo *preditiva* foi utilizado, pois o intervalo de manutenção foi especificado com base na predição de um valor mínimo admissível de confiabilidade.

$\left\{ \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{n(t)}$, é constante de $n(t)T$ até t . Assim, a derivada em relação ao tempo de $Fm_{q,T}(t)$ é

$$fm_{q,T}(t) = \frac{\left\{ \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \times \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{n(t)} \frac{\beta(2-q)}{(\eta-t_0)} \left(\frac{t-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \times}{\exp_q \left[- \left(\frac{t-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]}. \quad (6.2.10)$$

Note que a Equação 6.2.10 não é uma função densidade de probabilidade, pois não é necessariamente normalizada nem contínua. Contudo, a função taxa de falha sob manutenção preventiva é definida conforme a Equação 6.2.10, e expressa por

$$hm_{q,T}(t) = \frac{fm_{q,T}(t)}{Rm_{q,T}(t)}. \quad (6.2.11)$$

Podemos estabelecer um máximo valor permitido para $hm_{q,T}$ e resolver sua expressão na variável T para determinar o intervalo de manutenção preventiva em função de uma taxa de falha limite.

6.2.2 Manutenção com reparo imperfeito

Vamos supor que o serviço de manutenção não é perfeito e que a condição inicial do item é que ainda não houve reparo. Desta forma, o valor da confiabilidade decrescerá a cada reparo de acordo com o fator de perfeição k com $k \in \mathbb{R}$ e $0 < k < 1$. Quando $k \rightarrow 1$ o reparo é considerado perfeito. A confiabilidade em manutenção preventiva com reparo imperfeito é definida por

$$Rmk_{q,T}(t) = \left\{ k \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{n(t)} \times \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{t-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]. \quad (6.2.12)$$

A não confiabilidade em manutenção preventiva com reparo imperfeito é:

$$Fmk_{q,T}(t) = 1 - \left\{ k \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{n(t)} \times \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{t-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right], \quad (6.2.13)$$

e a sua derivada em relação ao tempo é

$$f_{mk_{q,T}}(t) = \left\{ k \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[\begin{array}{l} -(2-q) \times \\ \times \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \end{array} \right] \right\}^{n(t)} \times \frac{\beta(2-q)}{(\eta-t_0)} \left(\frac{t-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \times \exp_q \left[- \left(\frac{t-n(t)T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]. \quad (6.2.14)$$

Os valores de intervalo de manutenção preventiva podem ser calculados a partir da confiabilidade mínima admissível até um instante de tempo t ou da máxima taxa de falha permitida da mesma maneira mostrada na subseção 6.2.1.

6.2.3 Intervalo ótimo de manutenção preventiva baseada em custo

O tempo esperado por ciclo de manutenção segundo Huang, Miller e Okogbaa (1995) é $\int_{t_0}^T t f(t) dt + T \int_T^\infty f(t) dt$. Utilizando a distribuição q -Weibull podemos escrever:

$$E[T] = \int_{t_0}^T t f_q(t) dt + T \int_T^\infty f_q(t) dt. \quad (6.2.15)$$

A primeira parcela da 6.2.15 é (veja subseção A.10.1):

$$\int_{t_0}^T t f_q(t) dt = -TR_q(T) + \int_{t_0}^T R_q(t) dt, \quad (6.2.16)$$

retornando à Equação 6.2.15 temos

$$\begin{aligned} E[T] &= -TR_q(T) + \int_{t_0}^T R_q(t) dt + T \int_T^\infty f_q(t) dt \\ &= -TR_q(T) + \int_{t_0}^T R_q(t) dt + TR_q(T) \\ &= \int_{t_0}^T R_q(t) dt. \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

A Equação 6.2.17 deve ser usada para o tempo esperado de um subsistema ou de componentes associados em portas, tais como no capítulo 5. Para um componente isolado o tempo esperado para o ciclo de manutenção é (vide subseção A.10.2)

$$E[T] = \begin{cases} (T - t_0) {}_2F_1 \left(\frac{q-2}{1-q}, \frac{1}{\beta}; 1 + \frac{1}{\beta}; (1-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right), & q \neq 1 \\ \frac{(\eta-t_0)}{\beta} \left[-\Gamma \left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right) + \Gamma \left(\frac{1}{\beta}, 0 \right) \right], & q = 1, \end{cases} \quad (6.2.18)$$

onde ${}_2F_1(a, b; c; z)$ é a função hipergeométrica definida por $1 + \frac{ab}{c!}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)3!}z^3 + \dots$ (vide Gradshteyn, Ryzhik e Jeffrey (1994) equações 9.14 1 e 9.100)

O custo esperado por ciclo de manutenção é (vide Huang, Miller e Okogbaa (1995))

$$E[C] = C_c F_q(T) + C_p R_q(T), \quad (6.2.19)$$

onde C_c é o custo da manutenção corretiva e C_p é o custo da manutenção preventiva.

De acordo com o modelo Barlow-Hunter o custo de manutenção esperado por unidade de tempo de operação é (Barlow e Hunter (1960), Assis (1999)):

$$Z[T] = \frac{E[C]}{E[T]} = \frac{C_c F_q(T) + C_p R_q(T)}{E[T]} \quad (6.2.20)$$

O objetivo desta política de manutenção é minimizar o custo por unidade de tempo de operação. Isto indiretamente minimiza o custo esperado e maximiza o tempo esperado por ciclo de substituição. O intervalo ótimo de substituição T é calculado por

$$\text{Minimizar } Z[T] = \frac{C_c F_q(T) + C_p R_q(T)}{E[T]}. \quad (6.2.21)$$

6.3 Exemplos

Foram criados cinco cenários para exemplificar a influência da manutenção preventiva na confiabilidade, na derivada temporal da não confiabilidade e na taxa de falha. Os cenários 1 e 3 representam componentes cujos tempos de vida seguem a distribuição q -Weibull e têm reparo perfeito, nos cenários 2 e 4 o reparo é imperfeito. O cenário 5a representa a dependência probabilística (porta dinâmica PDep) na qual o componente gatilho é o C_4 e o componente dependente é C_3 . No cenário 5b foi feita a inversão entre componentes gatilho e dependente do cenário 5a, ou seja, o componente C_3 é o gatilho que influencia o componente C_4 . Em ambos os cenários foi adotado $p_d = 0,9$. Veja o capítulo

5 para mais detalhes sobre a porta PDep em árvores de falha dinâmicas e distribuição q -Weibull. Os parâmetros dos componentes e os formatos de suas funções taxa de falha são mostrados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Parâmetros da distribuição q -Weibull e formatos das funções taxa de falha dos componentes.

Componente	β	η	t_0	q	Taxa de falha
C_1	2,5	1000	0	1,5	Unimodal
C_2	2,5	2000	0	0,5	Crescente
C_3	4	1500	0	1,5	Unimodal
C_4	10	10000	0	1	Crescente

O intervalo de tempo de manutenção preventiva T , os fatores de perfeição k , os formatos das funções taxa de falha e os custos de manutenção corretiva e preventiva para todos os cenários são mostrados na Tabela 6.2.

Tabela 6.2: Especificações dos cenários.

Cenários	T	k	Taxa de falha	C_C	C_P
1) C_1	500	1	Unimodal	10 000	500
2) C_1	500	0,85	Unimodal	–	–
3) C_2	500	1	Crescente	10 000	500
4) C_2	500	0,9	Crescente	–	–
5a) $PDep_{C_3,C_4}$ com $p_d = 0,9$	1 000	1	Bimodal	10 000	500
5b) $PDep_{C_4,C_3}$ com $p_d = 0,9$	1 000	1	Unimodal/ Crescente	10 000	500

6.3.1 Cenário 1 - Unimodal - Reparo perfeito

O intervalo de manutenção preventiva para o componente C_1 foi calculado encontrando o valor $T = 173$ h para o qual a confiabilidade para um tempo de missão de 3 000h vale 0,9, ou seja, resolvendo a equação $R_{q,T}(3000) = 0,9$ na variável T . A Figura 6.3.1 mostra as funções confiabilidade para o componente C_1 com e sem a ocorrência de manutenção preventiva sob reparo perfeito ($k = 1$).

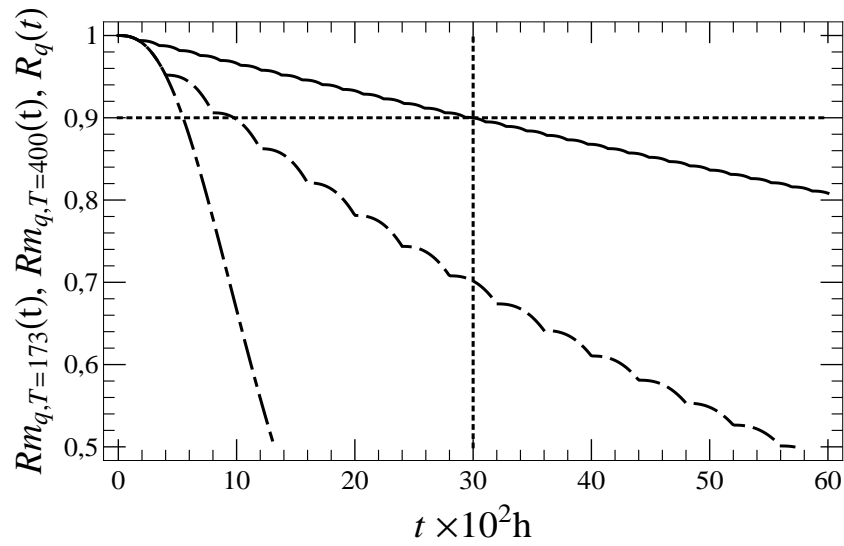


Figura 6.3.1: Confiabilidade sob manutenção preventiva com intervalo de tempo $T = 173h$ (linha contínua), com intervalo $T = 400h$ (linha tracejada) e confiabilidade sem manutenção preventiva (linha traço-ponto). Neste cenário foi utilizado o componente C_1 cujos parâmetros estão na Tabela 6.1.

Note que, para um mesmo instante de tempo, o valor da confiabilidade torna-se maior à medida em que o intervalo de manutenção preventiva diminui. A Figura 6.3.2 mostra a função densidade de probabilidade de C_1 e a derivada temporal da não confiabilidade para a manutenção preventiva.

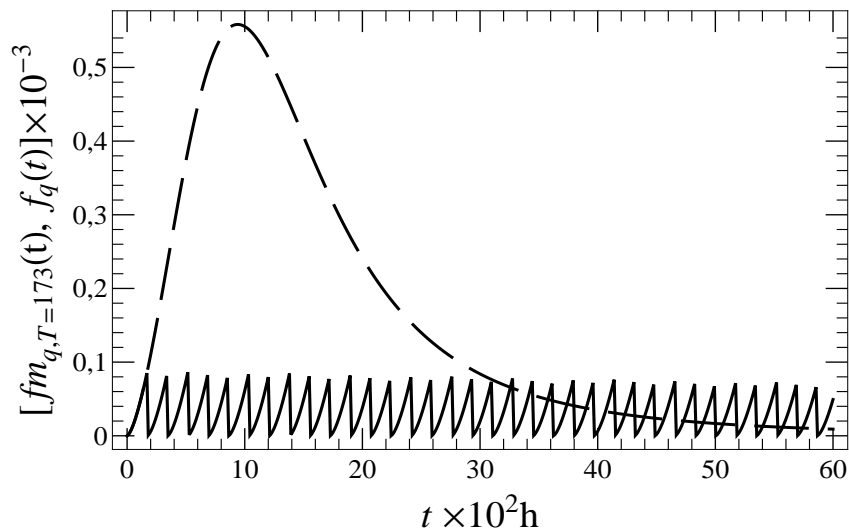


Figura 6.3.2: Derivada temporal da função não confiabilidade do componente C_1 sujeito a manutenção preventiva com intervalo de tempo $T = 173h$ calculado com $R_{q,T}(3000) = 0,9$ (linha contínua) e função densidade de probabilidade (linha tracejada). Os parâmetros usados estão na Tabela 6.1.

Um valor máximo admissível para a função taxa de falha $h_{max} = 3,0 \times 10^{-4}h^{-1}$ foi adotado e a Equação 6.2.11 foi resolvida, encontrando-se $T = 399h$. A Figura 6.3.3 mostra as funções taxa de falha com e sem o efeito da manutenção preventiva.

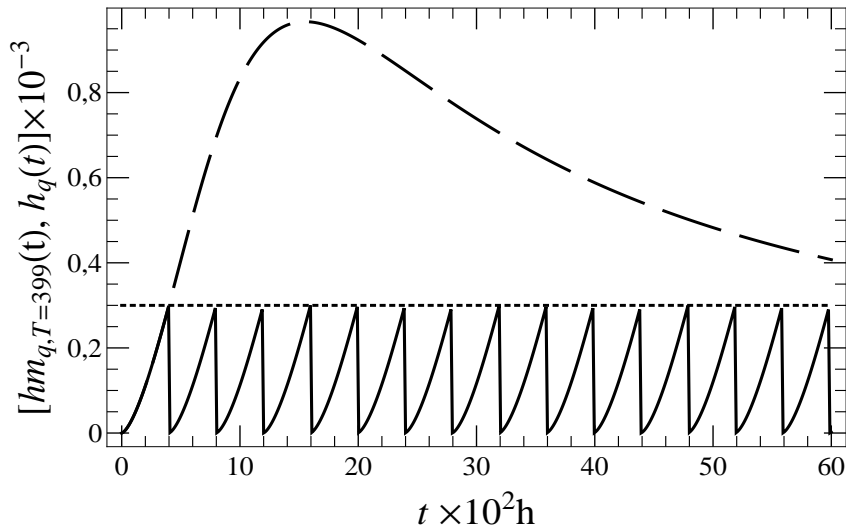


Figura 6.3.3: Função taxa de falha do componente C_1 sujeito à manutenção preventiva em intervalo de tempo $T = 399h$ traçada em linha contínua e a taxa de falha sem a adoção de manutenção preventiva em linha tracejada. Os parâmetros usados para o componente C_1 estão na Tabela 6.1.

Supondo que o custo da manutenção corretiva do item C_1 , isto é, o custo total para colocá-lo em estado operacional após a falha ter ocorrido, seja $C_c = 10.000$ unidades monetárias e o custo da manutenção preventiva, ou seja, o custo da manutenção com antecipação do estado falho é $C_p = 500$ unidades monetárias, a minimização da Equação 6.2.21 calcula o intervalo que minimiza o custo por ciclo de manutenção $T = 353h$ e o respectivo custo por ciclo é $Z_q = 2,40$ unidades monetárias /h (vide Figura 6.3.4).

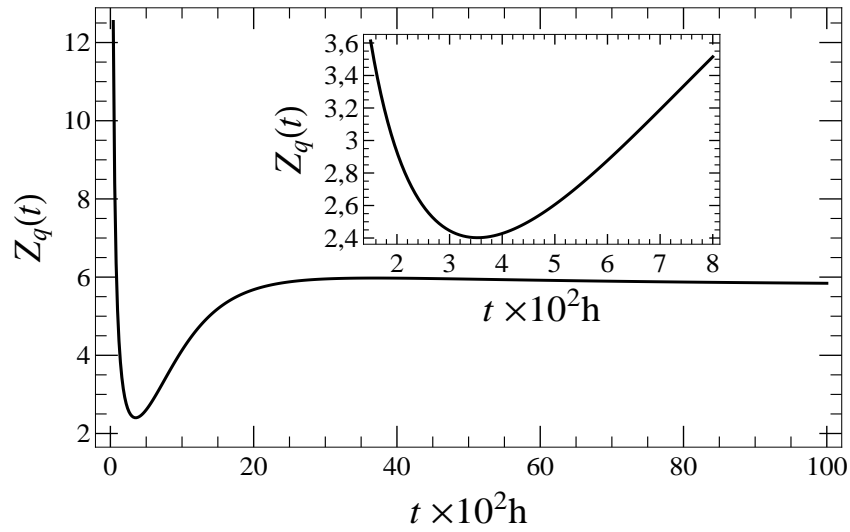


Figura 6.3.4: Custo por ciclo de manutenção (unidades monetárias/h). O detalhe mostra a localização do custo mínimo.

6.3.2 Cenário 2 - Unimodal - Reparo imperfeito

Num sistema submetido a reparos imperfeitos, a função confiabilidade apresenta descontinuidades em seu gráfico cada vez que a manutenção é realizada. A Figura 6.3.5 mostra as curvas de confiabilidade calculadas com reparo imperfeito, cujo fator de perfeição é $k = 0,85$ (com intervalos entre manutenções iguais a $T = 548h$ e $T = 700h$), e sem a ocorrência de manutenção.

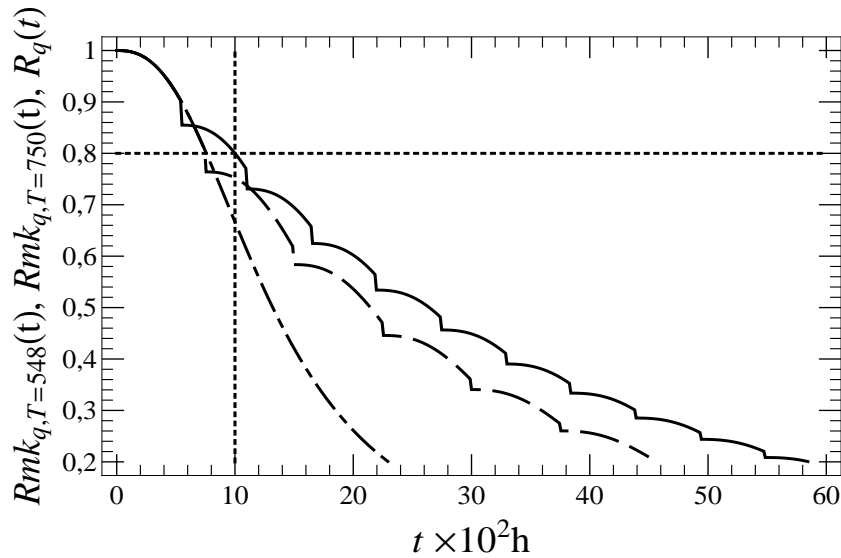


Figura 6.3.5: Função confiabilidade com manutenção preventiva de intervalo $T = 548h$ (valor calculado fazendo $Rmk_{q,T}(1000) = 0,8$), com reparo imperfeito e fator de perfeição $k = 0,85$ traçada em linha contínua. Função confiabilidade com manutenção preventiva de intervalo $T = 700h$ (tracejada) e confiabilidade sem manutenção em linha traco-ponto. Os parâmetros usados deste componente C_1 estão na Tabela 6.1.

Note que a imperfeição nos reparos faz com que a confiabilidade com as intervenções de manutenção atinja valores menores do que sem tais intervenções para os instantes de tempo iniciais. A medida em que o tempo t aumenta, o reparo imperfeito provoca degraus cada vez menores na confiabilidade e se torna menos visível a sua influência.

A Figura 6.3.6 mostra a derivada em relação ao tempo da função não confiabilidade para o componente C_1 com e sem a ocorrência da manutenção preventiva.

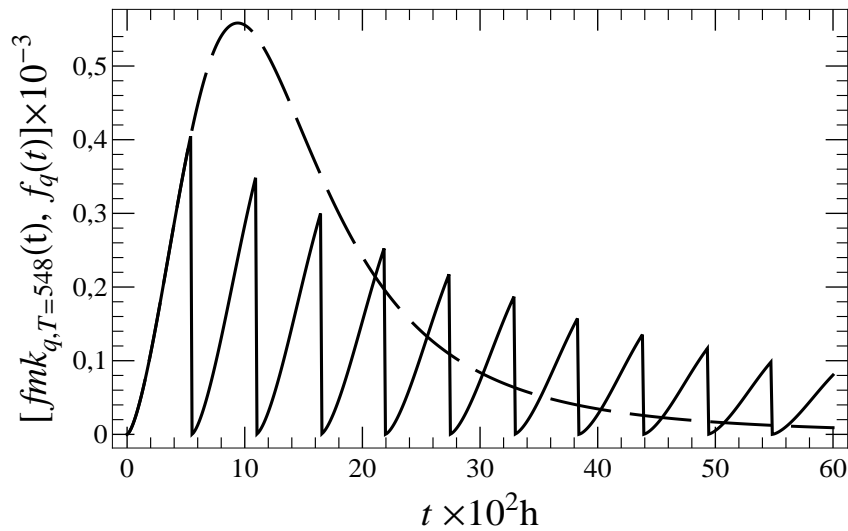


Figura 6.3.6: Derivada temporal da função não confiabilidade do componente C_1 , em manutenção preventiva com intervalos de tempo $T = 500h$ e reparos imperfeitos com fator de perfeição $k = 0,85$, traçada em linha contínua e função densidade de probabilidade de C_1 em linha tracejada. Os parâmetros do componente C_1 estão na Tabela 6.1.

O intervalo de manutenção $T = 692h$ foi calculado de forma a atender o limite máximo de taxa de falha $h_{max} = 6,0 \times 10^{-4}h^{-1}$. Embora para instantes iniciais de tempo as ações de manutenção reduzam a taxa de falha, neste exemplo, para valores de tempo superiores a $4000h$, a taxa de falha com a manutenção preventiva é maior que a taxa sem intervenções de manutenção. A modelagem desta situação não seria possível se as distribuições Weibull ou exponencial fossem utilizadas, uma vez que, suas taxas de falha são monótonas. Entretanto, neste caso, é necessário investigar se assumir o risco de uma taxa de falha mais alta nos instantes iniciais compensa uma taxa de falha inferior em instantes futuros sem realizar manutenções programadas. A Figura 6.3.7 mostra as funções taxa de falha.

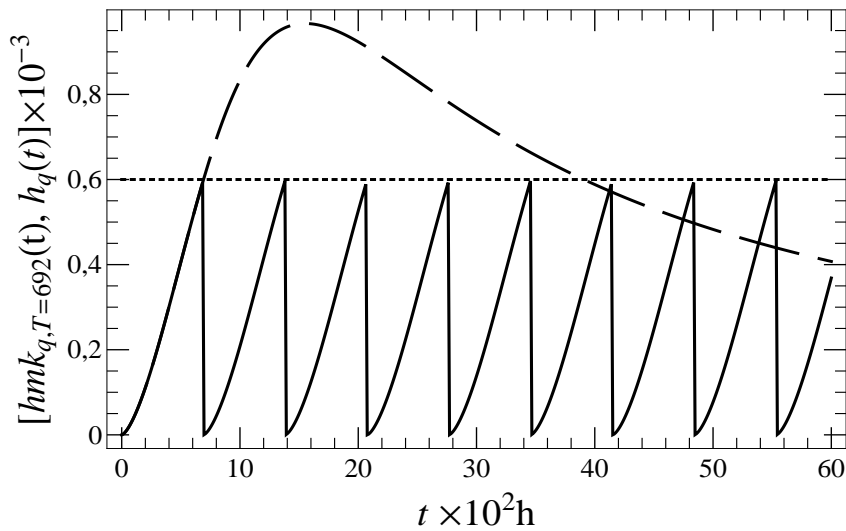


Figura 6.3.7: Função taxa de falha de C_1 em manutenção preventiva com intervalo de tempo $T = 692h$ em linha contínua e taxa de falha de C_1 em linha tracejada. Os parâmetros de usados em C_1 estão na Tabela 6.1..

6.3.3 Cenário 3 - Taxa de falha crescente - Reparo perfeito

Neste cenário o objetivo é manter uma confiabilidade mínima de 95% num tempo de funcionamento de $1500h$. Para tal, é preciso que ocorram manutenções preventivas em intervalos de $T = 264h$, valor calculado pela solução de $Rm_{q,T}(1500) = 0,95$. A Figura6.3.8 mostra as curvas de confiabilidade com e sem a consideração da manutenção preventiva realizada com reparos perfeitos.

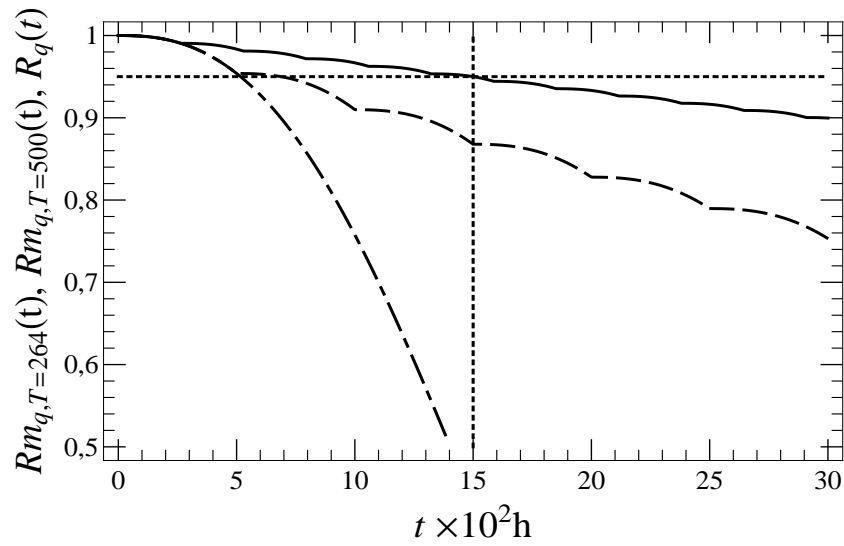


Figura 6.3.8: Função confiabilidade do componente C_2 sujeito a manutenção preventiva em intervalos de tempo $T = 264h$ e reparos perfeitos traçada em linha contínua, função confiabilidade para intervalos de tempo $T = 500h$ em linha tracejada e confiabilidade de C_2 sem manutenção preventiva em linha traço-ponto. Os parâmetros do componente C_2 estão na Tabela 6.1.

A Figura 6.3.9 mostra a derivada em relação ao tempo da função de falha acumulada (componente em manutenção preventiva) e função densidade de probabilidade de C_2 .

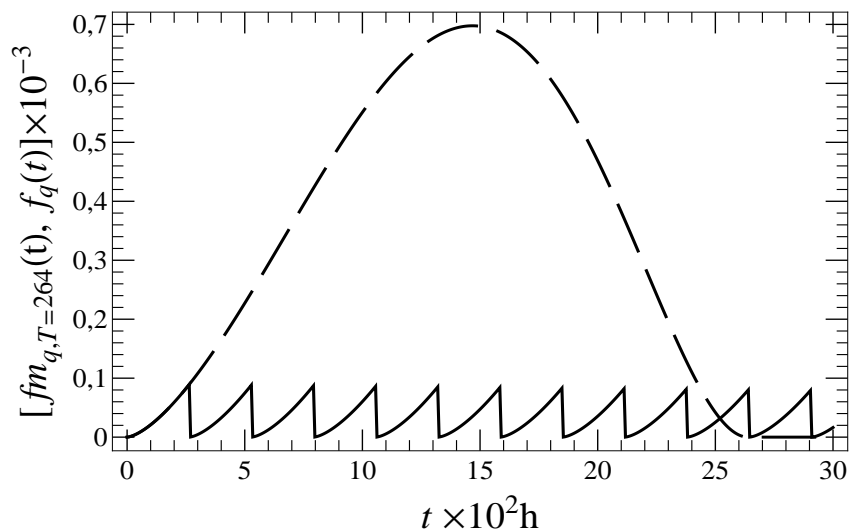


Figura 6.3.9: Derivada temporal da não confiabilidade do componente C_2 em manutenção preventiva com intervalos de tempo $T = 264h$ (linha contínua) e função densidade de probabilidade de C_2 traçada em linha tracejada. Os parâmetros do componente C_2 estão na Tabela 6.1.

Para manter o valor da taxa de falha abaixo de $h_{max} = 5 \times 10^{-4}h^{-1}$ as manutenções

devem ocorrer em intervalos de $800h$. A Figura 6.3.10 mostra as funções taxa de falha.

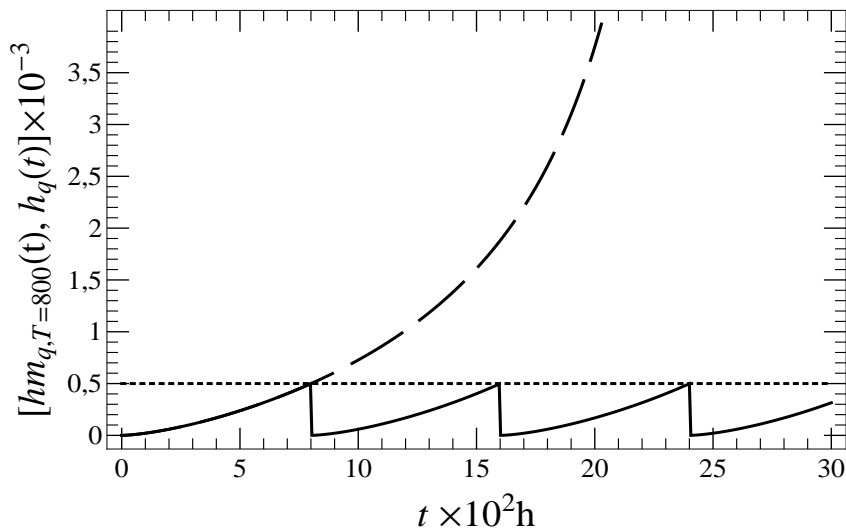


Figura 6.3.10: Função taxa de falha do componente C_2 sob regime de manutenção preventiva em intervalos de tempos $T = 800h$ e reparo perfeito traçada em linha contínua e taxa de falha de C_2 sem ações de manutenção em linha tracejada. Os parâmetros do componente C_2 estão na Tabela 6.1.

O cálculo do intervalo ótimo de manutenção preventiva é feito pela minimização da Equação 6.2.21. Para tal foi atribuído um custo de manutenção corretiva $C_c = 10\,000$ unidades monetárias e um custo de manutenção preventiva $C_p = 500$ unidades monetárias (valores iguais aos aplicados na subseção 6.3.1, veja Tabela 6.2). O intervalo encontrado ($T = 443h$) corresponde a um custo mínimo $Z_q = 1,88$ unidades monetárias por ciclo de manutenção conforme a Figura 6.3.11.

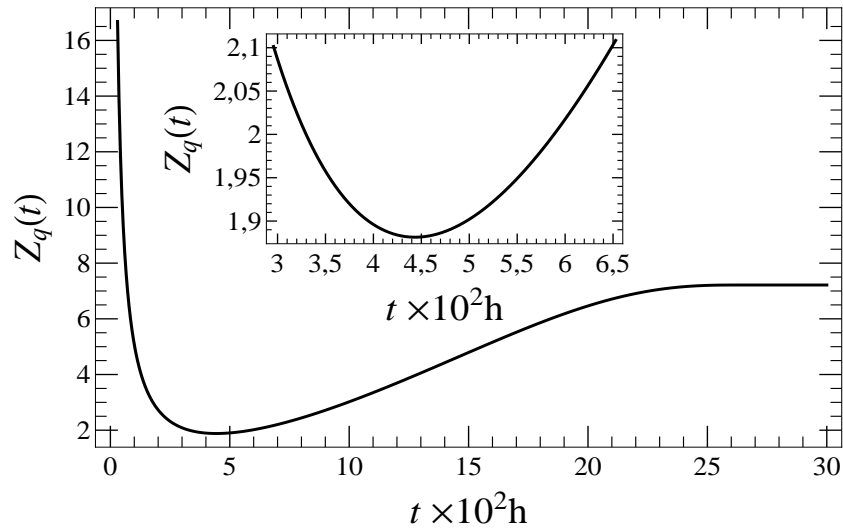


Figura 6.3.11: Custo por ciclo de manutenção. O detalhe mostra a localização do custo mínimo.

6.3.4 Cenário 4 - Crescente - Reparo imperfeito

A Figura 6.3.12 mostra duas curvas da função confiabilidade com a manutenção preventiva e reparo imperfeito e outra curva de confiabilidade sem adotar ações de manutenção. A curva em linha contínua se refere à confiabilidade com intervenções de manutenção a cada $544h$, enquanto que na curva tracejada o intervalo é $350h$. Este exemplo mostra que intervalos de manutenção menores necessariamente não significam valores de confiabilidade mais altos quando se trata de reparo imperfeito. Neste caso, intervalos menores tornaram a confiabilidade menor, fato não ocorrido no exemplo da subseção 6.3.2.

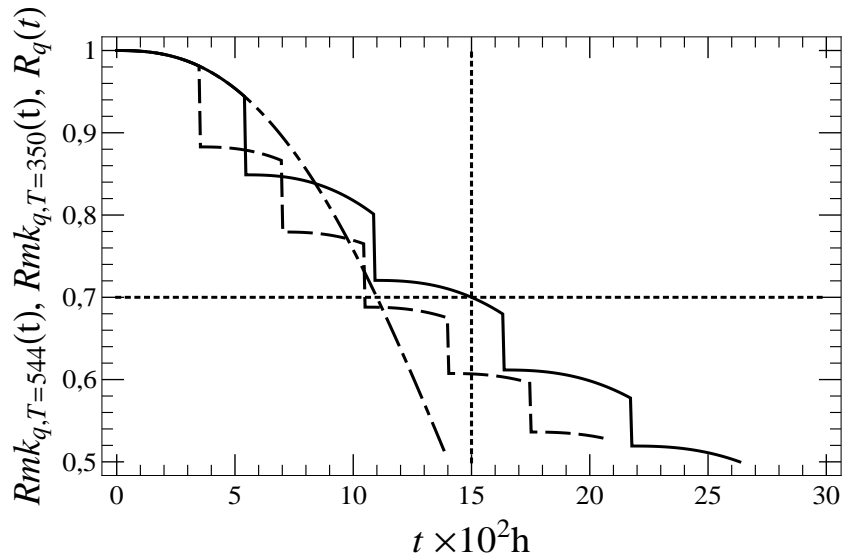


Figura 6.3.12: Função confiabilidade do componente C_2 sob manutenção preventiva em intervalos de tempo $T = 544h$ (calculado com $Rmk_{q,T}(1500) = 0,7$) e reparos imperfeitos com fator de perfeição $k = 0,9$ (linha sólida), confiabilidade para $T = 350h$ com mesmo valor de k (linha tracejada) e confiabilidade de C_2 sem manutenção (linha traço-ponto). Os parâmetros de C_2 estão na Tabela 6.1.

A Figura 6.3.13 mostra a derivada da função não confiabilidade para C_2 sob regime de manutenção preventiva e a sua função densidade de probabilidade.

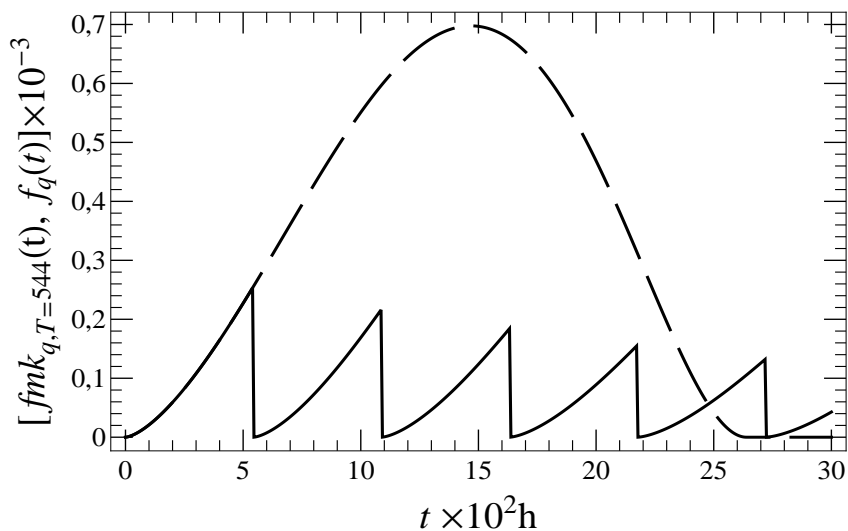


Figura 6.3.13: Derivada temporal da não confiabilidade para C_2 em regime de manutenção preventiva com intervalo $T = 544h$ e fator de perfeição $k = 0,9$ traçada em linha contínua e a função densidade de probabilidade em linha tracejada. Os parâmetros do componente C_2 estão na Tabela 6.1.

O intervalo de tempo entre manutenções ($T = 516h$) assegura um nível máximo admissível para a taxa de falha de $h_{m\acute{a}x} = 2,5 \times 10^{-4}h^{-1}$. A Figura 6.3.14 mostra as funções taxa de falha com e sem a manutenção preventiva.

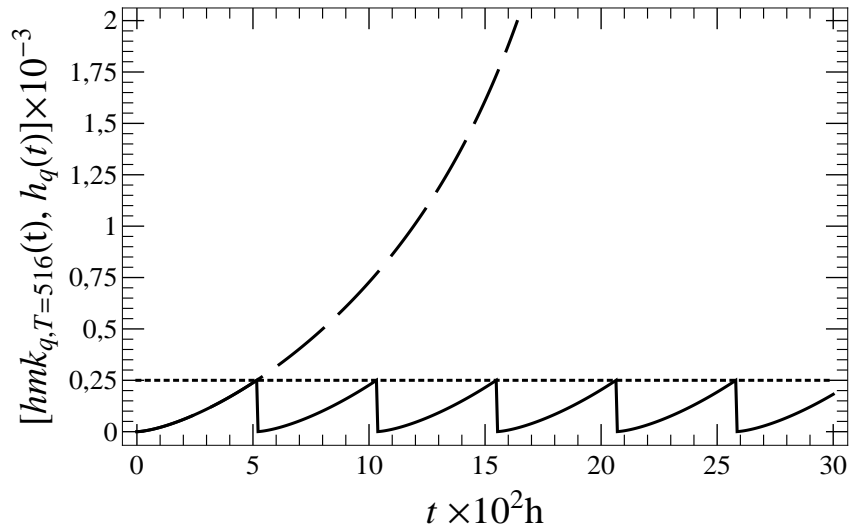


Figura 6.3.14: Função taxa de falha de C_2 em manutenção preventiva com intervalos de tempo $T = 516h$ e fator de perfeição $k = 0,9$ em linha contínua e taxa de falha sem manutenção em linha tracejada. Os parâmetros de C_2 estão na Tabela 6.1.

6.3.5 Cenários 5a e 5b

Os cenários 5a e 5b utilizam um subsistema composto de dois componentes associados por uma porta PDep (Dependência Probabilística). No cenário 5a um componente C_3 está associado a um gatilho C_4 (porta $PDep_{C_3, C_4}$) e no cenário 5b o componente C_4 tem como gatilho o componente C_3 . Em ambos os casos, a ocorrência do evento gatilho provoca a falha do componente associado com probabilidade $p_d = 0,9$. A Figura 6.3.15 mostra as curvas de confiabilidade para os dois casos

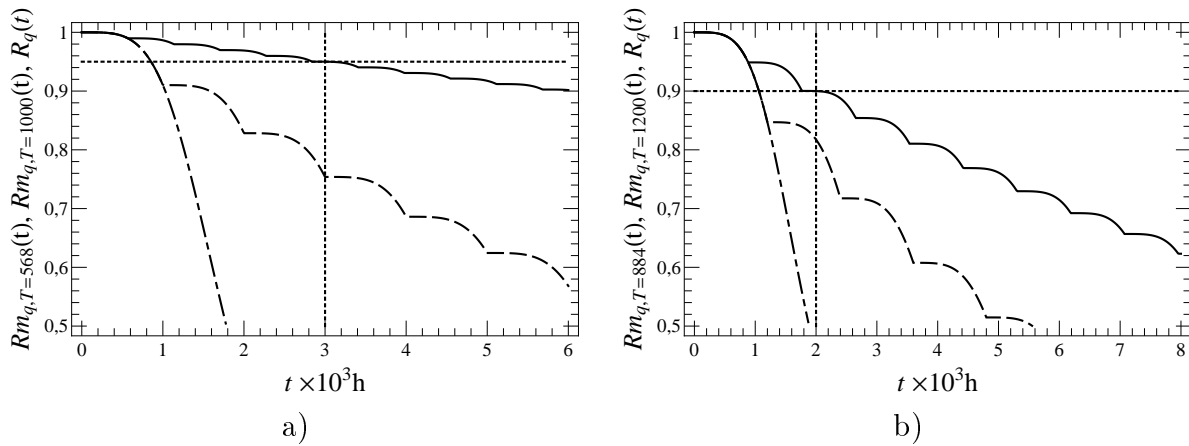


Figura 6.3.15: Função confiabilidade da porta PDep sob manutenção preventiva em intervalos de tempo T_1 e reparos perfeitos (linha contínua), função confiabilidade da PDep com intervalos de manutenção T_2 (linha tracejada) e confiabilidade PDep sem intervenções de manutenção (linha traço-ponto). Em a) C_3 é o componente dependente, C_4 é o gatilho, $T_1 = 568h$ (calculado com $Rm_{q,T}(3000) = 0,95$) e $T_2 = 1000h$; em b) o componente dependente é C_4 , o gatilho é C_3 , $T_1 = 884h$ (calculado com $Rm_{q,T}(2000) = 0,9$) e $T_2 = 1200h$.

Em ambas as situações, as intervenções de manutenção retardam a queda da confiabilidade à medida em os intervalos de manutenção tornam-se menores. Os parâmetros dos componentes do subsistema estão na Tabela 6.1.

A Figura 6.3.16 mostra as derivadas das funções não confiabilidade com e sem as intervenções de manutenção.

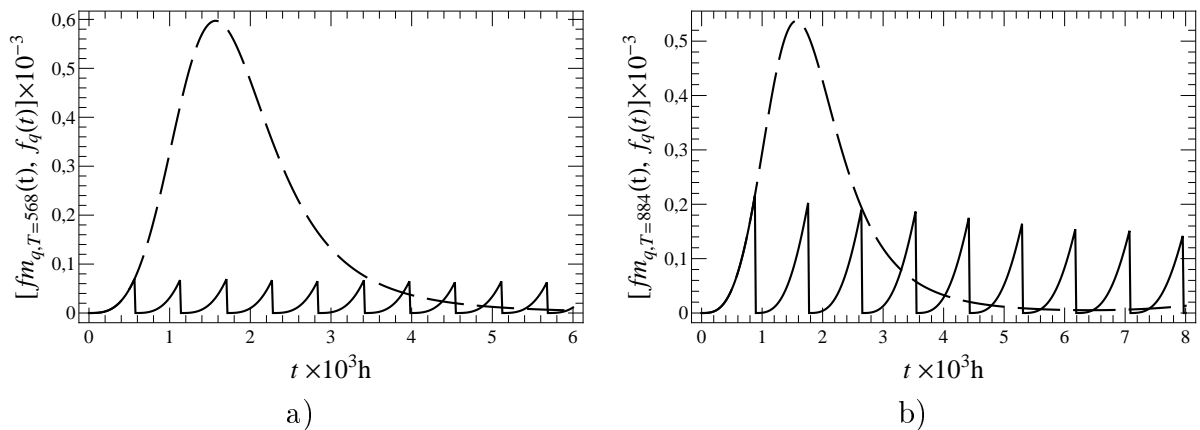


Figura 6.3.16: Derivada temporal da função não confiabilidade da porta PDep sob manutenção preventiva em intervalos de tempo T e reparos perfeitos traçada em linha contínua, derivada em relação ao tempo da não confiabilidade da PDep sem intervenções de manutenção com linha tracejada. Em a) C_3 é o componente dependente, C_4 é o gatilho e $T = 568h$; em b) o componente dependente é C_4 , o gatilho é C_3 e $T = 884h$. Os parâmetros dos componentes do subsistema estão na Tabela 6.1.

A Figura 6.3.17 mostra as funções da taxa de falha para o subsistema submetido à manutenções periódicas e sem as intervenções de manutenção.

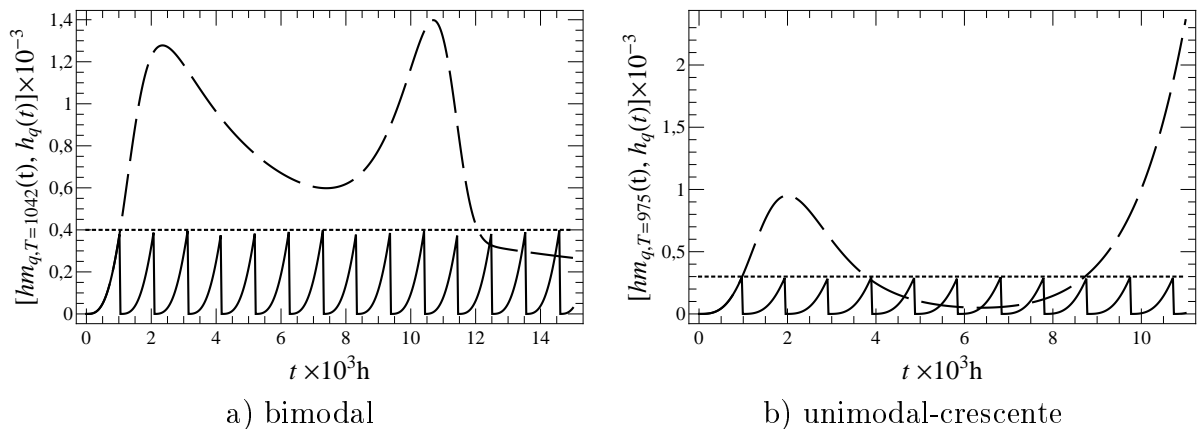


Figura 6.3.17: Função taxa de falha da porta PDep sob manutenção preventiva em intervalos de tempo T e reparos perfeitos traçada em linha contínua, taxa de falha da PDep sem intervenções de manutenção com linha tracejada. Em a) C_3 é o componente dependente, C_4 é o gatilho e $T = 1042h$ (calculado com $h_{max} = 4 \times 10^{-4} h^{-1}$); em b) o componente dependente é C_4 , o gatilho é C_3 e $T = 975h$ (calculado com $h_{max} = 3 \times 10^{-4} h^{-1}$). Os parâmetros dos componentes do subsistema estão na Tabela 6.1.

A Figura 6.3.17b) mostra que, para tempos superiores a $8700h$, o valor da taxa de falha do subsistema sem manutenção cresce continuamente com o tempo e se afasta

cada vez mais do valor máximo de taxa de falha adotado. Fica evidente que a adoção de um valor máximo de taxa de falha preservará o sistema para valores de tempo elevados. Para o painel a) da mesma figura, esta mesma constatação não pode ser verificada. Para tempos superiores a $12500h$, a taxa de falha do subsistema sem manutenção se torna inferior ao valor máximo adotado, e para alguns instantes de tempo, é inferior à taxa de falha do subsistema submetido a manutenções programadas.

6.4 Conclusões

A distribuição q -Weibull foi aplicada no cálculo de confiabilidade, da derivada temporal da função de falha acumulada e da taxa de falha de sistemas sob manutenção preventiva em intervalos constantes de tempo. Duas análises mostram resultados para reparos perfeitos e imperfeitos. Três métodos para a determinação do intervalo de manutenção foram apresentados: mínimo valor de confiabilidade tolerado, máximo valor permitido para taxa de falha e custo mínimo por ciclo de manutenção. Os dois primeiros métodos foram utilizados para serviços de manutenção com reparo perfeito e imperfeito enquanto que o último método foi aplicado apenas para reparo perfeito. Para o cálculo do custo mínimo por ciclo de manutenção, foi deduzida a expressão do custo por ciclo de manutenção em função do intervalo de tempo de intervenção.

Em sistemas com grande número de componentes, é possível realizar o agrupamento destes, em subsistemas, de acordo com o formalismo de portas (ver Capítulo 5), e montar as funções de não confiabilidade e suas derivadas. Uma vez estimados os custos de manutenção corretiva e preventiva para cada componente ou subsistema, pode-se determinar o intervalo de manutenção preditiva para o menor custo por ciclo de manutenção.

Os custos por ciclo de manutenção de cada subsistema podem indicar qual ou quais deles mais contribuem para gastos. Os subsistemas mais custosos para a manutenção podem ser investigados num nível de detalhamento maior, especificando cada componente e reaplicando alguma das técnicas descritas para controle de taxa de falha, confiabilidade ou custo.

Desta forma é possível encontrar qual subsistema ou componente aumenta, de forma mais acentuada, os custos devido à manutenção preventiva ou corretiva ou ainda qual item acarreta um decréscimo de confiabilidade a níveis abaixo do tolerado. Estas ações podem ser úteis em análise de sensibilidade e até mesmo no traçado de estratégias para melhorias dos sistemas de produção.

Os resultados mostram novas possibilidades de determinação de intervalos de manutenção preventiva, especialmente em situações nas quais os modelos de Weibull e ex-

ponencial não são realistas. Os casos mostrados nas Figuras 6.3.7 e 6.3.17a) ilustram tais situações onde as taxas de falha são crescentes para os instantes iniciais, mas não são monótonas. Estes casos não podem ser modelados pela distribuição Weibull (com taxa de falha monótona), nem pela exponencial, cuja taxa de falha é constante, mas são cobertos com o uso da distribuição q -Weibull.

7 Considerações finais

7.1 Conclusões

Várias formulações matemáticas para a função taxa de falha são encontradas na literatura. Muitos destes modelos, são complicados e apresentam muitos parâmetros. A inclusão dos parâmetros muitas vezes é feita de forma empírica, ou com algum objetivo específico, como por exemplo, a especificação de parâmetros dependentes do tempo, ou a exponenciação da distribuição elevando a função acumulada a um expoente positivo. Muitos modelos propostos modificam modelos já existentes, como por exemplo, os modelos derivados da distribuição Weibull. Tais modelos possuem em comum a grande quantidade de parâmetros e o fato de suas naturezas serem exponenciais.

O modelo proposto para aplicação em confiabilidade é a generalização q -Weibull. A sua função de falha acumulada é $F_q(t) = 1 - \left[\exp_q \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] \right]^{2-q}$, onde $\exp_q = [1 + (1 - q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}$, β e q são parâmetros responsáveis pela forma e η afeta a escala. Esta distribuição é exponencial apenas na situação limite onde $q \rightarrow 1$. Em situações adequadas o modelo tende a uma lei de potência, com cauda de caimento acentuado, característica esta, capaz de garantir mais flexibilidade ao seu formato de taxa de falha.

O modelo q -Weibull é capaz de reproduzir, além da taxa de falha constante, outros quatro formatos de taxa de falha: monótono crescente (com e sem tempo limite), monótono decrescente, unimodal ou banheira (ou com formato de “U”). Todos estes formatos são obtidos com um conjunto de parâmetros fixo. Este é o primeiro trabalho que identifica na distribuição q -Weibull o formato da curva da banheira em sua taxa de falha. A distribuição Weibull é capaz de representar em sua taxa de falha, apenas formatos monótonos, decrescente ($\beta < 1$), constante ($\beta = 1$) e crescente ($\beta > 1$).

A q -Weibull ainda representa a unificação de vários modelos: Burr XII, Weibull, q -exponencial e exponencial. É uma generalização de modelos e não um modelo alternativo adicional. A distribuição q -Weibull é uma extensão natural da Weibull e sua definição é inspirada na estatística não-extensiva de Tsallis. A Tabela 3.1 na página 44 mostra os comportamentos da taxa de falha em função dos parâmetros q e β .

A distribuição q -Weibull permite avaliar a confiabilidade, e por consequência a não-confiabilidade, o MTBF, a moda, a mediana, os momentos e demais valores característicos

da distribuição, considerando o ciclo de vida completo do item em estudo.

A introdução de generalizações adicionais de forma empírica ou teórica, tais como o uso de transformações linear e não-linear do tempo, o uso de múltiplas distribuições, parâmetros dependentes do tempo dentre outras, tal como foi feito com a Weibull (Murthy, Xie e Jiang (2004)), podem futuramente aumentar a flexibilidade e a precisão da q -Weibull e abrir novas oportunidades para os profissionais de engenharia de confiabilidade.

Três exemplos de aplicação utilizaram os tempos de funcionamento de equipamentos de poços de petróleo para comparar os desempenhos das distribuições q -Weibull e Weibull. As bombas de fundo e as hastes apresentaram taxas de falha com formato de banheira e a tubulação de produção, mostrou taxa de falha unimodal. Os dois formatos não poderiam ser obtidos com a utilização da distribuição Weibull, com apenas um conjunto de parâmetros. Para tal, seria necessário $\beta < 1$, para taxa de falha decrescente, $\beta = 1$, para taxa de falha constante, e $\beta > 1$ para taxa de falha crescente. Em todas as análises, a qualidade do ajuste do modelo q -Weibull foi superior ao Weibull. Tal conclusão é perceptível nas Figuras 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3 (páginas 51, 52 e 53), nas quais se observa que a curva de taxa de falha q -Weibull se aproxima mais dos dados amostrais especialmente na cauda da distribuição.

Os tempos de funcionamento de uma estação de solda robotizada também foram usados para exemplificar o uso da distribuição q -Weibull. Desta vez, além da distribuição Weibull, foram feitos ajustes com as distribuições q -exponencial e exponencial. Os quatro modelos (três deles são casos particulares da q -Weibull) foram comparados. Todos os tempos de vida, com todos os modos de falha, foram utilizados para cada um dos ajustes. A distribuição q -Weibull foi a que melhor se ajustou às amostras e a curva da função taxa de falha teve formato de banheira.

Todas as amostras foram divididas em três intervalos disjuntos e a cada um foi ajustada uma distribuição Weibull. Os limites de divisão foram escolhidos empiricamente de forma a tornar os ajustes melhores. Os resultados da aplicação da distribuição Weibull mostraram que nos instantes iniciais a taxa de falha foi decrescente ($\beta = 0,65$), no intervalo central a taxa de falha foi aproximadamente constante ($\beta = 1,04$) e, no trecho final, a taxa de falha foi crescente ($\beta = 1,74$). O resultado comprova que o formato da curva da banheira é realmente coerente com cada trecho considerado isoladamente, da mesma forma que com a totalidade dos dados amostrais.

De forma geral, modelos com um número maior de parâmetros tendem a ser mais flexíveis. A inclusão de parâmetro, naturalmente, costuma consumir mais recursos no ajuste do modelo. O Critério de Informação Akaike (AIC) foi utilizado para comparar a eficiência dos modelos, considerando que possuem quantidades diferentes de parâme-

tros. O modelo q -Weibull foi o melhor dos modelos testados na estação de solda, mesmo possuindo um número maior de parâmetros.

Para desenvolver sua função adequadamente, um componente precisa funcionar em conjunto com outro ou com vários outros. As formas de associação entre os componentes foram apresentadas segundo o formalismo de Árvores de Falha Dinâmicas (AFD). As AFD consideram não somente o estado falho dos componentes, mas também a ordem em que falhas se processam, permitindo a análise em caráter combinacional e sequencial de falhas.

Os cálculos da função de falha acumulada (não confiabilidade) e da função densidade de cada porta de uma AFD (AND, OR, KofN, PDep, PAND, SEQ e WSP) foram mostrados. Cálculos alternativos, por meio de algoritmos baseados na geração de tempos por simulação de Monte Carlo foram desenvolvidos para cada porta. Para todos os exemplos de associação mostrados, os algoritmos conduziram a resultados compatíveis com os cálculos exatos.

Para ilustrar os possíveis formatos da função taxa de falha da saída das portas AND, OR, PDep, PAND e SEQ, dois componentes hipotéticos foram definidos como suas entradas. Uma vez que na distribuição q -Weibull a taxa de falha apresenta 5 formatos diferentes, a combinação destes formatos nas duas entradas fornecem 10 casos para as portas AND e OR e 20 casos para as portas PDep, PAND e SEQ, pois nestas, a ordem (ou a posição) das entradas interfere no resultado.

Para a porta KofN foi ilustrada a situação *2de3* também com 10 casos diferentes. A porta WSP foi ilustrada com 7 casos diferentes, 5 destes com apenas um componente principal e um reserva com mesmo formato de taxa de falha, outro com principal e reserva de formatos diferentes e o último caso com principal e dois componentes reserva de mesmo formato de taxa de falha.

Os resultados mostram uma grande variedade de formatos de taxa de falha diferentes. Praticamente todos os formatos classificados em Murthy, Xie e Jiang (2004, p. 48), que apresenta muitas maneiras de modificação do modelo Weibull, como parâmetros dependentes do tempo, exponenciais aninhadas e Weibull exponenciada, foram reproduzidos (vide Figura 5.3.1 na página 115).

Um resultado importante foi encontrado na porta que modela a dependência probabilística PDep com apenas 2 entradas (e conseqüentemente 6 parâmetros). Este modelo apresenta 10 formatos de taxa de falha diferentes:

- a) decrescente;
- b) decrescente-constante;

- c) decrescente-unimodal;
- d) constante-crescente;
- e) unimodal;
- f) unimodal deslocada;
- g) unimodal-crescente;
- h) bimodal;
- i) formato de “U”;
- j) formato de “W”.

Este modelo parece ter sido o mais versátil quando são comparados seus resultados ao número de parâmetros necessários para sua utilização. Trabalhos futuros poderão utilizar as funções densidade e acumulada deduzidas segundo o formalismo PDep como uma distribuição derivada da q -Weibull.

Embora os formatos de taxa de falha unimodal e banheira possam ser obtidos a partir de duas entradas, uma com taxa de falha decrescente, e outra crescente, em portas AND e OR respectivamente a distribuição Weibull possui a desvantagem de necessitar para isto, do uso de 3 parâmetros adicionais. A distribuição q -Weibull é capaz de, sozinha, proporcionar estes resultados com apenas 3 parâmetros (e não 6 como na Weibull). Em associações por meio de AFD, a q -Weibull amplia mais ainda a capacidade de modelar formatos diferentes de taxa de falha. A Tabela 5.13 na página 116 mostra alguns destes formatos possíveis (vide Capítulo 5 na página 61).

Uma vez que é possível prever a falha de um sistema a partir de seus componentes, uma política de manutenção programada pode ser criada para reduzir os custos de manter um sistema em operação. Ao estabelecer um critério para que tarefas de manutenção sejam iniciadas, pode-se antecipar à condição falha e evitar os prejuízos de uma parada não esperada. A distribuição q -Weibull foi aplicada no cálculo de confiabilidade, da derivada temporal da função de falha acumulada e da taxa de falha de sistemas sob manutenção preventiva em intervalos constantes de tempo.

Foram cobertos os casos de reparos perfeitos e imperfeitos. O coeficiente de perfeição $0 < k < 1$ foi usado para descrever o grau de perfeição do reparo (tanto maior quanto mais próximo de 1). Este fator multiplicativo afeta o valor da confiabilidade cada vez que o reparo imperfeito é realizado.

Três métodos para a determinação do intervalo de manutenção foram apresentados: mínimo valor de confiabilidade tolerado, máximo valor permitido para taxa de falha e custo mínimo por ciclo de manutenção. Os dois primeiros métodos foram utilizados para serviços de manutenção com reparo perfeito e imperfeito enquanto que o último método

foi aplicado apenas para reparo perfeito. Para o cálculo do custo mínimo por ciclo de manutenção, foi deduzida a expressão do custo por ciclo de manutenção em função do intervalo de tempo de intervenção. O resultado pode ser encontrado analiticamente para um componente. Para associações de componentes em portas, métodos numéricos podem encontrar os resultados.

O formalismo das AFD torna possível que, em sistemas nos quais há um grande número de componentes, estes possam ser agrupados como subsistemas e as funções de não confiabilidade e suas derivadas possam ser montadas (analiticamente ou em forma tabular). De posse de estimativas de custos de manutenção corretiva e preventiva dos subsistemas, pode-se determinar o intervalo de manutenção preditiva com o menor custo por ciclo de manutenção.

Os resultados mostram possibilidades de determinação de intervalos de manutenção preventiva, especialmente em situações nas quais os modelos de Weibull e exponencial não são realistas, por apresentarem taxas de falha monótonas. Os casos mostrados na Figura 6.3.7 na página 130 e na Figura 6.3.17a) na página 137 ilustram duas destas situações onde as taxas de falha são crescentes para os instantes iniciais, mas não são monótonas. Estes casos não podem ser modelados pela distribuição Weibull (com taxa de falha monótona), nem pela exponencial, cuja taxa de falha é constante, mas são cobertos com o uso da distribuição q -Weibull.

Houve acesso apenas a tempos de vida de uma estação de solda e a dados isolados sobre alguns equipamentos de poços de petróleo, o que proporcionou a validação do modelo de taxa de falha. O acesso a informações adicionais sobre manutenção de componentes, de equipamentos, condições de operação, estratégias de manutenção, fatores ambientais, dentre outros, permitiria a validação do modelo de forma bem mais ampla e rigorosa.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Uma comparação entre o modelo q -Weibull e o modelo IDB (*Increasing, Decreasing and Bathtub shaped*), que também apresenta 3 parâmetros, embora tenha natureza exponencial, pode ser realizada para verificar as vantagens e desvantagens de cada uma.

A generalização de testes de hipótese com as q -funções e sua aplicação aos exemplos propostos, pode ser feita para permitir uma comparação entre os modelos aplicados.

O conhecimento dos custos por ciclo de manutenção dos subsistemas podem fornecer a indicação de quais deles oneram a instituição. Os subsistemas mais custosos podem então ser estudados em um nível de detalhamento mais profundo, alcançando cada componente

e reaplicando alguma das técnicas descritas para controle de taxa de falha, confiabilidade ou custo.

Desta forma é possível encontrar qual subsistema ou componente aumenta, de forma mais acentuada, os custos devido à manutenção preventiva ou corretiva ou ainda qual item acarreta um decréscimo de confiabilidade a níveis abaixo do tolerado. Trabalhos futuros podem aplicar estas ações em sistemas reais para a definição de estratégias de manutenção e para melhorias dos próprios sistemas de produção.

Trabalhos futuros poderão ainda aplicar a metodologia proposta nos sistemas de poços de petróleo automatizados e um programa de computador pode ser desenvolvido para guiar a aplicação das ferramentas propostas de forma amigável e automatizada.

Referências

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19, n. 6, p. 716–723, 1974.
- ASSIS, E. M. *Otimização do intervalo ótimo de substituição dos pneus de uma frota de aeronaves EMB-120*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 1999.
- ASSIS, E. M.; BORGES, E. P.; MELO, S. A. B. Vieira de. Generalized q -Weibull model and the bathtub curve. *International Journal of Quality & Reliability Management*, v. 30, n. 7, 2013.
- AVIZIENIS, A.; LAPRIE, J. C.; RANDELL, B. *Fundamental Concepts of Dependability*. [S.l.], 2001.
- BAK, P. *How Nature Works*. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- BARLOW, R.; HUNTER, L. Optimal preventive maintenance policies. *Operations Research*, v. 8, p. 90–100, 1960.
- BARRINGER, P. Predict failures: Crow-AMSAA 101 and Weibull 101. In: *IMEC 2004 International Mechanical Engineering Conference*. Kuwait: [s.n.], 2004.
- BARROS JÚNIOR, P. F. d. R. *Uma metodologia para análise de disponibilidade de sistemas complexos via hibridismo de Redes Bayesianas e processos Markovianos*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.
- BEBBINGTON, M.; LAI, C. D.; ZITIKIS, R. A flexible Weibull extension. *Reliability Engineering and System Safety*, p. 719–726, 2007.
- BERBERAN-SANTOS, M.; BODUNOV, E.; VALEUR, B. History of the kohlrausch (stretched exponential) function: Focus on uncited pioneering work in luminescence. *arXiv:0804.1814v1 [physics.hist-ph]*, 2008.
- BOBBIO, A.; CODETTA-RAITERI, D.; MONTANI, S.; PORTINALE, L. Reliability analysis of systems with dynamic dependencies. In: *Bayesian Networks: A Practical Guide to Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2008. p. 225–238.
- BOBBIO, A.; PORTINALE, L.; MINICHINO, M.; CIANCAMERLA, E. Improving the analysis of dependable systems by mapping fault trees into bayesian networks. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 71, p. 249–260, 2001.

BORGES, E. P. On a q -generalization of circular and hyperbolic functions. *J. Phys A Math. Gen*, v. 31, n. 23, p. 5281–5288, Jun. 1998.

BORGES, E. P. *Manifestações Dinâmicas e Termodinâmicas de Sistemas Não-Extensivos*. Tese (Tese de Doutorado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Instituto nacional de Física do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação, Rio de Janeiro, 2004.

BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 340, p. 95–101, 2004.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION'S. *PAS 55-1:2008*: Asset management. Specification for the optimized management of physical assets. 2008.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION'S. *PAS 55-2:2008*: Asset management. Guidelines for the application of PAS 55-1. 2008.

BURR, I. Cumulative frequency functions. *Ann. Math. Statist*, v. 13, p. 215–232, 1942.

CARDOSO, P.; BORGES, E.; AO, T. L.; PINHO, S. Nondistributive algebraic structures derived from nonextensive statistical mechanics. *J. Math. Phys.*, v. 49, n. 093509, 2008.

CASTRO, I. A model of imperfect preventive maintenance with dependent failure modes. *European Journal of Operational Research*, v. 196, n. 1, p. 217–224, 2009.

CHEN, M.; FELDMAN, R. M. Optimal replacement policies with minimal repair and age-dependent costs. *European Journal of Operational Research*, v. 98, n. 1, p. 75–84, 1997.

CODETTA-RAITERI, D. Integrating several formalisms in order to increase fault trees' modeling power. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 96, n. 5, p. 534–544, 2011. Codetta-Raiteri, Daniele.

COSTA, U.; FREIRE, V.; MALACARNE, L.; MENDES, R.; PICOLI, S.; VASCONCELOS, E. A. de; SILVA, E. F. da. An improved description of the dielectric breakdown in oxides based on a generalized Weibull distribution. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 361, n. 1, p. 209–215, Feb. 2006.

DHILLON, B. *Maintainability, maintenance, and reliability for engineers*. New York: CRC Press, 2006. ISBN 0-8493-7243-7.

- DOYLE, S. A.; DUGAN, J. B. Dependability assessment using binary decision diagrams (bdd). In: FTCS-25 (Ed.). *Twenty-Fifth International Symposium on Fault-Tolerant Computing, 1995*. [S.l.: s.n.], 1995.
- DUGAN, J.; SULLIVAN, K.; COPPIT, D. Developing a high-quality software tool for fault tree analysis. In: *10th International Symposium on Software Reliability Engineering*. Boca Raton, FL, USA: IEEE Computer Society, 1999. p. 222–231.
- FILHO, S. Simões. *Análise de Árvore de Falhas Considerando Incertezas na Definição dos Eventos Básicos*. Tese (Tese de Doutorado) — COPPE/UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.
- FLEMING, P. V.; ASSIS, E. M. A reliability analysis of brasília emb-120 aircraft tyre replacement policy. In: SCHUËLLER, G. I.; KAFKA, P. (Ed.). *The Tenth European Conference on Safety and Reliability*. Munich-Garching / Germany: [s.n.], 1999.
- GELMAN, A.; CARLIN, J. B.; STERN, H. S.; RUBIN, D. B. *Bayesian Data Analysis*. 2nd. ed. Washington, D.C.: CHAPMAN & HALUCRC, 2004.
- GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I.; JEFFREY, A. *Table of Integrals, Series, and Products*. 5^a. ed. San Diego: Academic Press, 1994.
- GULATI, R.; DUGAN, J. B. A modular approach for analyzing static and dynamic fault trees. In: *Reliability and Maintainability Symposium*. [S.l.: s.n.], 1997.
- HILL, B. M. Simple general approach to inference about tail of a distribution. *Annals of Statistics*, v. 3, n. 5, p. 1163–1174, 1975. Times Cited: 748 Hill, bm.
- HONGZHOU, W. A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *European Journal of Operational Research*, v. 139, n. 3, p. 469–489, 2002.
- HUANG, J.; MILLER, C. R.; OKOGBAA, O. G. Optimal preventive-replacement intervals for the Weibull life distribution: solutions and applications. In: *Reliability and Maintainability Symposium, 1995. Proceedings., Annual*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 370–377.
- HURVICH, C. M.; TSAI, C.-L. Regression and time series model selection in small samples. *Biometrika*, v. 76, n. 2, p. 297–307, 1989.
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. *ISO 14224:1999(E)*: Petroleum and natural gas industries - Collection and exchange of reliability and maintenance data for equipment. 1999.

JAUREGUI, M.; TSALLIS, C. New representations of π and dirac delta using the nonextensive-statistical-mechanics q - exponential function. *Journal of Mathematical Physics*, v. 51, n. 6, p. 063304, 2010.

JAUREGUI, M.; TSALLIS, C. q -generalization of the inverse fourier transform. *Physics Letters A*, v. 375, n. 21, p. 2085–2088, 2011.

JAUREGUI, M.; TSALLIS, C.; CURADO, E. M. F. q -moments remove the degeneracy associated with the inversion of the q -fourier transform. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2011, n. 10, p. P10016, 2011.

JINGLUN, Z.; QUAN, S. Reliability analysis based on binary decision diagrams. *Journal of Quality in Maintenance Engineering Cybernetics*, v. 4, n. 2, p. 150–161, 1998.

JOHNSON, L. The median ranks of sample values in their population with an application to certain fatigue studies. *Industry Mathematics*, v. 2, p. 1–9, 1951.

KHAKZAD, N.; KHAN, F.; AMYOTTE, P. Safety analysis in process facilities: Comparison of fault tree and bayesian network approaches. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 96, n. 8, p. 925–932, 2011. Khakzad, Nima Khan, Faisal Amyotte, Paul.

KIM, C. Warranty and discrete preventive maintenance. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 84, n. 3, p. 301–309, 2004.

KIUREGHIAN, A. D.; DITLEVSEN, D. O.; SONG, J. Availability, reliability and downtime of systems with repairable components. *Reliability Engineering and System Safety* 92, p. 231–242, 2007.

KRISHNAMOORTHY, K. S. *Reliability Methods for Engineers*. Wisconsin: ASQC Quality Press, 1992.

KUMAR, D.; WESTBERG, U. Maintenance scheduling under age replacement policy using proportional hazards model and ttt-plotting. *European Journal of Operational Research*, v. 99, n. 3, p. 507–515, 1997.

LANGSETH, H. *Bayesian Networks with Applications in Reliability Analysis*. Tese (Dr. Ing. Thesis) — Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2002.

LANGSETH, H.; HAUGEN, K.; SANDTORV, H. Analysis of oreda data for maintenance optimization. *Reliability Engineering and System Safety* 60 (1998), p. 103–110, 1998.

- LEMIEUX, C. *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*. Berlin: Springer, 2009. ISBN 9780387781648.
- LENZI, E.; MENDES, R.; RAJAGOPAL, A. Quantum statistical mechanics for nonextensive systems. *Phys. Rev. E*, v. 59, p. 1398–1407, 1999.
- LEWIS, E. E. *Introduction to Reliability Engineering*. New York: John Wiley & Sons, 1987. ISBN 0-471-81199-8.
- LOBÃO, T. C. P.; CARDOSO, P. G. S.; PINHO, S. T. R.; BORGES, E. P. Some properties of deformed q - numbers. *Braz. J. Phys.*, v. 39 (2A), p. 402–407, 2009.
- LONG, W.; SATO, Y.; ZHANG, H. Monte carlo simulation for analysis of sequential failure logic. *Ieice Transactions on Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences*, E83A, n. 5, p. 812–817, 2000. Long, W Sato, Y Zhang, H.
- MALACARNE, L. C.; MENDES, R. S. Regularities in football goal distributions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 286, n. 1-2, p. 391–395, 2000.
- MANIAN, R.; DUGAN, J. B.; COPPIT, D.; SULLIVAN, K. J. Combining various solution techniques for dynamic fault tree analysis of computer systems. In: *High-Assurance Systems Engineering Symposium, 1998*. Washington, DC, USA: Third IEEE International Publication, 1998. p. 21–28.
- MARQUES, R. L.; DUTRA, I. *Redes Bayesianas: o que são, para que servem, algoritmos e exemplos de aplicações*. [S.l.]: COPPE UFRJ, 2007.
- MERLE, G.; ROUSSEL, J. M.; LESAGE, J. J.; BOBBIO, A. Probabilistic algebraic analysis of fault trees with priority dynamic gates and repeated events. *Reliability, IEEE Transactions on*, v. 59, n. 1, p. 250–261, 2010.
- MESHKAT, L.; DUGAN, J. B.; ANDREWS, J. D. Dependability analysis of systems with on- demand and active failure modes, using dynamic fault trees. *IEEE TRANSACTIONS ON RELIABILITY*, v. 51, n. 2, p. 240–251, 2002. Meshkat, L Dugan, JB Andrews, JD.
- MONTANI, S.; PORTINALE, L.; BOBBIO, A.; VARESIO, M.; CODETTA-RAITERI, D. A tool for automatically translating dynamic fault trees into dynamic bayesian networks. In: *Reliability and Maintainability Symposium 2006 RAMS '06 Annual*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 434–441.
- MOURA, M. J. d. C. *Processos semi Markovianos e Redes Bayesianas para avaliação de indicadores de desempenho de confiabilidade de sistemas complexos tolerantes à falha*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Programa de pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

- MOYANO, L. G.; TSALLIS, C.; GELL-MANN, M. Numerical indications of a q -generalised central limit theorem. *Europhysics Letters (EPL)*, v. 73, n. 6, p. 813–819, 2006.
- MURTHY, D. N. P.; XIE, M.; JIANG, R. *Weibull Models*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2004. (Wiley Series in Probability and Statistics).
- MURTHY, D. P.; RAUSAND, M.; ØSTERÅS, T. *Product Reliability: specification and performance*. London: Springer, 2008. (Springer Series in Reliability Engineering). ISBN 978-1-84800-270-8.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, S. On some recent modifications of Weibull distribution. *IEEE Trans. Reliability*, v. 54, n. 4, p. 561–562, 2005.
- NADARAJAH, S.; KOTZ, S. q exponential is a Burr distribution. *Phys. Lett. A*, v. 359, p. 577–579, 2006.
- NEAPOLITAN, R. E. *Learning Bayesian Networks*. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2004.
- NEPOMUCENO, L. X. *Técnicas de manutenção preditiva*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1989.
- O'HAGAN, A. Bayesian analysis of computer code outputs: A tutorial. *Reliability Engineering and System Safety* 91, p. 1290–1300, 2006.
- OREDA. *Offshore Reliability Data Handbook*. 4th. ed. [S.l.]: Det Norske Veritas (DNV) Technica, 2002. ISBN 82-14-02705-5.
- PANAGIOTIDOU, S.; TAGARAS, G. Optimal preventive maintenance for equipment with two quality states and general failure time distributions. *European Journal of Operational Research*, v. 180, n. 1, p. 329–353, 2007.
- PASCUAL, R.; MERUANE, V.; REY, P. On the effect of downtime costs and budget constraint on preventive and replacement policies. *Reliability Engineering and System Safety* 93 (2008), p. 144–151, 2008.
- PÉREZ, C.; MARTÍN, J.; RUFO, M. Sensitivity estimations for bayesian inference models solved by MCMC methods. *Reliability Engineering and System Safety*, p. 1310–1314, 2006.
- PHAM, H.; LAI, C. On recent generalizations of the Weibull distribution. *IEEE Trans. Reliability*, v. 56, n. 3, p. 454–458, 2007.

- PICOLI, S.; MENDES, R.; MALACARNE, L. q -exponential, Weibull, and q -Weibull distributions: an empirical analysis. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 324, p. 678–688, Jun. 2003.
- PRATO, D.; TSALLIS, C. Nonextensive foundation of Lévy distributions. *Physical Review E*, v. 60, n. 2, p. 2398–2401, Aug. 1999.
- RAMAKUMAR, R. *Engineering Reliability: Fundamentals and Applications*. New Jersey: Prentice-Hall, 1993.
- RAMIREZ-MÁRQUEZ, J. E.; JIANG, W. On improved confidence bounds for system reliability. *IEEE Transactions on Reliability*, v. 55, Março 2006.
- RAUZY, A. B. Sequence algebra, sequence decision diagrams and dynamic fault trees. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 96, n. 7, p. 785–792, 2011.
- REBOREDO, J. C.; RIVERA-CASTRO, M. A.; ASSIS, E. M. Power law behavior in time durations between extreme returns. *Quantitative Finance. A ser publicado.*, 2013.
- RIZZO, S.; RAPISARDA, A. Environmental atmospheric turbulence at florence airport. In: *8th Experimental Chaos Conference*. Florence, ITALY: AIP Conference proceedings, 2004. v. 742, p. 176.
- ROMMERT, D. Applications of maintenance optimization models: a review and analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, v. 51, n. 3, p. 229–240, 1996.
- SANDTORV, H. A.; HOKSTAD, P.; THOMPSON, D. W. Practical experiences with a data collection project: the oreda project. *Reliability Engineering and System Safety* 51 (1996), p. 159–167, 1996.
- SANTOS, W. B. d. *Análise probabilística de riscos via redes Bayesianas: uma aplicação na construção de Poços multilaterais*. Tese (Dissertação de Mestrado) — Programa de pós-graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.
- SARTORI, I.; ASSIS, E. M.; SILVA, A. L. da; MELO, R. L. F. Vieira de; BORGES, E. P.; MELO, S. A. B. Vieira de. Reliability modeling of a natural gas recovery plant using q -Weibull distribution. In: ALVES, C. A. O. d. N. Rita Maria de B.; BISCAIA, J. E. C. (Ed.). *Computer Aided Chemical Engineering*. [S.l.]: Elsevier, 2009. v. 27, p. 1797–1802.
- SILVA, L. C. F. d. *Inteligência computacional para predição de produção de reservatórios de petróleo*. Tese (Tese de Doutorado) — Coordenação dos Programas de Pós-graduação de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

- SOUZA, A. M. de; TSALLIS, C. Student's t - and r -distributions: Unified derivation from an entropic variational principle. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 236, p. 52, 1997.
- TAVARES, L. A. *Excelência na Manutenção - Estratégias, Otimização e Gerenciamento*. Salvador: Casa da Qualidade Editora Ltda, 1996.
- TSALLIS, C. Possible generalization of Boltzmann- Gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, v. 52, n. 1/2, p. 479–487, 1988.
- TSALLIS, C. Extensive versus nonextensive physics. In: MORÁN-LÓPEZ, J.; SANCHEZ, J. (Ed.). *New Trends in Magnetism, Magnetic Materials and Their Applications*. New York: Plenum Press, 1994. p. 451–463.
- TSALLIS, C. What are the numbers that experiments provide? *Química Nova*, v. 17, p. 468–471, 1994.
- TSALLIS, C. *Introduction to nonextensive statistical mechanics, approaching a complex world*. New York: Springer, 2009.
- TSALLIS, C. *Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics*. [S.l.]: <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>, 2013.
- TSALLIS, C.; ANTENEODO, C.; BORLAND, L.; OSORIO, R. Nonextensive statistical mechanics and economics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, p. 89–100, 2003.
- TSALLIS, C.; LEVY, S. V. F.; SOUZA, A. M. C.; MAYNARD, R. Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature. *Physical Review Letters*, v. 75, n. 20, p. 3589–3593, Nov. 1995.
- TSALLIS, C.; LEVY, S. V. F.; SOUZA, A. M. C.; MAYNARD, R. Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature. *Physical Review Letters*, v. 77, n. 27, p. 5442, 1996.
- UMAROV, S.; TSALLIS, C. On a representation of the inverse f_q - transform. *Physics Letters A*, v. 372, n. 29, p. 4874–4876, 2008.
- UMAROV, S.; TSALLIS, C.; STEINBERG, S. On a q -central limit theorem consistent with nonextensive statistical mechanics. *Milan Journal of Mathematics*, v. 76, n. 1, p. 307–328, 2008. ISI Document Delivery No.: 387ZA Times Cited: 25 Cited Reference Count: 54 Umarov, Sabir Tsallis, Constantino Steinberg, Stanly Birkhauser verlag ag Basel.

- VESELY, W. E.; GOLDBERG, F. F.; ROBERTS, N. H.; HAASL, D. F. *Fault Tree Handbook*. Washington: US NRC, 1981. (NUREG-0492).
- WEIBULL, W. *A Statistical Theory of the Strength of Materials*. [S.l.]: Royal Swedish Institute for Engineering Research, 1939. 45 p.
- WEIBULL, W. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, p. 293–297, Sept. 1951.
- YAMANO, T. Some properties of q -logarithm and q - exponential functions in Tsallis statistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 305, p. 486–496, 2002.
- YEH, R. H.; CHANG, W. L. Optimal threshold value of failure-rate for leased products with preventive maintenance actions. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 46, n. 5-6, p. 730–737, 2007.
- YOU, M.-Y.; LI, H.; MENG, G. Control-limit preventive maintenance policies for components subject to imperfect preventive maintenance and variable operational conditions. *Reliability Engineering & System Safety*, v. 96, n. 5, p. 590–598, 2011.

Apêndice A – Deduções das principais expressões

A.1 Funções de confiabilidade e derivadas

A.1.1 Função densidade de probabilidade Weibull

$$f(t) = \frac{\beta(t-t_0)^{\beta-1}}{(\eta-t_0)^\beta} \exp \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \quad t \geq t_0 \quad (\text{A.1.1})$$

A.1.2 Função densidade de probabilidade q -Weibull

$$f_q(t) = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right], \quad t \geq t_0 \quad (\text{A.1.2})$$

A.1.3 Função q -exponencial

$$\exp_q(x) = \begin{cases} \exp(x), & \text{se } q = 1 \\ (1 + (1-q)x)^{\frac{1}{1-q}}, & \text{se } q \neq 1 \quad \wedge \quad (1 + (1-q)x) > 0 \\ 0, & \text{se } q \neq 1 \quad \wedge \quad (1 + (1-q)x) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.1.3})$$

A.1.4 Função confiabilidade

A função confiabilidade é $R_q(t) = \int_t^\infty f_q(x)dx$, ou seja,

$$R_q(t) = \int_t^\infty \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t'-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t'-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] dt' \quad (\text{A.1.4})$$

Sabe-se que

$$\int_t^{\infty} \exp_q(\zeta) d\zeta = \frac{1}{(2-q)} [\exp_q(\zeta)]^{2-q} \quad (\text{A.1.5})$$

Identificando $\zeta = -\left(\frac{t'-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta$, logo $d\zeta = -\beta\left(\frac{1}{\eta-t_0}\right)\left(\frac{t'-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-1} dt'$ temos:

$$R_q(t) = -(2-q) \int_t^{\infty} \exp_q[\zeta] d\zeta, \quad (\text{A.1.6})$$

usando a integral da q -exponencial (Equação A.1.5) fica:

$$\begin{aligned} R_q(t) &= -(2-q) \frac{1}{(2-q)} \left| [\exp_q(\zeta)]^{2-q} \right|_t^{\infty} \\ &= - \left| [\exp_q(\zeta)]^{2-q} \right|_t^{\infty} \\ &= - \left| \left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{t'-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{2-q} \right|_t^{\infty} \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

e a confiabilidade é:

$$R_q(t) = \left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{2-q}, \quad t \geq t_0 \quad (\text{A.1.8})$$

A.1.5 Função de falha acumulada

$$F_q(t) = 1 - \left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{2-q}, \quad t \geq t_0 \quad (\text{A.1.9})$$

A.1.6 Função taxa de falha

$$h_q(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]}{\left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{2-q}} \quad (\text{A.1.10})$$

$$h_q(t) = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{q-1} \quad (\text{A.1.11})$$

A.1.7 Derivada temporal da taxa de falha

A derivada da q -exponencial é:

$$\frac{d \exp_q x}{dx} = (\exp_q x)^q \quad (\text{A.1.12})$$

Fazendo $k = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0}$ e $\zeta = \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)$ na Equação A.1.11 temos $d\zeta = \frac{1}{\eta-t_0} dt$

$$h_q(t) = k\zeta^{\beta-1} \{\exp_q [-\zeta^\beta]\}^{q-1} \quad (\text{A.1.13})$$

$$\begin{aligned} \frac{h'_q(t)}{k} = & (\beta-1)\zeta^{\beta-2}\frac{1}{\eta-t_0} \{\exp_q [-\zeta^\beta]\}^{q-1} + \\ & + \zeta^{\beta-1} (q-1) \{\exp_q [-\zeta^\beta]\}^{q-2} \{\exp_q [-\zeta^\beta]\}^q (-\beta) (\zeta^{\beta-1}) \frac{1}{\eta-t_0} \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

$$\frac{h'_q(t)}{k} = (\beta-1)\zeta^{\beta-2}\frac{1}{\eta-t_0} \{\exp_q [-\zeta^\beta]\}^{q-1} + \zeta^{2\beta-2} (q-1) \{\exp_q [-\zeta^\beta]\}^{2q-2} (-\beta) \frac{1}{\eta-t_0} \quad (\text{A.1.15})$$

$$h'_q(t) = \frac{k}{\eta-t_0} \{\exp_q [-\zeta^\beta]\}^{q-1} \zeta^{\beta-2} \left\{ (\beta-1) + \zeta^\beta (q-1) \{\exp_q [-\zeta^\beta]\}^{q-1} (-\beta) \right\} \quad (\text{A.1.16})$$

Chamando $l = \left\{ (\beta-1) + \zeta^\beta (q-1) \{\exp_q [-\zeta^\beta]\}^{q-1} (-\beta) \right\}$ temos

$$l = (\beta-1) + \zeta^\beta (q-1) \left\{ [1 + (1-q) (-\zeta^\beta)]_+^{\frac{1}{1-q}} \right\}^{q-1} (-\beta) \quad (\text{A.1.17})$$

$$l = (\beta-1) + \zeta^\beta (q-1) \left\{ [1 + (1-q) (-\zeta^\beta)]_+^{-1} \right\} (-\beta) \quad (\text{A.1.18})$$

$$l = (\beta-1) + \frac{\zeta^\beta (q-1) (-\beta)}{[1 + (1-q) (-\zeta^\beta)]_+} \quad (\text{A.1.19})$$

$$l = \frac{(\beta-1) [1 + (1-q) (-\zeta^\beta)]_+ + \zeta^\beta (q-1) (-\beta)}{[1 + (1-q) (-\zeta^\beta)]_+} \quad (\text{A.1.20})$$

$$l = \frac{(\beta - 1) + (\beta - 1)(1 - q)(-\zeta^\beta) + \zeta^\beta(q - 1)(-\beta)}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+} \quad (\text{A.1.21})$$

$$l = \frac{(\beta - 1) + (\beta - 1)(q - 1)(\zeta^\beta) + \zeta^\beta(q - 1)(-\beta)}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+} \quad (\text{A.1.22})$$

$$l = \frac{(\beta - 1) + (q - 1)(\zeta^\beta)[(\beta - 1) + (-\beta)]}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+} \quad (\text{A.1.23})$$

$$l = \frac{(\beta - 1) + (1 - q)(\zeta^\beta)}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+} \quad (\text{A.1.24})$$

$$l = \frac{(\beta - 1) \left[1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) (\zeta^\beta) \right]}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+} \quad (\text{A.1.25})$$

$$h'_q(t) = \frac{k(\beta - 1)}{\eta - t_0} \left\{ \exp_q[-\zeta^\beta] \right\}^{q-1} \zeta^{\beta-2} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \zeta^\beta}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+} \right\} \quad (\text{A.1.26})$$

$$h'_q(t) = \frac{k(\beta - 1)}{\eta - t_0} \frac{\zeta^{\beta-2}}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \zeta^\beta}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+} \right\} \quad (\text{A.1.27})$$

$$h'_q(t) = \frac{k(\beta - 1) \zeta^{\beta-2}}{\eta - t_0} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \zeta^\beta}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+^2} \right\} \quad (\text{A.1.28})$$

$$h'_q(t) = \frac{\beta(2 - q)(\beta - 1) \zeta^{\beta-2}}{\eta - t_0} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \zeta^\beta}{[1 + (1 - q)(-\zeta^\beta)]_+^2} \right\} \quad (\text{A.1.29})$$

$$h'_q(t) = \frac{(2 - q) \beta (\beta - 1) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-2}}{(\eta - t_0)^2} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta}{\left[1 + (1 - q) \left(- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right) \right]_+^2} \right\} \quad (\text{A.1.30})$$

Note que $\lim_{q \rightarrow 1} h'_q(t) = \frac{\beta(\beta-1)}{(\eta-t_0)^2} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-2}$.

Tempo para o qual a derivada $h'_q(t) = 0$

$$1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta = 0 \quad (\text{A.1.31})$$

$$\left(\frac{1-q}{1-\beta} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta = 1 \quad (\text{A.1.32})$$

$$\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta = \frac{1}{\left(\frac{1-q}{1-\beta} \right)} \quad (\text{A.1.33})$$

$$\frac{t-t_0}{\eta-t_0} = \left[\frac{1-\beta}{1-q} \right]^{1/\beta} \quad (\text{A.1.34})$$

$$t^* = t_0 + (\eta-t_0) \left(\frac{1-\beta}{1-q} \right)^{1/\beta} \quad (\text{A.1.35})$$

Valor extremo da taxa de falha

$$h_q(t^*) = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t^*-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{t^*-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{q-1} \quad (\text{A.1.36})$$

$$h_q(t^*) = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t_0 + (\eta-t_0) \left(\frac{1-\beta}{1-q} \right)^{1/\beta} - t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \times \left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{t_0 + (\eta-t_0) \left(\frac{1-\beta}{1-q} \right)^{1/\beta} - t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{q-1} \quad (\text{A.1.37})$$

$$h_q(t^*) = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\left(\frac{1-\beta}{1-q} \right)^{1/\beta} \right)^{\beta-1} \times \left\{ \exp_q \left[- \left(\left(\frac{1-\beta}{1-q} \right)^{1/\beta} \right)^\beta \right] \right\}^{q-1} \quad (\text{A.1.38})$$

$$h_q(t^*) = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{1-\beta}{1-q} \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{1-\beta}{1-q} \right) \right] \right\}^{q-1} \quad (\text{A.1.39})$$

Recorrendo a definição da q -exponencial em Equação A.1.3

$$h_q(t^*) = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{1-\beta}{1-q}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left\{ \left[1 - (1-q) \left(\frac{1-\beta}{1-q}\right) \right]_+^{\frac{1}{1-q}} \right\}^{q-1} \quad (\text{A.1.40})$$

$$h_q(t^*) = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{1-\beta}{1-q}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left\{ [\beta]_+^{\frac{1}{1-q}} \right\}^{q-1} \quad (\text{A.1.41})$$

$$h_q(t^*) = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{1-\beta}{1-q}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \beta^{-1} \quad (\text{A.1.42})$$

$$h_q(t^*) = \frac{2-q}{\eta-t_0} \left(\frac{1-\beta}{1-q}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \quad (\text{A.1.43})$$

A.1.8 Segunda derivada temporal da taxa de falha

Identificando na Equação A.1.30 $m = \frac{(2-q)\beta(\beta-1)}{(\eta-t_0)^2}$, fazendo $u = \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-2}$ e

$$v = \frac{1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta}{\left[1 + (1-q) \left(-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta\right) \right]_+^2} \quad (\text{A.1.44})$$

A segunda derivada temporal da taxa de falha é:

$$h_q''(t) = m(uv)' \quad (\text{A.1.45})$$

$$h_q''(t) = m(u'v + uv') \quad (\text{A.1.46})$$

Sabemos que:

$$u' = \left(\frac{\beta-2}{\eta-t_0}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-3} \quad (\text{A.1.47})$$

Na Equação A.1.44 fazendo $r = 1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta$ e $s = \left[1 + (1-q) \left(-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta\right) \right]_+^2$ temos $v = \frac{r}{s}$ e a derivada do quociente é $v' = \left(\frac{r}{s}\right)' = \frac{r's - rs'}{s^2}$.

$$r' = \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \frac{\beta}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-1} \quad (\text{A.1.48})$$

$$s' = 2 \left\{ 1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right\} \frac{(-\beta)(1-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-1} \quad (\text{A.1.49})$$

$$v' s^2 = \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \frac{\beta}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-1} \left\{ 1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right\}^2 - \left[1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] 2 \left\{ 1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right\} \frac{(-\beta)(1-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-1} \quad (\text{A.1.50})$$

$$v' s^2 = \left\{ \frac{\beta(1-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-1} \left\{ 1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right\} \times \left(\frac{1}{\beta-1} \right) \left\{ 1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right\} + \left[1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] 2 \right\} \quad (\text{A.1.51})$$

Chamando $p = \left(\frac{1}{\beta-1}\right) \left\{ 1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right\} + \left[1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] 2$ termos

$$p = \left\{ \left(\frac{1}{\beta-1}\right) + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right\} + \left[2 + 2 \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \quad (\text{A.1.52})$$

$$p = \left(\frac{1}{\beta-1}\right) - \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2 + 2 \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \quad (\text{A.1.53})$$

$$p = \left(\frac{1}{\beta-1}\right) + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2 \quad (\text{A.1.54})$$

Retornando a Equação A.1.51

$$v's^2 = \frac{\beta(1-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-1} \left\{ 1 + (1-q) \left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right\} \left\{ \left(\frac{1}{\beta-1}\right) + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2 \right\} \quad (\text{A.1.55})$$

$$v' = \frac{\frac{\beta(1-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-1} \left\{ \left(\frac{1}{\beta-1}\right) + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2 \right\}}{\left[1 + (1-q) \left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right]_+^3} \quad (\text{A.1.56})$$

Agora temos:

$$h_q''(t) = m \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\beta-2}{\eta-t_0}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-3} \frac{1 + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta}{\left[1 + (1-q) \left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right]_+^2} + \\ \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-2} \frac{\frac{\beta(1-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-1} \left\{ \left(\frac{1}{\beta-1}\right) + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2 \right\}}{\left[1 + (1-q) \left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right]_+^3} \end{array} \right\} \quad (\text{A.1.57})$$

$$h_q''(t) = m \frac{1}{(\eta-t_0) \left[1 + (1-q) \left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right]_+^2} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-3} \times \left\{ \begin{array}{l} (\beta-2) + (\beta-2) \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + \\ \frac{\beta(1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \left\{ \left(\frac{1}{\beta-1}\right) + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2 \right\}}{\left[1 + (1-q) \left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right]} \end{array} \right\} \quad (\text{A.1.58})$$

$$\text{Denominando } g = \left\{ \frac{(\beta-2) + (\beta-2) \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + \beta(1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \left\{ \left(\frac{1}{\beta-1}\right) + \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2 \right\}}{\left[1 + (1-q) \left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta \right] \right]} \right\} \text{ te-}$$

mos:

$$g = \left\{ \frac{\left\{ \left[(\beta - 2) + (\beta - 2) \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \left[1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right] + \right.}{\left. \beta (1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \left\{ \left(\frac{1}{\beta-1} \right) + \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta + 2 \right\}} \right\}}{\left[1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right]} \right\} \quad (\text{A.1.59})$$

$$g = \left\{ \frac{\left\{ \begin{aligned} & (\beta - 2) + (\beta - 2) \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta + \\ & \left[(\beta - 2) + (\beta - 2) \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] + \end{aligned} \right\}}{\left\{ \beta (1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \left\{ \left(\frac{1}{\beta-1} \right) + \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta + 2 \right\}} \right\}}{\left[1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right]} \right\} \quad (\text{A.1.60})$$

$$g = \left\{ \frac{\left\{ \begin{aligned} & (\beta - 2) + (\beta - 2) \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta - (\beta - 2) (1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta + \\ & - (\beta - 2) (1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{2\beta} \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) + \beta \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta + \\ & \beta (1-q) \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{2\beta} + 2\beta (1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \end{aligned} \right\}}{\left[1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right]} \right\} \quad (\text{A.1.61})$$

$$g = \left\{ \frac{\left[\begin{aligned} & (\beta - 2) + (2\beta - 2) \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta + (\beta + 2) (1-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta + \\ & 2 (1-q) \left(\frac{1-q}{\beta-1} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{2\beta} \end{aligned} \right]}{\left[1 + (1-q) \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right]} \right\} \quad (\text{A.1.62})$$

$$g = \left\{ \frac{(\beta - 2) + 2(1 - q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + (\beta + 2)(1 - q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2(1 - q) \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{2\beta}}{\left[1 + (1 - q) \left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta\right]\right]} \right\} \quad (\text{A.1.63})$$

$$g = \left\{ \frac{(\beta - 2) + (\beta + 4)(1 - q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2(1 - q) \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{2\beta}}{\left[1 + (1 - q) \left[-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta\right]\right]} \right\} \quad (\text{A.1.64})$$

Retornando os valores de g e m :

$$h_q''(t) = \frac{(2-q)\beta(\beta-1)}{(\eta-t_0)^3} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{\beta-3} \times \left\{ \frac{(\beta - 2) + (\beta + 4)(1 - q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta + 2(1 - q) \left(\frac{1-q}{\beta-1}\right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^{2\beta}}{\left[1+(1-q)\left(-\left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta\right)\right]_+^3} \right\} \quad (\text{A.1.65})$$

A.2 Tempo máximo da distribuição q -Weibull

$$(1 + (1 - q)x) = 0 \Rightarrow 1 - (1 - q) \left(\frac{t_{\max} - t_0}{\eta - t_0}\right)^\beta = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

$$(1 - q) \left(\frac{t_{\max} - t_0}{\eta - t_0}\right)^\beta = 1 \Rightarrow \left(\frac{t_{\max} - t_0}{\eta - t_0}\right)^\beta = \frac{1}{1 - q} \quad (\text{A.2.2})$$

$$\frac{t_{\max} - t_0}{\eta - t_0} = \left(\frac{1}{1 - q}\right)^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow t_{\max} - t_0 = (\eta - t_0) \left(\frac{1}{1 - q}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{A.2.3})$$

$$t_{\max} = t_0 + (\eta - t_0) (1 - q)^{-\frac{1}{\beta}} \quad (\text{A.2.4})$$

A.3 Momentos da distribuição q -Weibull para $t_0 \neq 0$

A.3.1 Momento de ordem n para $q > 1$

$$\mu'_n = \int_0^{\infty} t^n f_q(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} t^n (2-q) \frac{\beta}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta} \right] dt \quad (\text{A.3.1})$$

chamando $\tau = \frac{t-t_0}{\eta-t_0}$ temos $t = \tau(\eta-t_0) + t_0$ e $dt = (\eta-t_0) d\tau$ e

$$\begin{aligned} \mu'_n &= \int_{t_0}^{\infty} [(\eta-t_0)\tau + t_0]^n (2-q) \frac{\beta}{\eta-t_0} (\tau)^{\beta-1} \exp_q \left[-(\tau)^{\beta} \right] (\eta-t_0) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} [(\eta-t_0)\tau]^j t_0^{n-j} \right\} (2-q) \frac{\beta}{\eta-t_0} (\tau)^{\beta-1} \exp_q \left[-(\tau)^{\beta} \right] (\eta-t_0) d\tau \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta-t_0)^j (2-q) \int_{t_0}^{\infty} \tau^j \beta (\tau)^{\beta-1} \exp_q \left[-(\tau)^{\beta} \right] \beta d\tau \right\} \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta-t_0)^j (2-q) \int_{t_0}^{\infty} \beta (\tau)^{\beta+j-1} \exp_q \left[-(\tau)^{\beta} \right] \beta d\tau \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3.2})$$

chamando $\tau^{\beta} = x$ temos $dx = \beta\tau^{\beta-1}d\tau$ e $\tau = x^{\frac{1}{\beta}}$ logo $d\tau = \frac{1}{\beta(x^{\frac{1}{\beta}})^{\beta-1}}dx$ ou seja

$d\tau = \frac{1}{\beta x^{\frac{\beta-1}{\beta}}}dx$. Retornando a μ'_n temos:

$$\begin{aligned} \mu'_n &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta-t_0)^j (2-q) \int_0^{\infty} \beta \left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta+j-1} \exp_q \left[-\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta} \right] \frac{1}{\beta x^{\frac{\beta-1}{\beta}}} dx \right\} \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta-t_0)^j (2-q) \int_0^{\infty} x^{\frac{\beta+j-1}{\beta}} \exp_q [-x] x^{\frac{1-\beta}{\beta}} dx \right\} \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta-t_0)^j (2-q) \int_0^{\infty} x^{\frac{j}{\beta}} \exp_q [-x] dx \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

Utilizando a representação integral da q -exponencial de Tsallis (1994a) temos:

$$\exp_q(-x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} e^{-(q-1)xu} du \quad (q > 1, x > 0). \quad (\text{A.3.4})$$

O n -ésimo momento fica:

$$\begin{aligned}\mu'_n &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \int_0^\infty x^{\frac{j}{\beta}} dx \exp_q[-x] \right\} \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \int_0^\infty x^{\frac{j}{\beta}} dx \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \int_0^\infty u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} e^{-(q-1)xu} du \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.3.5})$$

Invertendo a ordem da integração:

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} \frac{t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q)}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \int_0^\infty du u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} \int_0^\infty dx x^{\frac{j}{\beta}} e^{-(q-1)xu} \right\}\quad (\text{A.3.6})$$

Comparando a integral interna com a definição da função Γ :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-v} v^{z-1} dv\quad (\text{A.3.7})$$

Identificando $v = (q-1)xu$ temos $x = \frac{v}{(q-1)u}$ com $dx = \frac{dv}{(q-1)u}$ e $z-1 = j/\beta$ logo $z = 1 + j/\beta$ temos que:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dx x^{\frac{j}{\beta}} e^{-(q-1)xu} &= \int_0^\infty \frac{dv}{(q-1)u} \left(\frac{v}{(q-1)u} \right)^{\frac{j}{\beta}} e^{-v} \\ &= \int_0^\infty \frac{dv}{(q-1)^{1+\frac{j}{\beta}} u^{1+\frac{j}{\beta}}} v^{\frac{j}{\beta}} e^{-v} \\ &= \frac{1}{(q-1)^{1+\frac{j}{\beta}} u^{1+\frac{j}{\beta}}} \int_0^\infty v^{\frac{j}{\beta}} e^{-v} dv \\ &= \frac{1}{(q-1)^{1+\frac{j}{\beta}} u^{1+\frac{j}{\beta}}} \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right)\end{aligned}\quad (\text{A.3.8})$$

Retornando:

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} \frac{t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q)}{\Gamma(\frac{1}{q-1})} \int_0^\infty du u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} \frac{\Gamma(1+\frac{j}{\beta})}{(q-1)^{1+\frac{j}{\beta}} u^{1+\frac{j}{\beta}}} \right\}\quad (\text{A.3.9})$$

Organizando:

$$\begin{aligned} \mu'_n &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} \frac{t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \Gamma(1 + \frac{j}{\beta})}{(q-1)^{1+\frac{j}{\beta}} \Gamma(\frac{1}{q-1})} \int_0^\infty du u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u \frac{1}{u^{1+\frac{j}{\beta}}}} \right\} \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} \frac{t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \Gamma(1 + \frac{j}{\beta})}{(q-1)^{1+\frac{j}{\beta}} \Gamma(\frac{1}{q-1})} \int_0^\infty du u^{\frac{1}{q-1}-1-1-\frac{j}{\beta}} e^{-u} \right\} \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} \frac{t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \Gamma(1 + \frac{j}{\beta})}{(q-1)^{1+\frac{j}{\beta}} \Gamma(\frac{1}{q-1})} \int_0^\infty du u^{\frac{1}{q-1}-2-\frac{j}{\beta}} e^{-u} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

Comparando novamente com a definição de Γ temos:

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} \frac{t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \Gamma(1 + \frac{j}{\beta})}{(q-1)^{1+\frac{j}{\beta}} \Gamma(\frac{1}{q-1})} \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 1 - \frac{j}{\beta}\right) \right\} \quad (\text{A.3.11})$$

Com as restrições $\frac{1}{q-1} > 0 \Rightarrow q - 1 > 0 \Rightarrow q > 1$ e $\frac{1}{q-1} - 1 - \frac{j}{\beta} > 0 \Rightarrow \frac{1}{q-1} > 1 + \frac{j}{\beta} \Rightarrow q - 1 < \frac{\beta}{\beta+j} \Rightarrow q < 1 + \frac{\beta}{\beta+j}$, ou seja $1 < q < 1 + \frac{\beta}{\beta+j}$, onde $j = 1, 2, \dots, n$ então $1 < q < 1 + \frac{\beta}{\beta+n}$. A Equação A.3.11 pode ser reescrita considerando que $\frac{1}{q-1} - 1 = \frac{2-q}{q-1}$ e usando a propriedade da função gama $\Gamma(m + 1) = m\Gamma(m)$. Identificando $m + 1 = \frac{1}{q-1}$, portanto $\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right) = \left(\frac{1}{q-1} - 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 1\right) = \left(\frac{2-q}{q-1}\right) \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)$. Com isso Equação A.3.11 fica:

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} \frac{t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \Gamma(1 + \frac{j}{\beta})}{(q-1)^{1+\frac{j}{\beta}} \left(\frac{2-q}{q-1}\right) \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 1 - \frac{j}{\beta}\right) \right\} \quad (\text{A.3.12})$$

$$\begin{aligned} \mu'_n &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \frac{\Gamma(1 + \frac{j}{\beta})}{(q-1)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 1 - \frac{j}{\beta}\right) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{\binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \frac{1}{(q-1)^{\frac{j}{\beta}}} \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 1 - \frac{j}{\beta}\right) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \frac{\binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \frac{1}{(q-1)^{\frac{j}{\beta}}} \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1} - \frac{j}{\beta}\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3.13})$$

ou seja:

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1} - \frac{j}{\beta}\right)}{(q-1)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \right\}, \quad 1 < q < 1 + \frac{\beta}{\beta+n} \quad (\text{A.3.14})$$

Note que $\lim_{q \rightarrow 1} \mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma \left(1 + \frac{j}{\beta} \right) \right\}$ que é a expressão do n -ésimo momento da distribuição Weibull. Chamando $q_{max} = 1 + \frac{\beta}{j+\beta}$ tem-se $\lim_{\beta \rightarrow 0} q_{max} = 1$, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} q_{max} = 2$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} q_{max} = 1$.

A.3.2 Momento de ordem n para $q < 1$

Utilizando a representação integral da q -exponencial válida para $q < 1$ vide Lenzi, Mendes e Rajagopal (1999)

$$\exp_q(-x) = \frac{1}{2\pi} \Gamma \left(\frac{2-q}{1-q} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} e^{-(1-q)(1+iu)x} du, \quad (A.3.15)$$

$(q < 1, 1 - (1-q)x > 0)$

o n -ésimo momento fica

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \int_0^{\infty} dx x^{\frac{j}{\beta}} \frac{1}{2\pi} \Gamma \left(\frac{2-q}{1-q} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} e^{-(1-q)(1+iu)x} du \right\} \quad (A.3.16)$$

Invertendo a ordem de integração:

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \frac{\Gamma \left(\frac{2-q}{1-q} \right)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} \int_0^{\infty} dx x^{\frac{j}{\beta}} e^{-(1-q)(1+iu)x} \right\} \quad (A.3.17)$$

Comparando a integral interna com a definição da função gama: $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dv v^{z-1} e^{-v}$, identificando $v = (1-q)(1+iu)x$, logo $dv = (1-q)(1+iu)dx$ e a integral fica

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx x^{\frac{j}{\beta}} e^{-(1-q)(1+iu)x} &= \int_0^{\infty} dv \left(\frac{1}{(1-q)(1+iu)} \right) \left(\frac{v}{(1-q)(1+iu)} \right)^{\frac{j}{\beta}} e^{-v} \\ &= \left(\frac{1}{(1-q)(1+iu)} \right)^{1+\frac{j}{\beta}} \int_0^{\infty} dv (v)^{\frac{j}{\beta}} e^{-v} \\ &= \frac{1}{(1-q)^{1+\frac{j}{\beta}} (1+iu)^{1+\frac{j}{\beta}}} \Gamma \left(1 + \frac{j}{\beta} \right), \end{aligned} \quad (A.3.18)$$

e assim

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} \frac{1}{(1-q)^{1+\frac{j}{\beta}} (1+iu)^{1+\frac{j}{\beta}}} \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \right\} \quad (\text{A.3.19})$$

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} \frac{1}{(1+iu)^{1+\frac{j}{\beta}}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right)}{(1-q)^{1+\frac{j}{\beta}}} \right\} \quad (\text{A.3.20})$$

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right) \frac{(2-q)}{(1-q)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}}} \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} \frac{1}{(1+iu)^{1+\frac{j}{\beta}}} \right\} \quad (\text{A.3.21})$$

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right) \frac{(2-q)}{(1-q)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}}} \right\}, \quad (\text{A.3.22})$$

mas a função gama admite outra representação integral (vide Gradshteyn, Ryzhik e Jeffrey (1994) equação 8.315 2).

$$\frac{2\pi e^{-ab} b^{z-1}}{\Gamma(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{bui}}{(a + iu)^z} \quad (\text{A.3.23})$$

identificando $a = 1$, $z = \frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}$, $b = 1$, a integral interna fica

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}}} &= e \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{ui}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}}} \\ &= e \frac{2\pi e^{-1} 1^{z-1}}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}\right)} \\ &= \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A.3.24})$$

assim a expressão do n -ésimo momento fica:

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right) \frac{(2-q) \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right)}{(1-q) (1-q)^{\frac{j}{\beta}}} \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}\right)} \right\} \quad (\text{A.3.25})$$

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \frac{(2-q) \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{(1-q) \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}\right)} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}\right)} \right\} \quad (\text{A.3.26})$$

usando a propriedade $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ tem-se:

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1\right) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}\right)} \right\} \quad (\text{A.3.27})$$

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1\right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{j}{\beta}\right)} \right\} \quad (\text{A.3.28})$$

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q} + \frac{j}{\beta}\right)} \right\} \quad (\text{A.3.29})$$

O n -ésimo momento fica:

$$\mu'_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q} + \frac{j}{\beta}\right)} \right\}, \quad (\text{A.3.30})$$

$q < 1$

A.3.3 Momentos em torno da média

$$\mu_n = \int_0^{\infty} (t - \mu'_1)^n f_q(t) dt = \int_{t_0}^{\infty} (t - \mu'_1)^n (2-q) \frac{\beta}{\eta - t_0} \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^{\beta} \right] dt \quad (\text{A.3.31})$$

Equação A.3.2 fica:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \int_{t_0}^{\infty} [(\eta - t_0) \tau + t_0 - \mu'_1]^n (2-q) \frac{\beta}{\eta - t_0} (\tau)^{\beta-1} \exp_q \left[- (\tau)^{\beta} \right] (\eta - t_0) d\tau \\ &= \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} (t_0 - \mu'_1)^{n-j} (\eta - t_0)^j (2-q) \int_{t_0}^{\infty} \beta (\tau)^{\beta+j-1} \exp_q \left[- (\tau)^{\beta} \right] \beta d\tau \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.3.32})$$

Observando a Equação A.3.14 e a Equação A.3.30 temos:

$$\mu_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} (t_0 - \mu'_1)^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma \left(1 + \frac{j}{\beta} \right) \frac{\Gamma \left(\frac{2-q-j}{q-1} \right)}{(q-1)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma \left(\frac{2-q}{q-1} \right)} \right\}, \quad 1 < q < 1 + \frac{\beta}{\beta+n} \quad (\text{A.3.33})$$

e

$$\mu_n = \sum_{j=0}^n \left\{ \binom{n}{j} (t_0 - \mu'_1)^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma \left(1 + \frac{j}{\beta} \right) \frac{\Gamma \left(\frac{3-2q}{1-q} \right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma \left(\frac{3-2q}{1-q} + \frac{j}{\beta} \right)} \right\}, \quad (\text{A.3.34})$$

$q < 1$

Note que $\lim_{q \rightarrow 1} \mu_n = \sum_{j=0}^n \left[\binom{n}{j} (t_0 - \mu'_1)^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma \left(1 + \frac{j}{\beta} \right) \right]$.

A.4 Momentos da distribuição q -Weibull para $t_0 = 0$

A.4.1 Momento de ordem n para $q > 1$

$$\mu_n = \int_0^{\infty} t^n f_q(t) dt = \int_0^{\infty} t^n (2-q) \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp_q \left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta} \right] dt \quad (\text{A.4.1})$$

chamado $\tau = t/\eta$ temos $dt = \eta d\tau$ e

$$\begin{aligned} \mu_n &= \int_0^{\infty} \eta^n \tau^n (2-q) \frac{\beta}{\eta} (\tau)^{\beta-1} \exp_q \left[-(\tau)^{\beta} \right] \eta d\tau \\ &= (2-q) \eta^n \int_0^{\infty} \beta \tau^{\beta+n-1} \exp_q \left[-\tau^{\beta} \right] d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

chamando $\tau^{\beta} = x$ temos $dx = \beta \tau^{\beta-1} d\tau$ e $\tau = x^{\frac{1}{\beta}}$ logo $d\tau = \frac{1}{\beta \left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta-1}} dx$ ou seja $d\tau = \frac{1}{\beta x^{\frac{\beta-1}{\beta}}} dx$. Retornando a μ_n temos:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \eta^n (2-q) \int_0^{\infty} \beta \left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta+n-1} \exp_q \left[-\left(x^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta} \right] \frac{1}{\beta x^{\frac{\beta-1}{\beta}}} dx \\ &= \eta^n (2-q) \int_0^{\infty} x^{\frac{\beta+n-1}{\beta}} \exp_q [-x] x^{\frac{1-\beta}{\beta}} dx \\ &= \eta^n (2-q) \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{\beta}} \exp_q [-x] dx \end{aligned} \quad (\text{A.4.3})$$

Utilizando a representação integral da q -exponencial Tsallis (1994a) temos:

$$\exp_q(-x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} e^{-(q-1)xu} du \quad (q > 1, x > 0). \quad (\text{A.4.4})$$

O n -ésimo momento fica:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \eta^n (2-q) \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{\beta}} dx \exp_q [-x] \\ &= \eta^n (2-q) \int_0^{\infty} x^{\frac{n}{\beta}} dx \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^{\infty} u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} e^{-(q-1)xu} du \end{aligned} \quad (\text{A.4.5})$$

Invertendo a ordem da integração:

$$\mu_n = \frac{\eta^n(2-q)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^\infty du u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} \int_0^\infty dx x^{\frac{n}{\beta}} e^{-(q-1)xu} \quad (\text{A.4.6})$$

Comparando a integral interna com a definição da função Γ :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-v} v^{z-1} dv \quad (\text{A.4.7})$$

Identificando $v = (q-1)xu$ temos $x = \frac{v}{(q-1)u}$ com $dx = \frac{dv}{(q-1)u}$ e $z-1 = n/\beta$ logo $z = 1 + n/\beta$ temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx x^{\frac{n}{\beta}} e^{-(q-1)xu} &= \int_0^\infty \frac{dv}{(q-1)u} \left(\frac{v}{(q-1)u}\right)^{\frac{n}{\beta}} e^{-v} \\ &= \int_0^\infty \frac{dv}{(q-1)^{1+\frac{n}{\beta}} u^{1+\frac{n}{\beta}}} v^{\frac{n}{\beta}} e^{-v} \\ &= \frac{1}{(q-1)^{1+\frac{n}{\beta}} u^{1+\frac{n}{\beta}}} \int_0^\infty v^{\frac{n}{\beta}} e^{-v} dv \\ &= \frac{1}{(q-1)^{1+\frac{n}{\beta}} u^{1+\frac{n}{\beta}}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.8})$$

Retornando:

$$\mu_n = \frac{\eta^n(2-q)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)} \int_0^\infty du u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)}{(q-1)^{1+\frac{n}{\beta}} u^{1+\frac{n}{\beta}}} \quad (\text{A.4.9})$$

Organizando:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{\eta^n(2-q)\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)(q-1)^{1+\frac{n}{\beta}}} \int_0^\infty du u^{\frac{1}{q-1}-1} e^{-u} \frac{1}{u^{1+\frac{n}{\beta}}} \\ &= \frac{\eta^n(2-q)\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)(q-1)^{1+\frac{n}{\beta}}} \int_0^\infty u^{\frac{1}{q-1}-2-\frac{n}{\beta}} e^{-u} du \end{aligned} \quad (\text{A.4.10})$$

Comparando novamente com a definição de Γ temos:

$$\mu_n = \frac{\eta^n(2-q)\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)(q-1)^{1+\frac{n}{\beta}}} \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 1 - \frac{n}{\beta}\right) \quad (\text{A.4.11})$$

Com as restrições $\frac{1}{q-1} > 0 \Rightarrow q-1 > 0 \Rightarrow q > 1$ e $\frac{1}{q-1} - 1 - \frac{n}{\beta} > 0 \Rightarrow \frac{1}{q-1} > 1 + \frac{n}{\beta} \Rightarrow q-1 < \frac{\beta}{\beta+n} \Rightarrow q < 1 + \frac{\beta}{\beta+n}$, ou seja $1 < q < 1 + \frac{\beta}{\beta+n}$. A Equa-

ção A.4.11 pode ser reescrita considerando que $\frac{1}{q-1} - 1 = \frac{2-q}{q-1}$ e usando a propriedade da função gama $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$. Identificando $m+1 = \frac{1}{q-1}$, portanto $\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right) = \left(\frac{1}{q-1} - 1\right)\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 1\right) = \left(\frac{2-q}{q-1}\right)\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)$. Com isso Equação A.4.11 fica:

$$\begin{aligned}\mu_n &= \frac{\eta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right)}{\left(\frac{2-q}{q-1}\right)\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \left(\frac{2-q}{q-1}\right) \frac{1}{(q-1)^{\frac{n}{\beta}}} \Gamma\left(\frac{1}{q-1} - 1 - \frac{n}{\beta}\right) \\ &= \frac{\eta^n}{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \frac{1}{(q-1)^{\frac{n}{\beta}}} \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1} - \frac{n}{\beta}\right)\end{aligned}\quad (\text{A.4.12})$$

ou seja:

$$\mu_n = \eta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1} - \frac{n}{\beta}\right)}{(q-1)^{\frac{n}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)}, \quad 1 < q < 1 + \frac{\beta}{\beta+n} \quad (\text{A.4.13})$$

Note que $\lim_{q \rightarrow 1} \mu_n = \eta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right)$ que é a expressão do n -ésimo momento da distribuição Weibull. Chamando $q_{max} = 1 + \frac{\beta}{n+\beta}$ tem-se $\lim_{\beta \rightarrow 0} q_{max} = 1$, $\lim_{\beta \rightarrow \infty} q_{max} = 2$ e $\lim_{\eta \rightarrow \infty} q_{max} = 1$.

A.4.2 Momento de ordem n para $q < 1$

Utilizando a representação integral da q -exponencial válida para $q < 1$ vide Lenzi, Mendes e Rajagopal (1999)

$$\begin{aligned}\exp_q(-x) &= \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} e^{-(1-q)(1+iu)x} du, \\ &(q < 1, 1 - (1-q)x > 0)\end{aligned}\quad (\text{A.4.14})$$

o n -ésimo momento fica

$$\mu_n = \eta^n (2-q) \int_0^{\infty} dx x^{\frac{n}{\beta}} \frac{1}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} e^{-(1-q)(1+iu)x} du. \quad (\text{A.4.15})$$

Invertendo a ordem de integração:

$$\mu_n = \eta^n (2-q) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} \int_0^{\infty} dx x^{\frac{n}{\beta}} e^{-(1-q)(1+iu)x}. \quad (\text{A.4.16})$$

Comparando a integral interna com a definição da função gama: $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dv v^{z-1} e^{-v}$, identificando $v = (1-q)(1+iu)x$, logo $dv = (1-q)(1+iu)dx$ e a integral fica

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} dx x^{\frac{n}{\beta}} e^{-(1-q)(1+iu)x} &= \int_0^{\infty} dv \left(\frac{1}{(1-q)(1+iu)} \right) \left(\frac{v}{(1-q)(1+iu)} \right)^{\frac{n}{\beta}} e^{-v} \\
 &= \left(\frac{1}{(1-q)(1+iu)} \right)^{1+\frac{n}{\beta}} \int_0^{\infty} dv (v)^{\frac{n}{\beta}} e^{-v} \\
 &= \frac{1}{(1-q)^{1+\frac{n}{\beta}} (1+iu)^{1+\frac{n}{\beta}}} \Gamma \left(1 + \frac{n}{\beta} \right),
 \end{aligned} \tag{A.4.17}$$

e assim

$$\begin{aligned}
 \mu_n &= \eta^n (2-q) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}}} \frac{1}{(1-q)^{1+\frac{n}{\beta}} (1+iu)^{1+\frac{n}{\beta}}} \Gamma \left(1 + \frac{n}{\beta} \right) \\
 &= \eta^n \Gamma \left(\frac{2-q}{1-q} \right) \left(\frac{2-q}{1-q} \right)^{\frac{n}{\beta}} \frac{1}{(1-q)^{\frac{n}{\beta}}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}+1+\frac{n}{\beta}}},
 \end{aligned} \tag{A.4.18}$$

mas a função gama admite outra representação integral (vide Gradshteyn, Ryzhik e Jeffrey (1994) equação 8.315 2)

$$\frac{2\pi e^{-ab} b^{z-1}}{\Gamma(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{bui}}{(a+iu)^z}, \tag{A.4.19}$$

identificando $a = 1$, $z = \frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{n}{\beta}$, $b = 1$, a integral interna fica

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{1+iu}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}+1+\frac{n}{\beta}}} &= e \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{e^{ui}}{(1+iu)^{\frac{2-q}{1-q}+1+\frac{n}{\beta}}} \\
 &= e \frac{2\pi e^{-1} 1^{z-1}}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}+1+\frac{n}{\beta}\right)} \\
 &= \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}+1+\frac{n}{\beta}\right)},
 \end{aligned} \tag{A.4.20}$$

assim a expressão do n -ésimo momento fica:

$$\begin{aligned}
 \mu_n &= \eta^n \Gamma \left(\frac{2-q}{1-q} \right) \left(\frac{2-q}{1-q} \right)^{\frac{n}{\beta}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)}{(1-q)^{\frac{n}{\beta}}} \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}+1+\frac{n}{\beta}\right)} \\
 &= \eta^n \left(\frac{2-q}{1-q} \right) \Gamma \left(\frac{2-q}{1-q} \right)^{\frac{n}{\beta}} \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{\beta}\right)}{(1-q)^{\frac{n}{\beta}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}+1+\frac{n}{\beta}\right)}.
 \end{aligned} \tag{A.4.21}$$

Usando a propriedade $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \eta^n \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1\right) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right)}{(1-q)^{\frac{n}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{n}{\beta}\right)} \\
&= \eta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1\right)}{(1-q)^{\frac{n}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2-q}{1-q} + 1 + \frac{n}{\beta}\right)} \\
&= \eta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{(1-q)^{\frac{n}{\beta}} \Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q} + \frac{n}{\beta}\right)}.
\end{aligned} \tag{A.4.22}$$

O n -ésimo momento fica:

$$\mu_n = \eta^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{(1-q)^{\frac{n}{\beta}} \Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q} + \frac{n}{\beta}\right)}, \quad q < 1 \tag{A.4.23}$$

A.5 η_q

Cálculo de η_q :

$$F_q(\eta_q) = 1 - e^{-1} \tag{A.5.1}$$

$$1 - \left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{\eta_q - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{2-q} = 1 - e^{-1} \tag{A.5.2}$$

$$\left\{ \exp_q \left[- \left(\frac{\eta_q - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] \right\}^{2-q} = e^{-1} \tag{A.5.3}$$

$$\exp_q \left[- \left(\frac{\eta_q - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] = (e^{-1})^{\frac{1}{2-q}} = e^{\frac{1}{q-2}} \tag{A.5.4}$$

$$- \left(\frac{\eta_q - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta = \ln_q e^{\frac{1}{q-2}} \tag{A.5.5}$$

$$\frac{\eta_q - t_0}{\eta - t_0} = \left(- \ln_q e^{\frac{1}{q-2}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{A.5.6}$$

$$\eta_q = t_0 + (\eta - t_0) \left(- \ln_q e^{\frac{1}{q-2}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{A.5.7}$$

A.6 Média ou MTBF

Média:

$$\mu'_1 = MTBF = \sum_{j=0}^1 \left\{ t_0^{1-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1} - \frac{j}{\beta}\right)}{(q-1)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)} \right\}, \quad 1 < q < 1 + \frac{\beta}{\beta+n} \quad (\text{A.6.1})$$

$$\mu'_1 = MTBF = \sum_{j=0}^1 \left\{ t_0^{n-j} (\eta - t_0)^j \Gamma\left(1 + \frac{j}{\beta}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q}\right)}{(1-q)^{\frac{j}{\beta}} \Gamma\left(\frac{3-2q}{1-q} + \frac{j}{\beta}\right)} \right\}, \quad (\text{A.6.2})$$

$q < 1$

A.7 Mediana

Mediana:

$$R_q(t) = \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[- (2-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right], \quad t \geq t_0 \quad (\text{A.7.1})$$

$$R_q(\text{Md}) = 0.5 \quad (\text{A.7.2})$$

$$\exp_{\frac{1}{2-q}} \left[- (2-q) \left(\frac{\text{Md}-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] = 0.5 \quad (\text{A.7.3})$$

$$- (2-q) \left(\frac{\text{Md}-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta = \ln_{\frac{1}{2-q}} 0.5 \quad (\text{A.7.4})$$

$$- \left(\frac{\text{Md}-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta = \frac{\ln_{\frac{1}{2-q}} 0.5}{2-q} \quad (\text{A.7.5})$$

$$\left(\frac{\text{Md}-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta = \frac{\ln_{\frac{1}{2-q}} 0.5}{q-2} \quad (\text{A.7.6})$$

$$\frac{\text{Md} - t_0}{\eta - t_0} = \left(\frac{\ln_{\frac{1}{2-q}} 0.5}{q - 2} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{A.7.7})$$

$$\text{Md} = t_0 + (\eta - t_0) \left(\frac{\ln_{\frac{1}{2-q}} 0.5}{q - 2} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{A.7.8})$$

Note que:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \text{Md} = t_0 + (\eta - t_0) (\ln 2)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{A.7.9})$$

A.8 Moda

A Moda é definida pelo t tal que $\frac{df_q(t)}{dt} = 0$, logo:

$$\frac{df_q(t)}{dt} = \frac{d \left\{ \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}}{dt} = 0 \quad (\text{A.8.1})$$

$$\frac{df_q(t)}{dt} = \frac{\beta(2-q)}{\eta-t_0} \left\{ \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}' = 0 \quad (\text{A.8.2})$$

$$\frac{df_q(t)}{dt} = \frac{\beta(2-q)}{(\eta-t_0)^\beta} \left\{ (t-t_0)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}' = 0 \quad (\text{A.8.3})$$

$$\frac{df_q(t)}{dt} = \left\{ (t-t_0)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\}' = 0, \quad (\text{A.8.4})$$

logo

$$(\beta-1)(t-t_0)^{\beta-2} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] + (t-t_0)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]' = 0 \quad (\text{A.8.5})$$

$$\begin{aligned}
& (\beta - 1) (t - t_0)^{\beta-2} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] + \\
& (t - t_0)^{\beta-1} \exp_q^q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \frac{(-\beta)}{(\eta-t_0)^\beta} (t - t_0)^{\beta-1} = 0
\end{aligned} \tag{A.8.6}$$

$$(\beta - 1) (t - t_0)^{\beta-2} \exp_q \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] + (t - t_0)^{2\beta-2} \exp_q^q \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] \frac{-\beta}{(\eta - t_0)^\beta} = 0 \tag{A.8.7}$$

$$(t - t_0)^{\beta-2} \exp_q \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] \left\{ \beta - 1 + (-\beta) \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \exp_q^{q-1} \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] \right\} = 0 \tag{A.8.8}$$

$$\beta - 1 + (-\beta) \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \exp_q^{q-1} \left[- \left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right] = 0 \tag{A.8.9}$$

Chamando $a = \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta$ temos:

$$\beta - 1 + (-\beta) a \exp_q^{q-1} [-a] = 0 \tag{A.8.10}$$

$$(-\beta) a \exp_q^{q-1} [-a] = 1 - \beta \tag{A.8.11}$$

$$\exp_q^{q-1} [-a] = \frac{\beta - 1}{a\beta} \tag{A.8.12}$$

$$\exp_q [-a] = \left(\frac{\beta - 1}{a\beta} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad \beta > 1 \tag{A.8.13}$$

$$[1 + (1 - q) (-a)]_+^{\frac{1}{1-q}} = \left(\frac{\beta - 1}{a\beta} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad q \neq 1 \tag{A.8.14}$$

$$[1 - (1 - q) a]_+^{\frac{1}{1-q}} = \left(\frac{\beta - 1}{a\beta} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad q \neq 1 \quad \wedge \quad (1 - (1 - q) a) > 0 \tag{A.8.15}$$

$$1 - (1 - q) a = \frac{a\beta}{\beta - 1} \quad (\text{A.8.16})$$

$$1 - (1 - q) a - \frac{a\beta}{\beta - 1} = 0 \quad (\text{A.8.17})$$

$$\frac{\beta - 1 - (1 - q)(\beta - 1)a}{\beta - 1} - \frac{a\beta}{\beta - 1} = 0 \quad (\text{A.8.18})$$

$$\frac{\beta - 1 - (1 - q)(\beta - 1)a - a\beta}{\beta - 1} = 0 \quad (\text{A.8.19})$$

$$\beta - 1 - (1 - q)(\beta - 1)a - a\beta = 0 \quad (\text{A.8.20})$$

$$(1 - q)(\beta - 1)a + a\beta = \beta - 1 \quad (\text{A.8.21})$$

$$a[(1 - q)(\beta - 1) + \beta] = \beta - 1 \quad (\text{A.8.22})$$

$$a[\beta - 1 - q\beta + q + \beta] = \beta - 1 \quad (\text{A.8.23})$$

$$a[\beta(2 - q) + q - 1] = \beta - 1 \quad (\text{A.8.24})$$

$$a = \frac{\beta - 1}{\beta(2 - q) + q - 1} \quad (\text{A.8.25})$$

Retornando o valor de a temos:

$$\left(\frac{t - t_0}{\eta - t_0}\right)^\beta = \frac{\beta - 1}{\beta(2 - q) + q - 1} \quad (\text{A.8.26})$$

$$\frac{t - t_0}{\eta - t_0} = \left(\frac{\beta - 1}{\beta(2 - q) + q - 1}\right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{A.8.27})$$

$$t = t_0 + (\eta - t_0) \left(\frac{\beta - 1}{\beta(2 - q) + q - 1} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (\text{A.8.28})$$

A Moda vale:

$$\text{Mo} = t_0 + (\eta - t_0) \left(\frac{\beta - 1}{\beta(2 - q) + q - 1} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \beta > 1 \quad (\text{A.8.29})$$

$$\text{Mo} = t_0 + (\eta - t_0) \left(\frac{\beta - 1}{\beta + \beta - \beta q + q - 1} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \beta > 1 \quad (\text{A.8.30})$$

$$\text{Mo} = t_0 + (\eta - t_0) \left(\frac{\beta - 1}{\beta + \beta(1 - q) - (1 - q)} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \beta > 1 \quad (\text{A.8.31})$$

$$\text{Mo} = t_0 + (\eta - t_0) \left(\frac{\beta - 1}{\beta + (\beta - 1)(1 - q)} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \beta > 1 \quad (\text{A.8.32})$$

Note que:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \text{Mo} = t_0 + (\eta - t_0) \left(\frac{\beta - 1}{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \beta > 1 \quad (\text{A.8.33})$$

A.9 Árvore de Falha Dinâmica

A.9.1 Derivada temporal da função de falha acumulada da porta WSP

A função de falha acumulada da porta WSP é definida por

$$WSP_{P_1, S_1}(t) = 1 - [1 - WSP_{P_1, S_1}^{S \rightarrow P}(t)] [1 - WSP_{P_1, S_1}^{P \rightarrow S}(t)]. \quad (\text{A.9.1})$$

A sua derivada temporal é

$$\begin{aligned} WSP'_{P_1, S_1}(t) &= - [1 - WSP_{P_1, S_1}^{S \rightarrow P}(t)]' [1 - WSP_{P_1, S_1}^{P \rightarrow S}(t)] + \\ &\quad - [1 - WSP_{P_1, S_1}^{S \rightarrow P}(t)] [1 - WSP_{P_1, S_1}^{P \rightarrow S}(t)]'. \end{aligned} \quad (\text{A.9.2})$$

Dividindo em duas partes fica

$$WSP'_{P_1, S_1}(t) = WSPa_{P_1, S_1}(t) + WSPb_{P_1, S_1}(t), \quad (\text{A.9.3})$$

assim

$$WSPa_{P_1, S_1}(t) = - [1 - WSP^{S \rightarrow P}_{P_1, S_1}(t)]' [1 - WSP^{P \rightarrow S}_{P_1, S_1}(t)] \quad (\text{A.9.4})$$

e

$$WSPb_{P_1, S_1}(t) = - [1 - WSP^{S \rightarrow P}_{P_1, S_1}(t)] [1 - WSP^{P \rightarrow S}_{P_1, S_1}(t)]'. \quad (\text{A.9.5})$$

A derivada em relação ao tempo presente na Equação A.9.4 é

$$[WSP^{S \rightarrow P}_{P_1, S_1}(t)]' = f_{q, P}(t) F_{S_1 \text{dor}_\alpha}(t). \quad (\text{A.9.6})$$

Para a derivada temporal presente na Equação A.9.5 vamos aplicar a relação

$$\frac{d \left[\int_a^t g(t) p(t - x_1) dx_1 \right]}{dt} = \int_a^t g(t) p'(t - x_1) dx_1 + g(t) p(0) \quad (\text{A.9.7})$$

na Equação 5.2.30, assim temos

$$[WSP^{P \rightarrow S}_{P_1, S_1}(t)]' = K_{WSP} \left\{ \int_{x_1=t_0_1}^{x_1=t} f_{q, P}(x_1) f_{S_1 \text{atv}}(t - x_1) dx_1 + f_{q, P}(t) F_{S_1 \text{atv}}(0) \right\}. \quad (\text{A.9.8})$$

Retornando à Equação A.9.4

$$WSPa_{P_1, S_1}(t) = f_{q, P}(t) F_{S_1 \text{dor}_\alpha}(t) [1 - WSP^{P \rightarrow S}_{P_1, S_1}(t)] \quad (\text{A.9.9})$$

e à Equação A.9.5

$$WSPb_{P_1, S_1}(t) = [1 - WSP_{P_1, S_1}^{S \rightarrow P}(t)] K_{WSP} \times \left\{ \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=t} f_{q,P}(x_1) f_{S_1 atv}(t-x_1) dx_1 + f_{q,P}(t) F_{S_1 atv}(0) \right\}, \quad (A.9.10)$$

temos

$$WSP'_{P_1, S_1}(t) = f_{q,P}(t) F_{S_1 dor_\alpha}(t) [1 - WSP_{P_1, S_1}^{P \rightarrow S}(t)] + [1 - WSP_{P_1, S_1}^{S \rightarrow P}(t)] \times K_{WSP} \left\{ \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=t} f_{q,P}(x_1) f_{S_1 atv}(t-x_1) dx_1 + f_{q,P}(t) F_{S_1 atv}(0) \right\}, \quad (A.9.11)$$

e finalmente

$$WSP'_{P_1, S_1}(t) = f_{q,P}(t) F_{S_1 dor_\alpha}(t) \times \left[1 - K_{WSP} \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=t} f_{q,P}(x_1) F_{S_1 atv}(t-x_1) dx_1 \right] + \left[1 - \int_{x_2=t_{0_2}}^{x_2=t} f_{q,P}(x_2) F_{S_1 dor_\alpha}(x_2) dx_2 \right] \times K_{WSP} \left\{ \int_{x_1=t_{0_1}}^{x_1=t} f_{q,P}(x_1) f_{S_1 atv}(t-x_1) dx_1 + f_{q,P}(t) F_{S_1 atv}(0) \right\}. \quad (A.9.12)$$

A.10 Tempo esperado por ciclo de manutenção

A.10.1 Solução de $\int_{t_0}^T t f_q(t) dt$

A primeira parte da Equação 6.2.15, ou seja, de $\int_{t_0}^T t f_q(t) dt$ é resolvida com a integral do produto

$$\int u dv = uv - \int v du, \quad (A.10.1)$$

Assuma que $u = t$, logo $du = dt$. Fazendo $dv = f_q(t) dt$ temos $v = \int f_q(t) dt$:

$$\begin{aligned}
v &= \int \left\{ \frac{\beta(2-q)}{(\eta-t_0)} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\} dt \\
&= -(2-q) \int \left\{ -\beta \left(\frac{1}{\eta-t_0} \right) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \exp_q \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] \right\} dt,
\end{aligned} \tag{A.10.2}$$

Adote $\alpha = - \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta$, portanto $d\alpha = -\beta \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{\eta-t_0} \right) dt$ e a Equação A.10.2 fica

$$v = -(2-q) \int \exp_q \alpha d\alpha. \tag{A.10.3}$$

A integral da função q -exponencial é:

$$\int \exp_q x dx = \frac{1}{(2-q)} [\exp_q x]^{2-q} + C, \tag{A.10.4}$$

e a Equação A.10.2 é reescrita como

$$\begin{aligned}
v &= -(2-q) \frac{1}{(2-q)} [\exp_q \alpha]^{2-q} + C \\
&= - [\exp_q \alpha]^{2-q} + C.
\end{aligned} \tag{A.10.5}$$

Aplicando esta identidade da q -exponencial

$$(\exp_q x)^a = \exp_{1-\frac{1-q}{a}}(ax), \tag{A.10.6}$$

temos

$$\begin{aligned}
v &= - \left[\exp_{1-\frac{1-q}{2-q}} [\alpha(2-q)] \right] + C \\
&= - \left[\exp_{\frac{1}{2-q}} [\alpha(2-q)] \right] + C \\
&= - \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[-(2-q) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] + C.
\end{aligned} \tag{A.10.7}$$

Retornando à Equação A.10.1 temos

$$\begin{aligned}
\int t f_q(t) dt &= -t \left\{ \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[\begin{array}{c} -(2-q) \times \\ \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \end{array} \right] + C \right\} + \\
&\int \left\{ \exp_{\frac{1}{2-q}} \left[\begin{array}{c} -(2-q) \times \\ \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \end{array} \right] + C \right\} dt,
\end{aligned} \tag{A.10.8}$$

colocando os limites de integração temos

$$\int_{t_0}^T t f_q(t) dt = \left\{ -t \exp \frac{1}{2-q} \left[\begin{array}{l} -(2-q) \times \\ \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \end{array} \right] - tC \right\}_{t=t_0}^{t=T} + \int_{t_0}^T \left\{ \exp \frac{1}{2-q} \left[\begin{array}{l} -(2-q) \times \\ \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \end{array} \right] + C \right\} dt \quad (\text{A.10.9})$$

$$\int_{t_0}^T t f_q(t) dt = -T \exp \frac{1}{2-q} \left[\begin{array}{l} -(2-q) \times \\ \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \end{array} \right] - TC + \int_{t_0}^T \exp \frac{1}{2-q} \left[\begin{array}{l} -(2-q) \times \\ \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \end{array} \right] dt + TC, \quad (\text{A.10.10})$$

usando a Equação 3.2.6, temos

$$\int_{t_0}^T t f_q(t) dt = -T R_q(T) + \int_{t_0}^T R_q(t) dt \quad (\text{A.10.11})$$

A.10.2 Solução de $\int_{t_0}^T R_q(t) dt$

A integral $\int_{t_0}^T R_q(t) dt$, para $q \neq 1$ é

$$I R_q(T) = \int_{t=t_0}^{t=T} \left[1 + (q-1) \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]_+^{\frac{2-q}{1-q}} dt \quad (\text{A.10.12})$$

Fazendo $b = q - 1$, $x = \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta$ e $-v = \frac{2-q}{1-q}$ temos $dx = \beta \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{\beta-1} \frac{1}{\eta-t_0} dt$ e $dt = \frac{1}{\beta} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{1-\beta} (\eta-t_0) dx$ logo

$$I R_q(T) = \int_{t=t_0}^{t=T} [1 + bx]_+^{-v} \frac{1}{\beta} \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^{1-\beta} (\eta-t_0) dx \quad (\text{A.10.13})$$

mas $\frac{t-t_0}{\eta-t_0} = x^{\frac{1}{\beta}}$, então

$$\begin{aligned}
IR_q(T) &= \int_{t=t_0}^{t=T} [1 + bx]_+^{-v} \frac{1}{\beta} x^{\frac{1}{\beta}-1} (\eta - t_0) dx \\
&= \frac{(\eta - t_0)}{\beta} \int_{t=t_0}^{t=T} x^{\frac{1}{\beta}-1} [1 + bx]_+^{-v} dx
\end{aligned} \tag{A.10.14}$$

Fazendo $\frac{1}{\beta} = a$ temos

$$IR_q(T) = (\eta - t_0) a \int_{t=t_0}^{t=T} x^{a-1} [1 + bx]_+^{-v} dx \tag{A.10.15}$$

Para $t = T$ temos $x = \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta$ e para $t = t_0$, $x = 0$

$$IR_q(T) = (\eta - t_0) a \int_0^{\left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta} x^{a-1} [1 + bx]_+^{-v} dx \tag{A.10.16}$$

fazendo $u = \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta$

$$IR_q(T) = (\eta - t_0) a \int_0^u x^{a-1} [1 + bx]_+^{-v} dx \tag{A.10.17}$$

De acordo com Gradshteyn, Ryzhik e Jeffrey (1994) equação 3.194.1

$$\int_0^u x^{a-1} (1 + bx)^{-v} dx = \frac{u^a}{a} {}_2F_1(v, a; 1 + a; -bu) \tag{A.10.18}$$

então

$$\begin{aligned}
IR_q(T) &= (\eta - t_0) a \frac{u^a}{a} {}_2F_1(v, a; 1 + a; -bu) \\
&= (\eta - t_0) u^a {}_2F_1(v, a; 1 + a; -bu)
\end{aligned} \tag{A.10.19}$$

Retornando $a = \frac{1}{\beta}$, $b = q - 1$, $v = \frac{q-2}{1-q}$ e $u = \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0}\right)^\beta$

$$\begin{aligned}
IR_q(T) &= (\eta - t_0) \left[\left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right]^{\frac{1}{\beta}} {}_2F_1 \left(\frac{q-2}{1-q}, \frac{1}{\beta}; 1 + \frac{1}{\beta}; - (q-1) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right) \\
&= (T - t_0) {}_2F_1 \left(\frac{q-2}{1-q}, \frac{1}{\beta}; 1 + \frac{1}{\beta}; (1-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right).
\end{aligned} \tag{A.10.20}$$

Para $q = 1$ temos

$$IR(T) = \int_{t_0}^T R(t) dt = \int_{t_0}^T \exp \left[- \left(\frac{t-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right] dt \tag{A.10.21}$$

Fazendo $x = \frac{t-t_0}{\eta-t_0}$ temos $dx = \frac{1}{\eta-t_0} dt$ e $dt = (\eta - t_0) dx$

$$IR(T) = \int_{t=t_0}^{t=T} \exp [-x^\beta] (\eta - t_0) dx \tag{A.10.22}$$

$$IR(T) = (\eta - t_0) \int_{x=0}^{x=\frac{T-t_0}{\eta-t_0}} \exp [-x^\beta] dx \tag{A.10.23}$$

Em Gradshteyn, Ryzhik e Jeffrey (1994) equação 2.33 10.* temos

$$\int x^m \exp(-ax^n) dx = \frac{-\Gamma(\gamma, ax^n)}{na^\gamma}, \quad \gamma = \frac{m+1}{n}, \quad a \neq 0, \quad n \neq 0 \tag{A.10.24}$$

para $m = 0$ e $a = 1$ temos

$$\int \exp(-x^n) dx = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}, x^n\right)}{n}, \quad n \neq 0 \tag{A.10.25}$$

logo

$$IR(T) = \frac{(\eta - t_0)}{\beta} \left[-\Gamma\left(\frac{1}{\beta}, x^\beta\right) \right]_{x=0}^{x=\frac{T-t_0}{\eta-t_0}} \tag{A.10.26}$$

$$IR(T) = \frac{(\eta - t_0)}{\beta} \left[-\Gamma \left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{T - t_0}{\eta - t_0} \right)^\beta \right) + \Gamma \left(\frac{1}{\beta}, 0 \right) \right]. \quad (\text{A.10.27})$$

Resumindo

$$IR_q(t) = \begin{cases} (T - t_0) {}_2F_1 \left(\frac{q-2}{1-q}, \frac{1}{\beta}; 1 + \frac{1}{\beta}; (1-q) \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right), & q \neq 1 \\ \frac{(\eta-t_0)}{\beta} \left[-\Gamma \left(\frac{1}{\beta}, \left(\frac{T-t_0}{\eta-t_0} \right)^\beta \right) + \Gamma \left(\frac{1}{\beta}, 0 \right) \right], & q = 1. \end{cases} \quad (\text{A.10.28})$$

Apêndice B – Exemplo de aplicação da distribuição q -Weibull

B.1 O modelo q -Weibull em mercado de ações

Esta seção mostra a aplicação da distribuição q -Weibull em mercado de ações, particularmente aos tempos entre valores extremos. Embora possa parecer, em uma leitura mais apressada, que o escopo difira daquele principal da tese, a seção ilustra que a metodologia apresentada e o modelo q -Weibull são suficientemente poderosos e versáteis para serem aplicados a sistemas bastante diferentes.

As variações destes índices indicam a tendência da bolsa, de alta ou de baixa, em um determinado momento do pregão. O estimador de Hill é utilizado para identificar os retornos extremos e estimar os intervalos de tempo (veja detalhes em Hill (1975)). Os resultados mostram que a distribuição de q -Weibull modela adequadamente os tempos de intervalo entre valores extremos dos índices de ações no mercado.

Os dados utilizados são os índices intradiários do IBEX-35¹. Coletados com intervalos de 15 minutos, estes abrangem de 4 de janeiro de 2005 até 20 de janeiro de 2012 e foram obtidos do banco de dados Olsendata (<http://www.olsendata.com>). Os retornos dos índices foram calculados como as diferenças dos logaritmos dos valores dos índices consecutivos.

A série dos tempos entre os retornos extremos é obtida a partir da leitura dos instantes de tempo em que os retornos excedem um limiar u preestabelecido, ou seja, quando o retorno positivo é maior que u e quando o retorno negativo é menor que $-u$. Desta forma é possível construir séries de intervalos de tempo entre valores positivos, valores negativos, nas mudanças de positivo para negativo e vice-versa e também de intervalos de tempo nos quais o módulo do retorno supera o valor u . Os resultados das análises destas séries podem indicar qual o intervalo de tempo deve ser aguardado para comprar ou vender ações com o objetivo de ter o melhor retorno financeiro. Esta seção mostra os resultados para os ajustes com tempos de espera dos módulos dos retornos e com

¹O *Iberia Index* (IBEX-35) é o principal índice de referência da bolsa espanhola. O índice é administrado e calculado pela *Sociedad de Bolsas*, uma subsidiária da *Bolsas y Mercados Españoles* (BME), a empresa que administra os mercados de valores mobiliários da Espanha (incluindo a Bolsa de Madrid). É um índice de capitalização de mercado envolvendo as 35 ações espanholas mais líquidas negociadas na Bolsa de Madrid.

os tempos entre as mudanças de positivo para negativo fora dos limiares especificados².

A Figura B.1.1 mostra as curvas de confiabilidade para os tempos de retorno calculado com o módulo do logaritmo dos retornos superando o limiar $u = 0,0063$ e os tempos nos quais ocorre mudança dos logaritmos de positivo ($\log(\text{retorno}) > u$) para negativo ($\log(\text{retorno}) < u$), para p índice IBEX-35.

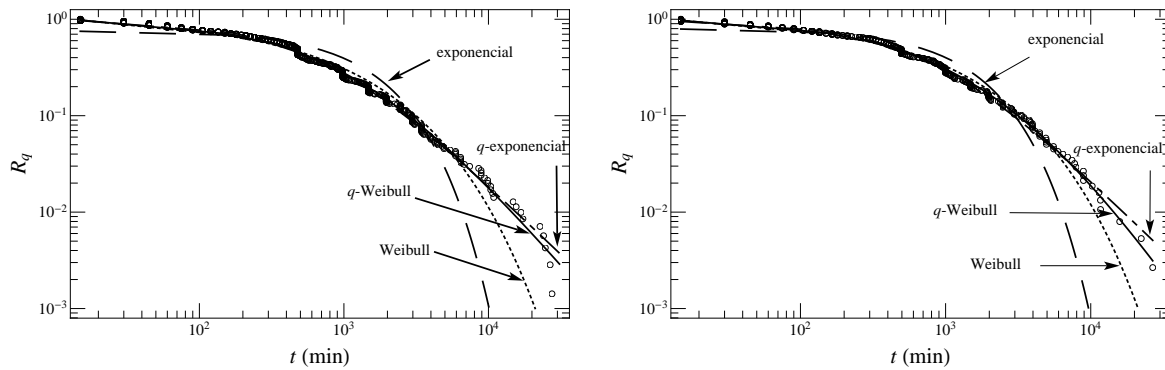


Figura B.1.1: Curvas de confiabilidade dos modelos q -Weibull em linha contínua, Weibull em linha pontilhada, q -exponencial em linha traço-ponto e exponencial e linha tracejada. Painel esquerdo: tempos de espera para $|\log(\text{retorno})| > u$. Painel direito: tempos de espera entre os eventos $\log(\text{retorno}) > u$ e $\log(\text{retorno}) < -u$.

A Tabelas B.1 e B.2 mostram os parâmetros das distribuições e os coeficientes de determinação para os dois ajustes.

Tabela B.1: Parâmetros das distribuições e coeficiente de determinação para tempos de espera de $|\log(\text{retorno})| > u$.

	exponencial	Weibull	q -exponencial	q -Weibull
β	1,00	0,58	1,00	0,82
$\theta(\text{min})$	1525	742	278	318
$\eta(\text{min})$	1102	756	279	329
$t_0(\text{min})$	-423	14	1	11
q	1,00	1,00	1,41	1,31
R^2	0,7490	0,9773	0,9919	0,9944

²Esta seção é parte do resultado de uma colaboração com Miguel A. Rivera-Castro, durante seu doutoramento, e seu orientador Juan C. Reboredo, da *Universidad de Santiago de Compostela*, Espanha. Todos os resultados estão em Reboredo, Rivera-Castro e Assis (2013). Neste artigo, são apresentadas as análises dos cinco tipos de séries ajustando a distribuição de q -Weibull aos dados dos três índices intradiários S&P 500, DAX e IBEX-35.

Tabela B.2: Parâmetros das distribuições e coeficiente de determinação para tempos de espera entre os eventos $\log(\text{retorno}) > u$ e $\log(\text{retorno}) < -u$.

	exponencial	Weibull	q -exponencial	q -Weibull
β	1,00	0,59	1,00	0,74
$\theta(\text{min})$	1445	813	319	416
$\eta(\text{min})$	1123	826	306	426
$t_0(\text{min})$	-322	13	-13	10
q	1,00	1,00	1,40	1,24
R^2	0,8214	0,9896	0,9914	0,9964

A inspeção visual da Figura B.1.1 e a comparação do coeficiente de determinação mostram que a distribuição q -Weibull é, dentre as estudadas, a que mais se adéqua ao dados amostrais. as distribuições q -exponencial, Weibull e exponencial seguem nesta ordem de qualidade do ajuste.