CONTRIBUIÇÕES PARA A AVALIAÇÃO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO NO REGIME ESTACIONÁRIO

Márcio André Fernandes Martins

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Industrial, da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Industrial.

Orientador: Ricardo Kalid

Salvador
Julho de 2010

M382 Martins, Márcio André Fernandes

Contribuições para a avaliação da incerteza de medição no regime estacionário / Márcio André Fernandes Martins. – Salvador, 2010.

102 f. : il. color.

Orientador: Prof. Doutor Ricardo de Araújo Kalid

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal da Bahia. Escola Politécnica, 2010.

1. Medição – Processo estocástico. 2. Modelos matemáticos. 3. Monte Carlo, Método de. I. Kalid, Ricardo de Araújo. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDD.: 519.2

CONTRIBUIÇÕES PARA A AVALIAÇÃO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO EM REGIME ESTACIONÁRIO

Márcio André Fernandes Martins

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA INDUSTRIAL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA INDUSTRIAL.

Examinada por:

Prof. Ricardo de Araújo Kalid, D.Sc.

Eng. Gregory Amaral Kyriazis, D.Sc.

Prof. Iuri Muniz Pepe, D.Sc.

SALVADOR, BA – BRASIL
JULHO DE 2010

Aos meus queridos pais, Antônia
e Manoel Martins, por me
proporcionarem boa educação e
pelo incentivo aos estudos.
Meus pais – verdadeiros
exemplos de trabalho, amor,
dedicação e perseverança.

Agradecimentos

A Deus, pela sua presença na minha vida, pela orientação de minhas escolhas e, sobretudo, pelo conforto nas horas mais difíceis.

À minha querida esposa Lulu, por todo amor, carinho, dedicação, cumplicidade e paciência. Ao seu lado é mais fácil enfrentar todos desafios e obstáculos da vida. Amo muito você meu amor!

Aos meus irmãos Marcelo, Érica e Bruna, pela amizade e fraternidade a todo tempo. Obrigado por vocês fazerem parte de minha vida.

Aos meus avós maternos, Secundo e Francisca Fernandes, pelo amor, amizade e incentivo.

Aos meus avós paternos, Luis e Antônia Martins, pelo amor e amizade.

À minha tia Naila, por todo carinho, amor, amizade, dedicação e incentivo.

Ao Prof. Dr. Ricardo Kalid, pela inestimável orientação, apoio e incentivo ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Aos pesquisadores do PROTEC: Carol, Gesner, Guilherme, Isabel, Lucas, Marcão, Raony, Reiner e Vitor, pelo apoio, incentivo e agradável convívio; em especial aos meus amigos Robson e Léo Malazart, pelas enriquecedoras discussões técnico–filósoficas e por sempre me acompanharem e fazerem a pesquisa um momento de alegria e descontração.

Aos meus grandes amigos: Adonis, André Hartmann, Juliana, Leonardo Paixão, Luclecia e Vladimir, pelos excelentes momentos de alegria, convívio e amizade, bem como pelas longas horas de estudos na boa, saudosa e até nostálgica época da graduação. Horas de estudos que me motivaram e me influenciaram gradativamente a enveredar na pesquisa.

Aos membros da banca examinadora, pelas valiosas sugestões, que devidamente incorporadas à Dissertação, proporcionaram uma melhoria de sua redação.

A todos os funcionários do PEI, pela constante disponibilidade.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia, pelo apoio financeiro deste trabalho.

A todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

A todos, meus sinceros e profundos agradecimentos.

Resumo da Dissertação apresentada ao PEI/UFBA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTRIBUIÇÕES PARA A AVALIAÇÃO DA INCERTEZA DE MEDIÇÃO NO REGIME ESTACIONÁRIO

Márcio André Fernandes Martins

Julho/2010

Orientador: Ricardo Kalid

Programa: Engenharia Industrial

O número de artigos sobre ou que utilizam incerteza de medição tem crescido consideravelmente ao longo das últimas décadas. A maioria destes trabalhos seguem as orientações do Guia para a Expressão da Incerteza de Medição (GUM) ou do Suplemento 1 do GUM (GUM–S1). Contudo, ainda existem lacunas na literatura sobre este tema. O principal objetivo do presente trabalho é oferecer contribuições no ferramental matemático para a avaliação da incerteza de medição. No que tange à literatura nacional, um estudo crítico de referencial teórico e prático sobre o método linear, proposto no GUM, e o método não linear, proposto no GUM–S1, é apresentado. Um estudo com tal abrangência ainda não tinha sido escrito em língua portuguesa, logo sua importância e relevância para a literatura nacional. No tocante à literatura internacional, dois temas pouco explorados foram tratados no presente trabalho. No primeiro destes, são desenvolvidas expressões generalizadas para a avaliação da incerteza padrão de medição de sistemas não lineares, baseadas na expansão em série de Taylor das funções de medição até a 2ª ou 3ª derivada. Outro tema abordado neste trabalho trata aspectos teóricos e práticos envolvidos na avaliação da incerteza de medição de sistemas multivariáveis; avalia os méritos e os deméritos do método linear, baseado na lei de propagação de incertezas, e do método não linear, baseado na lei de propagação de funções de densidade de probabilidade através do método de Monte Carlo. Estudos de casos foram tratados para sistemas lineares, não lineares, mono e multivariáveis, mostrando a aplicabilidade das metodologias desenvolvidas.

Abstract of Dissertation presented to PEI/UFBA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CONTRIBUTIONS FOR THE EVALUATION OF MEASUREMENT UNCERTAINTY IN THE STATIONARY REGIME

Márcio André Fernandes Martins

July/2010

Advisor: Ricardo Kalid

Department: Industrial Engineering

The number of papers on measurement uncertainty has continued to increase over the years, driven by the publication of the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) and the Supplement 1 to the GUM (GUM–S1). However, some themes on this subject still are rarely addressed in the literature. The main objective of the present work is to provide contributions on the mathematical tools for evaluating the measurement uncertainty. With respect to Brazilian literature, a critical study of theoretical and practical knowledge on the linear method, proposed by the GUM, and the non linear method, proposed by GUM–S1, is presented. A study with that coverage still has not been written in Portuguese and, therefore, its importance and relevance to the national literature. With respect to international literature, the present work addresses two issues not yet explored in the literature. In the first one generalized expressions for evaluating the standard measurement uncertainty of non linear systems, based on Taylor series expansion of the measurement functions up to the 2nd or 3th derivative, are developed. Another theme presented in this work deals with theoretical and practical issues involved in the evaluating of measurement uncertainty of multivariate systems. Furthermore, merits and demerits of the linear method, based on the law of propagation of uncertainties, and of the non linear method, based on the law of propagation of probability density functions using Monte Carlo method, are also addressed in this work. The applicability of the developed methodologies is demonstrated through case studies which deal with linear, non linear, univariate and multivariate systems.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

a_-	limite inferior de uma grandeza de entrada X_i, p. 11
a_+	limite superior de uma grandeza de entrada X_i, p. 11
$C_{\mathrm{A},i}$	concentração molar do reagente A na corrente de alimentação do reator CSTR da planta PROTEC, p. 58
C_{A}	concentração molar do reagente A na corrente de descarga do reator CSTR da planta PROTEC, p. 58
$C_{\mathrm{B},i}$	concentração molar do produto B na corrente de alimentação do reator CSTR da planta PROTEC, p. 58
C_{B}	concentração molar do produto B na corrente de descarga do reator CSTR da planta PROTEC, p. 58
c_i	derivada parcial ou coeficiente de sensibilidade: $c_i \equiv \frac{\partial f}{\partial X_i}$, p. 16
$\mathrm{E_a}$	energia de ativação da reação que ocorre no reator CSTR da planta PROTEC, p. 58
f	relação funcional entre o mensurando Y e as grandezas de entrada X_i das quais o mensurando Y depende, p. 6
f_K	K–ésima função de medição de um sistema MIMO, p. 49
$\mathcal{F}$	função de medição multivariável que compõe um sistema MIMO de medição, p. 50
F_i	vazão mássica da corrente de alimentação do reator CSTR da planta PROTEC, p. 58
$g_{X_i}(\xi_i)$	função de densidade de probabilidade de uma grandeza de entrada X_i, p. 22
$g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$	função de densidade de probabilidade conjunta das grandezas de entrada $\mathbf{X}$ de um sistema MIMO de medição, p. 54

$g_Y(\eta)$	função de densidade de probabilidade do mensurando Y, p. 22
$g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta})$	função de densidade de probabilidade conjunta dos mensurandos $\mathbf{Y}$ de um sistema MIMO de medição, p. 54
$\hat{g}_Y(\eta)$	função de densidade de probabilidade empírica do mensurando Y gerada pelo método GUM–S1, p. 27
$\hat{g}_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta})$	função de densidade de probabilidade conjunta empírica dos mensurandos $\mathbf{Y}$ do sistema MIMO de medição, p. 56
$g'_{Y_j}(\eta_j)$	função de densidade de probabilidade marginal de um mensurando Y_j de um sistema MIMO de medição, p. 55
$\hat{g}'_{Y_j}(\eta_j)$	função densidade de probabilidade marginal empírica de um mensurando Y_j do sistema MIMO de medição, p. 56
$\hat{G}_Y(\eta)$	função de distribuição acumulada empírica do mensurando Y gerada pelo método GUM–S1, p. 27
$h(y, x_i)$	coeficiente de contribuição associado à estimativa do mensurando y gerado pela estimativa x_i da grandeza de entrada X_i, p. 17
I_j	intervalo de abrangência de um mensurando Y_j de um sistema MIMO de medição, p. 52
I_p	intervalo de abrangência do mensurando Y gerada pelo método GUM–S1, p. 27
k	fator de abrangência usado para estimar a incerteza expandida $U(y)$ da estimativa y do mensurando, p. 18
$\mathrm{k_o}$	fator pré-exponencial da reação que ocorre no reator CSTR da planta PROTEC, p. 58
L	nível do reator CSTR da planta PROTEC, p. 58
M	número de amostras de Monte Carlo utilizado no método GUM–S1, p. 26
n	número de observações independentes, p. 8
N	número de grandezas de entrada X_i que compõe uma função de medição, p. 7

p	probabilidade de abrangência requerida para estimar a incerteza expandida da estimativa y do mensurando Y, p. 18
$r(x_i, x_j)$	coeficiente de correlação associado às estimativas x_i e x_j das grandezas de entrada X_i e X_j, respectivamente, p. 16
$\mathrm{R_g}$	constante universal dos gases, p. 58
$s(x_i)$	desvio padrão experimental da estimativa x_i, igual a incerteza padrão do Tipo A, p. 9
$s(X_i)$	desvio padrão experimental de uma grandeza de entrada X_i, p. 8
$\mathbf{S_x}$	matriz de sensibilidade referente às grandezas de entrada de um sistema MIMO de medição, p. 50
$\mathbf{S_y}$	matriz de sensibilidade referente às grandezas de saída de um sistema MIMO de medição, p. 50
T	temperatura do reator CSTR da planta PROTEC, p. 58
$u(x_i)$	incerteza padrão associada à estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i proveniente da combinação das avaliações padrão do Tipo A e B, p. 15
$u(x_i, x_j)$	covariância associada às estimativas x_i e x_j das grandezas de entrada X_i e X_j, respectivamente, p. 16
$u(y)$	incerteza padrão associada à estimativa y obtida pelo método GUM–S1, p. 27
$u(y_{\mathrm{2ord}})$	incerteza padrão associada à estimativa y_{2ord} obtida pelo método de segunda ordem, p. 41
$u(y_{\mathrm{3ord}})$	incerteza padrão associada à estimativa y_{3ord} obtida pelo método de terceira ordem, p. 42
$u_{\mathrm{A}}(x_i)$	incerteza padrão do Tipo A associada à estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i, p. 9
$u'_{\mathrm{A}}(x_i)$	incerteza padrão do Tipo A associada à estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i associada à estatística frequencista, p. 9

$u_{\mathrm{B}}(x_i)$ incerteza padrão do Tipo B associada à estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i, p. 10

$u_c(y)$ incerteza padrão combinada associada à melhor estimativa y obtida pelo método GUM, p. 16

$u_{\mathrm{A}_{Bayes}}(x_i)$ incerteza padrão do Tipo A associada à estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i inferida pela estatística bayesiana, p. 9

$U(y)$ incerteza expandida associada à estimativa do mensurando y baseada em uma probabilidade de abrangência p, p. 18

$\mathbf{U_x}$ matriz de covariância associada ao vetor das estimativas $\mathbf{x}$ das grandezas de entrada $\mathbf{X}$ de um sistema MIMO de medição, p. 51

$\mathbf{U_y}$ matriz de covariância associada ao vetor das estimativas $\mathbf{y}$ das grandezas de saída $\mathbf{Y}$ de um sistema MIMO de medição, p. 51

$\mathbf{x}$ vetor das estimativas das grandezas de entrada de um sistema MIMO de medição, p. 50

$\mathbf{X}$ vetor das grandezas de entrada de um sistema MIMO de medição, p. 50

x_i melhor estimativa de uma grandeza de entrada X_i, p. 8

X_i i–ésima grandeza de entrada que compõe a função de medição da qual depende o mensurando Y, p. 6

$X_{i,k}$ k–ésima observação independente da grandeza de entrada X_i, p. 8

y melhor estimativa do mensurando Y, p. 15

Y mensurando (variável medida indiretamente) do processo de medição; este é inferido por uma função de medição previamente estabelecido, p. 6

$\mathbf{y}$ vetor das estimativas das grandezas de saída de um sistema MIMO de medição, p. 50

$\mathbf{Y}$ vetor das grandezas de saída de um sistema MIMO de medição, p. 50

$y_{1\mathrm{ord}}$ estimativa do mensurando Y obtida pelo método GUM, p. 15

$y_{2\mathrm{ord}}$ estimativa do mensurando Y obtida pelo método de segunda ordem, p. 40

$y_{3\mathrm{ord}}$ estimativa do mensurando Y obtida pelo método de terceira ordem, p. 41

γ assimetria de uma função de densidade de probabilidade, p. 39

η valores possíveis do mensurando Y, p. 22

$\boldsymbol{\eta}$ valores possíveis das grandezas de saída $\mathbf{Y}$ de um sistema MIMO de medição, p. 54

κ curtose de uma função de densidade de probabilidade, p. 40

μ_X esperança ou valor esperado da grandeza X que varia aleatoriamente, p. 7

ν_{eff} graus de liberdade efetivos da incerteza padrão combinada $u_c(y)$ associados à estimativa y do mensurando Y, p. 18

ν_i graus de liberdade da incerteza padrão $u(x_i)$ associados à estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i, p. 18

ρ_{m} massa específica da mistura reacional do reator CSTR da planta PROTEC, p. 58

ξ_i valores possíveis de uma grandeza de entrada X_i, p. 22

$\boldsymbol{\xi}$ valores possíveis das grandezas de entrada $\mathbf{X}$ de um sistema MIMO de medição, p. 54

$\frac{\partial f}{\partial X_i}$ derivada parcial com relação à grandeza de entrada X_i da relação funcional f entre o mensurando Y e as grandezas de entrada X_i das quais Y depende, avaliadas com as estimativas x_i para cada X_i, p. 16

Lista de Abreviaturas

BIPM	Bureau International des Poids et Measures, p. 1
CDF	Função de Distribuição Acumulada (*Cumulative Distribution Function*), p. 27
CIPM	Comité International des Poids et Measures, p. 1
CLT	Teorema Central do Limite (*Central Limit Theorem*), p. 19
CSTR	Reator Tanque Continuamente Agitado (*Continuous Stirred Tank Reactor*), p. 57
GUM–S1	Suplemento 1 do Guia para a Expressão da Incerteza de Medição (*Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*), p. 2
GUM	Guia para a Expressão da Incerteza de Medição (*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*), p. 2
IEC	International Electrotechnical Commission, p. 1
IFCC	International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine, p. 1
ILAC	International Laboratory Accreditation Cooperation, p. 1
IUPAC	International Union of Pure and Applied Chemistry, p. 1
IUPAP	International Union of Pure and Applied Physics, p. 1
JCGM	Joint Committee for Guides in Metrology, p. 1
LPU	Lei de Propagação de Incertezas (*Law of Propagation of Uncertainties*), p. 16
MCM	Método de Monte Carlo (*Monte Carlo Method*), p. 25
MIMO	*Multiple Input Multiple Output*, p. 48
MISO	*Multiple Input Single Output*, p. 48

MLPP	Lei de Propagação de PDFs Multivariável (*Multivariable Law of Propagation of Probability Density Functions*), p. 49
MLPU	Lei de Propagação de Incertezas Multivariável (*Multivariable Law of Propagation of Uncertainties*), p. 49
OIML	International Organization of Legal Metrology, p. 1
PDF	Função de Densidade de Probabilidade (*Probability Density Function*), p. 7
PME	Princípio de Entropia Máxima (*Principle of Maximum Entropy*), p. 11
VIM	Vocabulário Internacional de Metrologia (*International Vocabulary of Metrology*), p. 1

Capítulo 1

Introdução

"A noção do valor numérico exato de uma grandeza física qualquer é uma pura abstração matemática, à qual não corresponde nenhuma realidade."

Matemático Émile Borel

1.1 Considerações Iniciais

Em quaisquer processos laboratoriais ou industriais é imprescindível medir variáveis, seja para controlá-las, monitorá-las ou até mesmo investigá-las para um fim tecnológico ou científico (ALBERTAZZI e SOUZA, 2008). Entretanto, o resultado de medição de uma grandeza física será uma estimativa do valor dessa grandeza, logo uma indicação quantitativa referente às parcelas de dúvidas embutidas nessa estimativa é necessária para avaliar a qualidade do resultado de medição. O conceito metrológico que aborda tal assunto é a incerteza de medição. De acordo com o Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM) (BIPM *et al.*, 2008a), a incerteza de medição é "*um parâmetro não-negativo que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos a um mensurando, com base nas informações utilizadas*".

Em 1980, uma metodologia para expressar um resultado de medição e sua respectiva incerteza foi desenvolvida pelo *Bureau International des Poids et Measures* (BIPM) a pedido do *Comité International des Poids et Measures* (CIPM) (CIPM, 1980), a qual é reconhecida internacionalmente pela comunidade metrológica como Recomendação INC-1980 (GIACOMO, 1981). Essa Recomendação INC-1980 foi aprovada em 1981 (GIACOMO, 1982) e retificada em 1986 (GIACOMO, 1987). Baseado nesta Recomendação INC-1980, um Guia mais detalhado foi desenvolvido pela *International Organization for Standardization* (ISO), juntamente com o apoio de mais sete organizações internacionais[1]. O documento resultante, conhecido como

[1]Bureau International des Poids et Measures (BIPM), International Electrotechnical Commission (IEC), International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine (IFCC), International Laboratory Accreditation Cooperation (ILAC), International Union of Pure and Applied

"*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*" (GUM), foi publicado em 1993 e reimpresso com algumas correções em 1995. Esse Guia é periodicamente submetido a revisões, onde sua última edição foi publicada em 2008 (BIPM *et al.*, 2008b).

A edição corrente do GUM fornece regras gerais para avaliar e expressar a incerteza de medição. Este Guia é baseado em conceitos estatísticos da abordagem frequencista (incerteza do Tipo A) e da abordagem bayesiana (incerteza do Tipo B). O método proposto pelo GUM consiste em propagar as estimativas das grandezas de entrada, suas incertezas padrão e seus coeficientes de correlação, através de uma aproximação linear da função de medição, de modo a avaliar a incerteza padrão e a incerteza expandida da grandeza de saída (mensurando).

Após a publicação do GUM, o BIPM criou o *Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM) que, por sua vez, assumiu duas responsabilidades: promover o uso do GUM e elaborar documentos padrão para uma ampla aplicabilidade do GUM em ciências de medição (Grupo de Trabalho 1 do JCGM); revisar e promover o uso do VIM (Grupo de trabalho 2 do JCGM). Os documentos padrão de responsabilidade do Grupo de Trabalho 1 do JCGM são:

- um documento introdutório, que descreve brevemente a função de cada documento do JCGM;
- um documento focado nos conceitos e nos princípios básicos utilizados pelo GUM;
- três Suplementos do GUM;
- e dois documentos focados nas questões do uso da incerteza de medição no contexto da conformidade com requisitos especificados e a aplicação do método dos mínimos quadrados.

COX e HARRIS (2003) mostram a função específica dos três Suplementos do GUM; porém, maiores detalhes sobre todos os documentos do JCGM são discutidos por BICH *et al.* (2006b).

O Suplemento 1 do GUM (GUM–S1), desenvolvido pelo BIPM *et al.* (2008c), apresenta um método numérico para a avaliação da incerteza de medição. Este método é baseado na propagação das funções de densidade de probabilidade atribuídas às grandezas de entrada que compõem o modelo de medição, de modo a determinar a função de densidade de probabilidade do mensurando. O Suplemento 2 do GUM, ainda no prelo, irá tratar de ferramentas para a avaliação da incerteza de medição em

Chemistry (IUPAC), International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) and International Organization of Legal Metrology (OIML).

modelos que possuem múltiplas grandezas de saída, ou seja, modelos multivariáveis de medição (BICH *et al.*, 2006b). Por fim, o Suplemento 3 do GUM, também no prelo, focará no desenvolvimento e validação dos modelos de medição (BICH *et al.*, 2006b).

1.2 Motivação

Trabalhos regidos pela publicação do GUM e seu Suplemento 1, dos quais abrangem desde aspectos teóricos como práticos, têm crescido substancialmente ao longo dos últimos anos.

Entretanto, existem temas ainda pouco explorados na literatura sobre métodos para a avaliação da incerteza de medição. Entre estes temas destacam-se: métodos de ordens superiores (e.g., segunda e terceira ordem) para avaliar a incerteza de medição; trabalhos destinados a métodos de avaliação da incerteza de medição para sistemas multivariáveis; outro tema bastante promissor, e portanto, ainda pouco difundido na literatura, é a avaliação da incerteza de medição em regime transiente; além disso, métodos de inferência bayesiana e *fuzzy* para avaliar a incerteza de medição de grandezas que não podem ser observadas em um sistema de medição têm ganhado relevância na literatura.

A partir do contexto anteriormente exposto, o presente trabalho visa desenvolver ou expandir métodos para avaliar e expressar a incerteza de medição. Os temas abordados neste trabalho são apresentados, em rigor de detalhes, sob aspectos teóricos e práticos.

O primeiro tema abordado focaliza o desenvolvimento de métodos de segunda e terceira ordem para a avaliação da incerteza padrão de medição de sistemas não lineares; neste trabalho, expressões generalizadas de segunda e terceira ordem para expressar a incerteza padrão de medição são obtidas pela expansão em série de Taylor da função de medição até os termos de segunda e terceira ordem, respectivamente.

Outro tema pertinente, e ainda pouco explorado na literatura, são os sistemas multivariáveis de medição. Uma contribuição deste trabalho é desenvolver uma metodologia para a avaliação da incerteza de medição de sistemas multivariáveis lineares e não lineares. Os aspectos teóricos e práticos, bem como as vantagens e as desvantagens do método linear, baseado na lei de propagação de incertezas, e do método não linear, baseado na lei de propagação de funções de densidade de probabilidade usando o método de Monte Carlo, são apresentados no presente trabalho.

Além disso, a presente Dissertação, por meio do capítulo 2, dedica–se a demonstrar as hipóteses pressupostas em cada etapa dos métodos propostos pelo GUM e o GUM–S1, bem como apresentar os méritos e os deméritos desses métodos, baseado

em uma vasta pesquisa bibliográfica. Portanto, a principal contribuição do capítulo 2 é organizar detalhadamente as informações, as suposições e as demonstrações sobre cada estágio dos métodos GUM e GUM–S1.

1.3 Estrutura da dissertação

A dissertação está dividida em cinco capítulos e dois apêndices, estruturada da seguinte forma:

O capítulo 1 (presente capítulo) trata da introdução, motivação e dos objetivos deste trabalho.

No capítulo 2 são apresentados os aspectos teóricos e práticos do método linear, proposto pelo GUM, e do método não linear, proposto pelo Suplemento 1 do GUM. Além disso, as vantagens e as desvantagens de ambos os métodos são apresentadas com base nos resultados provenientes de um estudo de caso.

O capítulo 3 apresenta as expressões generalizadas de segunda e terceira ordem para a avaliação da incerteza de medição. Além disso, uma comparação dos resultados obtidos desses métodos propostos com os resultados provenientes dos métodos GUM e GUM–S1 também é apresentada, enfatizando as limitações e os méritos dos métodos de segunda e terceira ordem.

No capítulo 4 é apresentada uma extensão dos métodos GUM e GUM–S1 para os sistemas multivariáveis de medição. Um estudo de caso esboça uma comparação dos resultados provenientes de ambos os métodos linear e não linear focando nos seus méritos e deméritos.

As conclusões, bem como as perspectivas de futuros trabalhos a serem desenvolvidos nesta linha de pesquisa, são apresentadas no capítulo 5.

O apêndice A demonstra as deduções das equações de segunda e terceira ordem para a avaliação da incerteza padrão de medição.

Finalmente, no apêndice B é apresentado a produção bibliográfica (artigos e apresentações) desenvolvida ao longo da Dissertação.

Neste trabalho a pesquisa bibliográfica foi distribuída ao longo de toda a dissertação, segundo o conteúdo referente a cada capítulo e com a sequência das seções tratadas.

Capítulo 2

Uma análise do GUM e seu Suplemento 1

"A natureza do tecido profundo da nossa realidade física esquiva-se no mesmo movimento em que a entrevemos. [...] O progresso das certezas científicas produz, pois, um progresso da incerteza. Mas é uma "boa" incerteza que nos liberta de uma ilusão ingênua e nos desperta de um sonho lendário: é uma ignorância que se conhece como ignorância."

Filósofo contemporâneo Edgar Morin

O principal método reconhecido pelos metrologistas para expressar e avaliar a incerteza de medição é apresentado no Guia para a Expressão da Incerteza de Medição (GUM). Entretanto, devido às limitações do método proposto pelo GUM, um método suplementar ao mesmo, baseado na propagação de funções de densidade de probabilidade através do método de Monte Carlo (GUM–S1), foi desenvolvido de modo a fornecer uma maior aplicabilidade na avaliação da incerteza de medição. Durante a última década, muitos trabalhos de natureza teórica e prática, relacionados a esses métodos de avaliação da incerteza de medição, foram desenvolvidos. O presente capítulo visa apresentar aspectos teóricos e práticos, bem como discutir os méritos e as limitações de cada um desses métodos com base na revisão dos trabalhos publicados. Grande parte do conteúdo deste capítulo foi devidamente adaptado em formato de artigo e publicado no periódico nacional Controle & Automação (MARTINS *et al.*, 2010b).

2.1 Método GUM

Antes da publicação do Guia para a Expressão da Incerteza de Medição (GUM), os conceitos da análise de erros eram utilizados para quantificar a incerteza de medição. Entretanto, as limitações da análise de erros eram responsáveis por conflitos de

comunicação gerados entre as áreas científicas e técnicas de medição (KACKER *et al.*, 2007).

Com intuito de superar as limitações e os conflitos de comunicação da análise de erros, como também criar uma linguagem universal para expressar e avaliar a incerteza de medição, as organizações internacionais em metrologia desenvolveram o GUM, que foi construído sob a ótica de alguns conceitos oriundos da análise de erros.

Os princípios estatísticos envolvidos na análise de erros, tais como: erro de medição, valor verdadeiro, propagação de erros e entre outros, são discutidos nos livros de BEVINGTON e ROBISON (1992); KIRKUP e FRENKEL (2006); TAYLOR (1997) e na monografia de FRENKEL (2006); uma revisão da literatura sobre a análise de erros pode ser consultada no trabalho de KACKER *et al.* (2007).

O GUM apresenta os conceitos e os princípios estatísticos e metrológicos, bem como define um procedimento que deve ser adotado pelos metrologistas, para expressar o resultado de medição e sua respectiva incerteza. De acordo com o GUM, as incertezas de medição podem ser expressas como incertezas padrão (em termos de desvios padrão) ou incertezas expandidas. As definições requeridas para a correta aplicação do método GUM são explanadas em BENTLEY (2005); WILLINK (2006a); além disso, os principais artigos encontrados na literatura que apresentam em suas seções uma breve revisão a respeito desse método são: COX *et al.* (2003); KACKER e JONES (2003); KACKER *et al.* (2006, 2007); KACKER (2006); LIRA (2006); WHITE e SAUNDERS (2007); WILLINK (2005).

2.1.1 Avaliando a incerteza padrão

Para avaliar a incerteza de medição pelo GUM, é necessário estabelecer uma função de medição[1]. Ao longo deste capítulo, e do capítulo 3, será admitida uma função de medição explícita; contudo, em alguns processos de medição essa função pode ser implícita, como será apresentada no capítulo 4.

$$Y = f(X_1, \ldots, X_N) \tag{2.1}$$

A função de medição, expressa pela Eq.(2.1), representa a relação matemática entre a grandeza de saída ou mensurando (Y) com as várias grandezas de entrada (X_i). Esta relação funcional é necessária, pois o mensurando Y não é medido diretamente, mas determinado por N outras grandezas (de entrada) X_i. As grandezas de

[1]A avaliação da incerteza de medição proposta pelo GUM, documento de referência da área metrológica, necessita de uma função de medição para sua devida aplicação. As contribuições do presente trabalho estão balizadas nesse conceito do GUM. Portanto, apenas processos ou sistemas de medição que podem ser modelados por uma função (de medição) poderão ser tratadas pelos métodos abordados neste trabalho.

entrada X_i podem ser classificadas também como mensurandos, uma vez que essas dependem de outras grandezas que contribuem para a sua variabilidade experimental. A variabilidade (experimental) observada das grandezas de entrada é resultado da contribuição de várias fontes de incertezas que, por sua vez, devem ser modeladas também por um modelo matemático. Mais adiante esse modelo matemático será detalhado.

O estabelecimento adequado da função de medição é fundamental na determinação do resultado de uma medição e de sua incerteza associada, pois se o modelo não representar bem o processo de medição, resultados enganosos, tanto para o mensurando quanto para a sua incerteza, podem ser alcançados. Um estudo minucioso sobre a importância da escolha das grandezas de influência para o desenvolvimento adequado do modelo de medição é apresentado por SOMMER e SIEBERT (2006).

No método GUM cada grandeza possui uma função de densidade de probabilidade (PDF), e consequentemente os parâmetros estatísticos mais relevantes da PDF, do ponto de vista metrológico, são a esperança (ou valor esperado de uma variável aleatória) e a variância[2] (esperança do desvio quadrático de uma variável aleatória em torno de sua própria esperança). Por conveniência, o mesmo símbolo será usado tanto para a grandeza como para sua variável aleatória caracterizada por uma PDF. Para evitar possíveis conflitos, os símbolos das variáveis aleatórias serão acompanhados pelos operadores esperança ($\mathrm{E}[X]$) e variância ($\mathrm{Var}[X]$) que representam os parâmetros esperança e variância, respectivamente. Dessa maneira, o GUM define que o resultado de uma medição é obtido pelo primeiro momento estatístico, isto é:

$$\mu_X = \mathrm{E}[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \xi g_X(\xi) d\xi \tag{2.2}$$

Em que ξ representa os valores possíveis de uma grandeza X, a qual possui uma PDF $g_X(\xi)$. Enquanto que a incerteza padrão de medição ($u(\mu_X)$) associada ao resultado de medição μ_X é relacionada com o segundo momento estatístico centrado na esperança:

$$u^2(\mu_X) = \mathrm{Var}[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu_X)^2 g_X(\xi) d\xi \tag{2.3}$$

Como mostrado nas Eqs.(2.2–2.3), para expressar o resultado de medição (μ_X) e a incerteza padrão $u(\mu_X)$ é necessário o conhecimento da PDF da grandeza. Para as grandezas de entrada (X_i), o GUM considera dois métodos para a obtenção dessas PDFs: o primeiro consiste em obter uma PDF a partir de uma série de observações independentes $X_{i,k}$ de X_i (uma distribuição de frequência); e o segundo consiste na determinação de uma PDF *a priori* proveniente do levantamento de informações

[2]Na prática, a incerteza de medição é proveniente do desvio padrão da PDF da variável aleatória; por definição, o desvio padrão é a raiz quadrada positiva da variância.

das grandezas. O GUM classifica as incertezas obtidas a partir das distribuições de frequência como incertezas do Tipo A e as oriundas a partir de PDFs a *priori* como incertezas do Tipo B. Por consequência, as incertezas padrão das grandezas de entrada, segundo o GUM, são estimadas pela combinação das incertezas padrão do Tipo A e do Tipo B.

Avaliação do Tipo A da incerteza padrão

As Eqs.(2.2–2.3) representam a esperança e a variância de uma variável aleatória contínua, respectivamente. Contudo, em um processo de medição os valores possíveis da variável submetida a medição são amostrados, o que implica na formação de um conjunto de valores discretos dessa grandeza. Portanto, no processo de medição as amostras coletadas das variáveis medidas constituem uma PDF amostral ou uma distribuição de frequência. Como a distribuição de frequência é uma aproximação da PDF de uma variável aleatória, seus parâmetros média (resultado de medição) e desvio padrão (incerteza padrão) também serão uma estimativa dos respectivos parâmetros μ_X e $u(\mu_X)$ associados a PDF daquela variável aleatória X. A melhor estimativa para os parâmetros μ_{X_i} e $u(\mu_{X_i})$ de uma grandeza X_i são expressas pelas Eqs.(2.4–2.5), respectivamente:

$$x_i = \bar{X}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_{i,k}}{n} \tag{2.4}$$

$$s^2(X_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_{i,k} - \bar{X}_i)^2}{n-1} \tag{2.5}$$

Em que x_i é a média aritmética ou média de n observações independentes $X_{i,k}$ da grandeza X_i e a raiz quadrada positiva de $s^2(X_i)$ é o desvio padrão experimental ($s(X_i)$) dessas mesmas observações. Segundo o GUM, a melhor estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i deve ser obtida da Eq.(2.4), enquanto que a incerteza padrão (do Tipo A) associada à estimativa x_i é determinada pelo desvio padrão experimental da média:

$$u'_{\mathrm{A}}(x_i) = s(x_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} \tag{2.6}$$

A incerteza padrão do Tipo A, representada pela Eq.(2.6), é válida somente quando as observações $X_{i,1}, \ldots, X_{i,n}$ forem mutuamente independentes, ver demonstração em (FRENKEL, 2006, pg.11); e quando o número de observações independentes $X_{i,k}$ for maior ou igual a vinte e três amostras ($n \geq 23$). Entretanto, quando o número de medições pertence ao intervalo ($4 \leq n \leq 22$) é recomendado utilizar a incerteza padrão do Tipo A bayesiana (KACKER e JONES, 2003; KACKER *et al.*,

2006; KACKER, 2006; LIRA e KYRIAZIS, 1999):

$$u_{\mathrm{A}}(x_i) = u_{\mathrm{A}_{Bayes}}(x_i) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \cdot \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}} \tag{2.7}$$

O comportamento da razão entre a Eq.(2.7) e a Eq.(2.6) *versus* o número de medições independentes (n), apresentado na Figura 2.1, demonstra que a ordenada da curva tende a unidade a partir de $n = 23$ medições, tomando como base a regra de arredondamento na numeração decimal da NBR 5891 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1977). Por isso, quando o número de medições estiver entre 4 e 22 recomenda–se utilizar a Eq.(2.7); a partir de $n = 23$ medições, a Eq.(2.6) pode ser utilizada ou simplesmente utilizar a expressão da incerteza padrão do Tipo A conforme a Eq.(2.7), para $n \geq 4$.

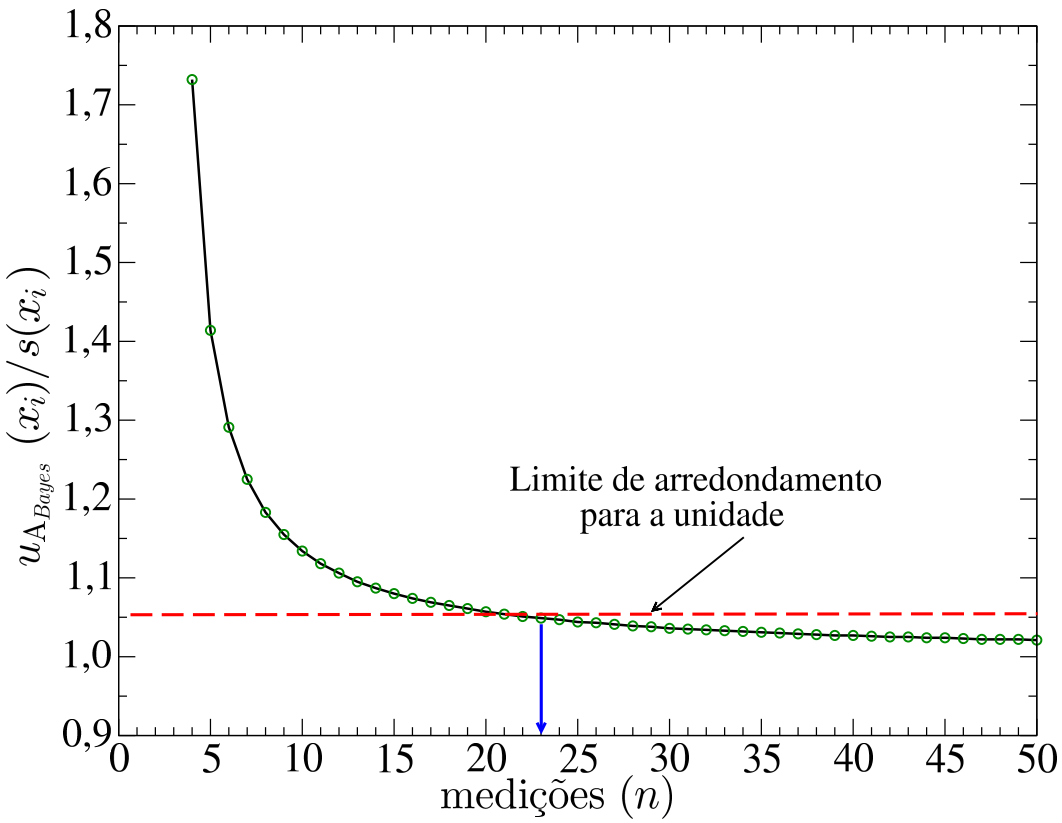

Figura 2.1: Comportamento da razão entre as incertezas padrão do Tipo A bayesiana e clássica *versus* o número de medições independentes.

Existem casos em que apenas poucas medições podem ser realizadas ($n = 1, 2, 3$), devido a restrições operacionais, custo para realização do experimento, custo do instrumento e entre outros. Nesses casos, o desvio padrão experimental da média não pode ser avaliado por meio das Eqs.(2.6–2.7) e recomenda–se utilizar a seguinte

expressão para atribuir a incerteza padrão do Tipo A:

$$u_{\mathrm{A}}(x_i) = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2\sqrt{3}} \tag{2.8}$$

Em que $X_{\max}$ representa o máximo valor permitido da grandeza X_i, enquanto $X_{\min}$ o menor valor que X_i pode assumir.

A discussão apresentada até o momento refere–se à situação na qual a estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i é representada pela média aritmética das medidas. Contudo, quando essa estimativa for expressa por uma das observações $X_{i,k}$, a incerteza padrão do Tipo A deve ser avaliada pelo desvio padrão experimental da amostra (Eq.(2.5)).

Avaliação do Tipo B da incerteza padrão

Quando a estimativa x_i de uma grandeza de entrada X_i é avaliada a partir de um julgamento científico baseado em todas informações disponíveis a respeito da variabilidade da grandeza X_i, o GUM afirma que a incerteza padrão associada a essa estimativa refere-se à incerteza padrão do Tipo B ($u_{\mathrm{B}}(x_i)$). Segundo o GUM, as informações para compor a incerteza do Tipo B podem incluir (BIPM *et al.*, 2008b, cláusula 4.3.1): dados históricos de medições; experiência ou conhecimento geral a respeito do procedimento de medição; propriedades relevantes a respeito dos materiais ou dos instrumentos de medição; especificações do fabricante; dados da calibração e de outros certificados e incertezas de outros dados de referência presentes em manuais.

Nesse sentido é importante enfatizar que a avaliação do Tipo B da incerteza pode ser tão confiável quanto à avaliação do Tipo A, principalmente quando poucas medições são disponíveis. Como a avaliação do Tipo B da incerteza utiliza fontes de informações disponíveis a respeito do processo de medição, então a incerteza padrão decorrente da mesma é baseada em conceitos da estatística bayesiana (LEE, 1997; LIRA e GRIENTSCHNIG, 2010; LIRA e KYRIAZIS, 1999). Deste modo, o método GUM necessita de um auxílio externo para torná–lo mais consistente, uma vez que a estatística frequencista (incerteza do Tipo A) não o satisfaz completamente (KACKER e JONES, 2003).

Quando a PDF de alguma grandeza de entrada X_i é obtida a partir do conhecimento geral ou da experiência sobre o processo de medição, o GUM classifica esta como uma PDF *a priori*. A PDF *a priori* pode ter várias formas, e.g., uniforme, triangular ou gaussiana. As formas dessas PDFs são obtidas com auxílio do princípio de entropia máxima[3] (PME) (WEISE e WOGER, 1993). Por exemplo, existem

[3]Em linhas gerais o princípio de entropia máxima (PME) permite compreender características gerais de um processo ou um sistema baseado em informações parciais e incompletas dos mesmos;

casos onde somente é conhecido o menor valor (a_-) e o maior valor (a_+) de uma grandeza de entrada X_i, então, de acordo com o PME, a PDF *a priori* atribuída a esta grandeza X_i deve ser uma distribuição retangular. Isto é, a probabilidade que os valores de X_i estejam dentro deste intervalo, para todos os propósitos práticos, é igual a unidade, e fora do intervalo é essencialmente zero. Uma PDF retangular é representada da seguinte forma:

$$g(X_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\cdot(a_+ - a_-)}, & a_- < X_i < a_+ \\ 0, & \text{para outros valores de } X_i \end{cases} \tag{2.9}$$

Para este tipo de PDF, a esperança de X_i é calculada como o ponto médio do intervalo existente entre os limites inferior e superior de X_i, i.e., $x_i = (a_- + a_+)/2$. Se a diferença entre os extremos do intervalo for denotada por $2a$, o desvio padrão associado ou a incerteza padrão do Tipo B da estimativa x_i é dada por:

$$u_{\mathrm{B}}(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{2.10}$$

Alguns exemplos práticos da aplicação deste tipo de PDF são obtidos em limites de tolerância e resolução da escala de instrumentos de medição (VUOLO, 1997).

Em outra situação, além dos limites superiores e inferiores de uma grandeza X_i, é conhecido também um valor intermediário (valor mais provável) desses limites. Neste caso a melhor PDF que representa essa grandeza deve ser uma distribuição triangular. Neste tipo de distribuição é esperado que os valores próximos aos extremos sejam menos frequentes do que os valores próximos ao valor mais provável. Se a diferença entre os limites do intervalo a_- e a_+ for denotada por $2a$, então a distribuição triangular pode ser representada matematicamente como:

$$g(X_i) = \begin{cases} (X_i - a_-)/a, & a_- < X_i < a \\ (a_+ - X_i)/a, & a < X_i < a_+ \\ 0, & \text{para outros valores de } X_i \end{cases} \tag{2.11}$$

Desta maneira, se a distribuição triangular for simétrica, a média será estimada por $x_i = (a_+ + a_-)/2$ e o desvio padrão ou a incerteza padrão do Tipo B é dada por:

$$u_{\mathrm{B}}(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}} \tag{2.12}$$

Uma PDF *a priori* muito comum em processos de medição que poderia ser assumida é a gaussiana[4]. Segundo o PME, quando apenas a média e o desvio padrão

essa característica do PME permite denominá–lo de princípio de informação máxima. Sob a ótica da metrologia, o PME implica na inferência de uma PDF que represente apenas as informações disponíveis sobre o processo de medição.

[4]Em alguns exemplos práticos de processos de medição, a avaliação do Tipo B da incerteza padrão é confirmada por um resultado de calibração do instrumento ou resultado de uma análise

da grandeza de entrada X_i é conhecida, a PDF que possui a entropia máxima é a gaussiana (BIPM *et al.*, 2008b, cláusula 4.3).

Outro tipo de PDF *a priori* que pode surgir em processos de medição é a trapezoidal. Esta PDF surge quando os valores possíveis de uma grandeza X_i estão dentro de um intervalo não exatamente prescrito. Um estudo detalhado da aplicação deste tipo de PDF pode ser consultado no trabalho de LIRA (2008); outra aplicação da PDF trapezoidal em processos de medição também pode ser consultada em KACKER e LAWRENCE (2007), neste último trabalho os autores mostram que a distribuição trapezoidal pode ser útil na quantificação da incerteza padrão do Tipo B para correções sistemáticas. Outros trabalhos apresentam um estudo mais detalhado da avaliação do Tipo B da incerteza aplicada em problemas mais específicos de medição: potências sonoras (DA COSTA-FELIX, 2006), processamento digital de sinais (ELSTER, 2000; LOCCI *et al.*, 2002) e resolução da escala de instrumentos de medição (FRENKEL e KIRKUP, 2005).

Avaliando a incerteza padrão de uma grandeza de entrada

As grandezas de entrada são medidas diretamente no processo de medição através de um sistema (ou um instrumento) de medição. A variabilidade experimentalmente observada da grandeza de entrada (medida) X_i pode ser atribuída a duas fontes de incerteza: a variabilidade intrínseca do mensurando e a variabilidade proveniente das imperfeições do sistema de medição. A primeira fonte de incerteza é avaliada pela incerteza padrão do Tipo A ($u_{\mathrm{A}}(x_i)$), enquanto que a segunda é comumente avaliada pela incerteza padrão do Tipo B ($u_{\mathrm{B}}(x_i)$).

A classificação em fonte sistemática ou aleatória da incerteza de medição é desnecessária e apenas causa confusão (BIPM *et al.*, 2008b, cláusula E.1). Qualquer que seja a natureza da fonte de incerteza, esta pode ser quantificada por um procedimento estatístico frequencista (incerteza padrão do Tipo A) ou a partir de informações *a priori* (incerteza padrão do Tipo B) independente da natureza aleatória ou sistemática da fonte de incerteza.

Portanto, como uma grandeza de entrada depende de outras componentes no processo de medição, uma função de medição é necessária para expressar o resultado de medição e sua incerteza padrão. Esta função de medição direta, aqui denominada

estatística expressado pela média e desvio padrão (incerteza padrão), na qual a maioria dos casos possuem distribuições gaussianas (SOMMER *et al.*, 2009).

de função metrológica, pode ser representada pela seguinte equação[5]:

$$X_i = Q_i + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{i,j} D_{i,j} \tag{2.13}$$

Em que Q_i representa as indicações do instrumento de medição (série de observações independentes da grandeza de entrada); D_i representa as variáveis associadas às correções provenientes das imperfeições do sistema de medição (por exemplo: correções da calibração do instrumento, resolução da escala dos instrumentos de medição, compensações de temperatura e pressão sobre a grandeza de entrada X_i); enquanto que α_i representa os fatores de conversão de modo a tornar as correções D_i com a mesma unidade da grandeza de entrada X_i.

Segundo LIRA e WÖGER (1998a) existem basicamente três fontes de incertezas associadas ao resultado de medição de uma grandeza de entrada X_i: a primeira surge da dispersão dos valores obtidos da indicação do instrumento de medição; a segunda surge da resolução limitada da escala do instrumento de medição; e finalmente a terceira surge da informação incompleta sobre a correção sistemática que deve ser aplicada através da calibração do instrumento de medição. Portanto, a função metrológica da grandeza de entrada X_i pode ser reescrita como:

$$X_i = Q_i + \alpha_1 R_i + \alpha_2 C_i \tag{2.14}$$

Aplicando o operador matemático esperança (Eq.(2.5)) em ambos os lados da Eq.(2.14), utilizando também a melhor estimativa das variáveis (e.g., $\mathrm{E}[X_i] = x_i$), e como a esperança da resolução da escala do instrumento de medição é igual a zero ($\mathrm{E}[R_i] = r_i = 0$), obtém-se:

$$x_i = q_i + \alpha_2 c_i \tag{2.15}$$

Se os experimentos são conduzidos de forma cuidadosa, os instrumentos utilizados são de qualidade razoável, os procedimentos são adequados e os operadores são treinados, é possível assumir que Q_i, R_i e C_i são variáveis independentes estatisticamente, logo a incerteza padrão associada à estimativa x_i, obtida a partir da lei de propagação de incertezas (que será apresentada na seção 2.2), é expressa da seguinte forma:

$$u(x_i) = \sqrt{u^2(q_i) + \alpha_1^2 u^2(r_i) + \alpha_2^2 u^2(c_i)} \tag{2.16}$$

O primeiro termo da Eq.(2.16) é obtido por n valores independentes Q_i proveni-

[5] A Eq.(2.13) representa uma função metrológica baseada em fatores aditivos, contudo existem modelos que utilizam fatores multiplicativos (BIPM *et al.*, 2008b, cláusula B.2.24). Estas funções metrológicas não serão abordadas neste trabalho.

entes das indicações do instrumento de medição; este termo caracteriza a incerteza padrão do Tipo A (estimada pelas Eqs.(2.6–2.7)). Os outros termos são obtidos a partir de informações *a priori*, isto é, as incertezas são obtidas por outros meios que não seja da análise estatística clássica; estes termos, por sua vez, caracterizam a incerteza padrão do Tipo B.

Para o caso da resolução da escala do instrumento de medição (R_i), a informação disponível sobre esta pode ser descrita por um parâmetro δ[6], cujos os valores de Q_i poderiam ser indicados pelo intervalo $(Q_i - \delta/m; Q_i + \delta/m)$, em que m pode assumir os valores 1, 2, 4 ou 6. À atribuição dos valores de m está relacionada com a qualidade da resolução da escala do instrumento de medição; quando se atribui o valor de m igual a 6 trata–se de um instrumento com escala de alta qualidade e quando a resolução da escala do instrumento é baixa, o valor de m deve ser igual a unidade. Na maioria dos casos assume–se um valor de m igual a 2 visto que este valor abrange a maioria das aplicações práticas. O trabalho de LIRA e WÖGER (1997) descreve uma aplicação prática e justifica o uso do valor $m = 2$ para a resolução da escala de instrumentos de medição.

Em casos que são conhecidos apenas os limites inferior e superior dos valores de uma grandeza, a melhor PDF que pode descrever tal situação é a distribuição uniforme ou retangular. Portanto, a incerteza padrão do Tipo B da resolução do instrumento de medição é estimada pela Eq.(2.12), isto é, $u_{\mathrm{B}}(r_i) = \delta/(m\sqrt{3})$; caso seja considerado $m = 2$, a incerteza padrão da resolução de um instrumento de medição é $u_{\mathrm{B}}(r_i) = \delta/\sqrt{12}$.

Existem alguns processos de medição que é impraticável incluir o valor da correção sistemática da calibração do instrumento d_i ao resultado do mensurando x_i; isto pode ocorrer por diversos motivos, tais como: documentação incompleta dos certificados de calibração dos instrumentos, treinamento limitado do operador, altos custos associados com medições de alta qualidade etc. Logo, uma estimativa de ambos os valores de d_i e $u_{\mathrm{B}}(d_i)$ é necessária; LIRA e WÖGER (1998a,b) apresentam algumas equações para a estimativa da correção sistemática e sua incerteza padrão do Tipo B associada. Entretanto, se o certificado de calibração do instrumento é conhecido e completo, isto proporciona uma condição suficiente para determinar ambos os valores da correção sistemática d_i e sua respectiva incerteza padrão $u_{\mathrm{B}}(d_i)$.

Portanto, a incerteza padrão de uma grandeza de entrada X_i proveniente da função de medição (Eq.(2.1)) é obtida pela combinação das incertezas padrão do Tipo A e do Tipo B (Eq.(2.16)).

Doravante, a equação generalizada para a incerteza padrão da estimativa x_i da

[6] O parâmetro δ representa a menor divisão existente (possível) do indicador de um instrumento de medição digital ou analógico.

grandeza de entrada X_i é dada por:

$$u(x_i) = \sqrt{u_{\mathrm{A}}^2 + \Big(\sum_{j=1}^{n} c_j^2 u_{\mathrm{B}_j}^2\Big)} \tag{2.17}$$

Em que os valores de c_j representam um fator de conversão de cada correção do sistema de medição D_i. Estes fatores são conhecidos como coeficientes de sensibilidade e sua função será mostrada posteriormente neste trabalho.

2.1.2 A incerteza padrão combinada

O foco principal do método GUM é expressar e avaliar o resultado de uma medição (mensurando) e sua incerteza padrão combinada a partir das várias grandezas de entrada que compõem o modelo de medição previamente estabelecido. Este método consiste em propagar as estimativas, as incertezas padrão e os coeficientes de correlação das grandezas de entrada através de uma aproximação linear pela série de Taylor da função de medição. Logo, a função de medição (Eq.(2.1)) pode ser reescrita como:

$$Y \approx Y_{1\mathrm{ord}} = f(\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_N}) + \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)(X_i - \mu_{X_i}) \tag{2.18}$$

O resultado da medição pode ser determinado a partir da esperança das variáveis aleatórias de PDF conhecida, portanto aplicando o operador esperança em ambos os lados da Eq.(2.18) encontra-se:

$$\mu_Y \approx f(\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_N}) \tag{2.19}$$

Como não são conhecidos exatamente as esperanças das variáveis aleatórias no processo de medição (ver seção 2.1.1), utiliza–se suas respectivas estimativas, então a Eq.(2.19) torna-se:

$$y \approx y_{1\mathrm{ord}} = f(x_1, \ldots, x_N) \tag{2.20}$$

Através da Eq.(2.20), fica evidente que a substituição das estimativas das grandezas de entrada (x_i) na função de medição fornece como resultado uma aproximação da estimativa da grandeza de saída (mensurando). Este resultado de medição (y) será exato caso a função de medição seja linear (caso pouco provável). Para superar esta dificuldade, o GUM (cláusula 4.1.4) recomenda determinar a melhor estimativa y através da média aritmética dos n valores independentes Y_k calculados pela função

de medição, ou seja:

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{i,k}, \ldots, X_{N,k}) \tag{2.21}$$

Contudo, a escolha da Eq.(2.21) pode ser inadequada quando as grandezas de entrada X_i possuem ruídos significativos, logo nesses casos específicos é melhor utilizar a Eq.(2.20) uma vez que essa tem a função de filtrar tais ruídos. Um estudo minucioso da melhor escolha dessas equações (Eq.(2.20) ou Eq.(2.21)) é apresentado por BICH *et al.* (2006a).

Para determinar a incerteza padrão combinada ($u_c(y)$) da melhor estimativa y do mensurando Y, utiliza-se o segundo momento estatístico central ou operador variância (Eq.(2.3)). Portanto, aplicando o operador esperança em ambos os lados da expressão proveniente do desvio quadrático entre a Eq.(2.18) e a Eq.(2.19), a incerteza padrão combinada é representada por:

$$\begin{aligned} u_c^2(y) &= \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)^2 u^2(x_i) \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial X_j}\Big)u(x_i, x_j) \end{aligned} \tag{2.22}$$

O termo $u(x_i, x_j)$ representa a covariância associada às estimativas x_i e x_j, cuja estimativa é dada por (BIPM *et al.*, 2008b, Anexo C):

$$u(x_i, x_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{N}(X_{i,k} - x_i)(X_{j,k} - x_j) \tag{2.23}$$

O método de obter $u_c(y)$, expressado pela Eq.(2.22), é conhecido como lei de propagação de incertezas (LPU). As derivadas parciais $\partial f/\partial X_i$ são chamadas de coeficientes de sensibilidade c_i; esses coeficientes são estimados em torno da melhor estimativa de X_i, i.e., $X_i \to x_i$, então a Eq.(2.22) é comumente expressa por:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i, x_j)} \tag{2.24}$$

Em muitos casos práticos é comum expressar a covariância $u(x_i, x_j)$ em termos do coeficiente de correlação $r(x_i, x_j)$, i.e.:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{2.25}$$

Quando as grandezas de entrada são consideradas não correlacionadas, i.e. $r(x_i, x_j) = 0$, a Eq.(2.24) se reduz a:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)} \tag{2.26}$$

Em muitas situações práticas surge a necessidade de quantificar quais os componentes que mais contribuem para incerteza padrão combinada; na literatura essa quantificação é denominada como análise de contribuição para a incerteza (*budget uncertainty*). A métrica utilizada para essa análise é baseada nos coeficientes de contribuição ($h(y, x_i)$) conforme apresentado no trabalho de KESSEL *et al.* (2006). Neste último trabalho são apresentados os coeficientes de contribuição tanto para grandezas de entrada correlacionadas como não correlacionadas:

$$h(y, x_i) = \left[\frac{c_i u(x_i)}{u_c(y)}\right]^2 \tag{2.27}$$

$$h(y, x_i) = \left[\frac{c_i u(x_i)}{u_c(y)}\right] r(x_i, x_j) \tag{2.28}$$

Esses coeficientes de contribuição, representados pelas Eqs.(2.27–2.28), são úteis para identificar as fontes de incertezas (grandezas de entrada) mais significativas para a incerteza padrão combinada ($u_c(y)$). O conhecimento dessas fontes de incertezas é um passo fundamental para o entendimento, a gestão e a melhoria do processo de medição.

2.1.3 A incerteza expandida

O GUM (cláusula 6.1.1) "defende o uso da incerteza padrão combinada $u_c(y)$ como parâmetro para expressar quantitativamente a incerteza do resultado de uma medição". GODEC (1997) também apresenta argumentos quantitativos para o uso da incerteza padrão combinada como parâmetro associado ao resultado de uma medição. Entretanto, algumas vezes (por exemplo: aplicações comerciais e industriais) é necessário expressar a incerteza como um intervalo em torno do resultado da medição no qual espera–se abranger uma extensa fração dos valores que podem razoavelmente ser atribuídos ao mensurando (BIPM *et al.*, 2008b, cláusula 6.1.2). Esta métrica atribuída ao resultado de uma medição é chamada de incerteza expandida e é denotada por $U(y)$; de acordo com o método proposto pelo GUM (cláusula 6.2.2), a incerteza expandida é obtida pela multiplicação de $u_c(y)$ por um fator de

abrangência (k), i.e.:

$$U(y) = ku_c(y) \tag{2.29}$$

Um dos parâmetros necessários para expressar a incerteza expandida é a escolha da probabilidade de abrangência (p) da distribuição de probabilidade do mensurando Y; os valores de p são usualmente escolhidos como 68,27%, 90,00%, 95,45% ou 99,73%. A escolha da probabilidade de abrangência depende da aplicação que será destinada à incerteza expandida. Por exemplo, recomenda–se uma probabilidade de abrangência de 90,00% para aplicações que utilizem medições de campo, uma vez que tais medições têm variabilidades elevadas e uma probabilidade maior conduz a incertezas expandidas muito grandes. As probabilidades de 95,45% ou 99,73% são recomendadas em medições obtidas sob condições bem controladas, como por exemplo, em laboratórios. Por outro lado, existem aplicações que é mais conveniente ter pequenas incertezas expandidas, logo uma probabilidade de abrangência de 68,27% é usualmente recomendado; um exemplo desse tipo de aplicação é encontrado nas áreas de georreferanciamento de terrenos rurais (INCRA, 2008). Todavia, a escolha da probabilidade de abrangência mais adequada é polêmica e, portanto, o importante é explicitar qual valor foi utilizado para a estimativa da incerteza expandida (BIPM *et al.*, 2008b, cláusula 7.2.4).

O conhecimento da incerteza expandida força expressar o resultado de uma medição como um intervalo (de abrangência) simétrico da seguinte maneira: $Y = [y \pm U(y)] \equiv [y \pm ku_c(y)]$. Isto significa que o mensurando Y possui limites como $y - U$ e $y + U$ para uma dada probabilidade de abrangência p. Para determinar k, é necessário o cálculo dos graus de liberdade efetivos (ν_{eff}) da incerteza padrão combinada; os ν_{eff} são uma medida da incerteza de $u_c(y)$ e é um fator chave na determinação do fator de abrangência k (FRENKEL, 2006).

O GUM recomenda o uso da fórmula de Welch-Satterthwaite (W–S) (FAIRFIELD-SMITH, 1936; SATTERTHWAITE, 1941, 1946; WELCH, 1936, 1938) para o cálculo dos graus de liberdade efetivos. Segundo HALL e WILLINK (2001), a formula W–S é uma boa aproximação para estimar os graus de liberdade efetivos e consequentemente o intervalo de abrangência do mensurando, principalmente quando as funções de medição são lineares, como será mostrado a seguir. A fórmula W–S é representada pela seguinte expressão:

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(c_i u(x_i))^4}{\nu_i} \tag{2.30}$$

A aplicação da Eq.(2.30) deve ser usada com muita atenção, visto que essa fórmula possui limitações quanto ao seu uso na estimativa dos ν_{eff} (BALLICO, 2000; LIU, 2005); além disso, em algumas funções de medição específicas, o uso da mesma pode ser inconsistente, conforme visto em WILLINK (2008).

Algumas hipóteses devem ser satisfeitas para a devida aplicação da Eq.(2.30), a saber: todas as grandezas de entrada e suas incertezas padrão devem ser mutuamente independentes, além disso, essas grandezas de entrada, assim como a grandeza de saída (mensurando), devem possuir comportamento gaussiano. Como conseqüência do Teorema Central do Limite (CLT) (BIPM *et al.*, 2008b, Anexo G cláusula G.2.1) a última suposição pode ser válida se cada estimativa x_i for uma média de diversos valores amostrados e, quão maior o número de amostras, melhor será essa aproximação (KIRKUP e FRENKEL, 2006). Contudo, a aplicação do CLT nem sempre pode ser satisfeita em um processo de medição, por exemplo, quando as funções de medição possuem não linearidades significativas, e quando o número de amostras n for pequeno ($1 < n < 5$). Além disso, a fórmula W–S foi desenvolvida numa abordagem frequencista (avaliação do Tipo A da incerteza padrão) e o GUM, além de usar essa abordagem, também utiliza a estatística bayesiana para a avaliação do Tipo B da incerteza padrão.

Através da abordagem frequencista, cada grandeza de entrada X_i da função de medição é avaliada de uma série de n_i medições independentes $X_{i,k}$, então cada estimativa x_i e sua incerteza padrão do Tipo A $u_{\text{A}}(x_i)$ possui $\nu_i = n_i - 1$ graus de liberdade.

Por outro lado, a avaliação do Tipo B da incerteza padrão determina uma PDF (*a priori*); o que intuitivamente, conduz assumir que os graus de liberdade tendem a infinito ($\nu_i \to \infty$) uma vez que o valor da incerteza padrão $u(x_i)$, resultante desse tipo de avaliação, é supostamente conhecido (BIPM *et al.*, 2008b, cláusula G.4.3). Porém, a depender da qualidade de informação utilizada para a estimativa da PDF *a priori*, os graus de liberdade ν_i não pode ser considerado como um valor demasiadamente grande (tendendo ao infinito). Ou seja, condições para obter informações sobre o processo de medição ou comportamento da variabilidade da grandeza analisada podem apresentar dificuldades na estimativa da PDF *a priori*, o que inviabiliza assumir $\nu_i = \infty$.

Uma alternativa para superar as dificuldades expostas anteriormente é apresentada no GUM (cláusula G.4.2), o qual propôs uma equação para estimar os graus de liberdade ν_i da incerteza padrão $u(x_i)$ de uma grandeza de entrada X_i:

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^2 \tag{2.31}$$

Através da Eq.(2.31) os graus de liberdade ν_i, provenientes de fontes de incerteza do Tipo B, são determinados com base na incerteza relativa de $u(x_i)$, i.e., $\Delta u(x_i)/u(x_i)$, cujos valores (0% a 100%) devem ser obtidos por um julgamento subjetivo das informações disponíveis sobre o processo de medição; e.g., se o conhecimento disponível sobre o processo de medição, usado na estimativa da grandeza de entrada x_i e sua incerteza padrão $u(x_i)$, garantem uma fonte confiável cerca de 50%, então a incerteza relativa deve ser igual $\Delta u(x_i)/u(x_i)$=0,5 e, assim, pela Eq.(2.31), ν_i= $(0{,}5)^{-2}/2 = 2$.

Outra forma similar à anterior foi apresentada por BENTLEY (2005), que propôs valores de graus de liberdade ν_i baseado na qualidade de informação disponível sobre o processo de medição; estes valores de ν_i encontram–se na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Valores de graus de liberdade ν_i para incerteza padrão do Tipo B de uma grandeza de entrada X_i.

Qualidade da fonte de informação	$\boldsymbol{\nu_i}$
Pouco confiável	3
Razoável	10
Boa	30
Excelente	100

Os valores de ν_i, apresentados na Tabela 2.1, podem ser indexados ao tipo de PDF obtida pelo conhecimento *a priori* (avaliação do Tipo B da incerteza). Como anteriormente exposto, a fórmula W–S exige uma distribuição gaussiana para as grandezas, dessa forma o tipo de PDF deve ser levado em consideração na escolha dos graus de liberdade. Ou seja, PDFs que possuem comportamentos diferente de uma gaussiana, e.g., distribuição do tipo exponencial ou em forma de U, devem possuir $\nu_i = 3$; por outro lado, caso a PDF seja uma t–Student ou até mesmo gaussiana, o valor de ν_i deve ser aquele oriundo de uma estimativa confiável, i.e., $\nu_i = 100$. Baseado nessa ideia, outros tipos de PDFs interligados a outras qualidades de informações são apresentados na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Valores de graus de liberdade ν_i para incerteza padrão do Tipo B de uma grandeza de entrada X_i relacionada com o tipo de PDF.

Tipo de PDF	$\boldsymbol{\nu_i}$
Exponencial ou em U	3
Uniforme	10
Triangular ou lognormal	30
Gaussiana ou t–Student	100

Apesar da fórmula W–S possuir limitações como descritas anteriormente, essa expressão é a maneira usual para estimar os graus de liberdade efetivos de $u_c(y)$. Um artigo escrito por LEPEK (2003) apresenta o uso da fórmula W–S incluindo termos de correlação entre as grandezas de entrada. Esta equação proposta por Lepek é representada da seguinte forma:

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(c_i u(x_i))^4}{\nu_i} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{c_i^2 c_j^2 u^2(x_i, x_j)}{\sqrt{\nu_i \nu_j}} \tag{2.32}$$

Outro trabalho, proposto por WILLINK (2007), apresenta um estudo detalhado sobre o uso adequado da fórmula W–S, assim como apresenta a evolução e o estado da arte da mesma em processos de medição.

Portanto, caso as premissas da fórmula W–S sejam atendidas, o fator de abrangência (k) pode ser estimado por valores tabelados de uma distribuição *t-Student* com os graus de liberdade efetivos (ν_{eff}) e probabilidade de abrangência p.

Entretanto, caso não seja possível o uso da fórmula W–S, devido às limitações impostas pela mesma, pode-se determinar o intervalo mínimo da incerteza expandida com base na probabilidade mínima de abrangência. Por exemplo, o uso da inequação de Bienaymé-Chebyshev, ver KACKER e JONES (2003), confirma que a probabilidade de abrangência p do intervalo do mensurando $[y \pm ku_c(y)]$ é $1 - 1/k^2$ para qualquer distribuição, se somente se a esperança da distribuição coincide com a estimativa do mensurando y e o desvio padrão da distribuição seja a incerteza padrão do mensurando $u_c(y)$. Então, nesse caso a probabilidade mínima de abrangência para um intervalo $[y \pm 2u_c(y)]$ será 75%.

Por outro lado, se qualquer distribuição simétrica e unimodal tem média e moda igual a y e desvio padrão igual a $u_c(y)$, então de acordo com a inequação de Gauss, ver KACKER e JONES (2003), a probabilidade de abrangência para um intervalo do mensurando $[y \pm ku_c(y)]$ é estimada por $1 - 4/(9k^2)$. Assim, para o caso de intervalo mínimo de abrangência $[y \pm 2u_c(y)]$, a probabilidade mínima de abrangência será 89%.

Portanto, o intervalo mínimo de abrangência $[y \pm 2u_c(u)]$ pode ser usado de maneira extensa para distribuições que possuem média igual a y e desvio padrão igual a $u_c(y)$. Esse procedimento pode ser incorporado ao método GUM sem maiores problemas e/ou conflitos, quando não for possível utilizar a fórmula W–S. Outra forma de estabelecer intervalos de abrangência é através do método GUM–S1 que, por sua vez, será apresentado na próxima seção. Os conceitos e as formulações delineadas na presente seção, sobre intervalos de abrangência (incerteza expandida), são aplicados em um estudo de caso da seção 2.3.

2.2 Suplemento 1 do GUM

Muitos méritos são creditados ao GUM devido à sua aplicabilidade quase universal para expressar e avaliar a incerteza de medição. Porém, o procedimento abordado pelo GUM contém limitações que deveriam ser levadas em consideração em certos modelos de medição. O próprio 'Working Group 1' do JCGM desenvolveu o Suplemento 1 do GUM (GUM–S1) para evitar essas limitações, além de garantir uma maior aplicabilidade ao método GUM. O método GUM–S1 fornece melhores resultados do que aqueles provenientes do GUM, especialmente quando as seguintes situações são apresentadas: função de medição fortemente não linear; PDFs das grandezas de entrada são assimétricas e não gaussianas; PDF do mensurando é simétrica e não gaussiana ou assimétrica.

A abordagem proposta pelo GUM–S1 é baseada na lei de propagação de PDFs; esta lei considera uma base probabilística generalizada para a avaliação da incerteza de medição por meio do uso direto de PDFs atribuídas às grandezas de entrada X_i ao invés do uso de suas estimativas x_i e suas respectivas incertezas padrão $u(x_i)$. Dessa forma, o método GUM–S1 é uma generalização do método GUM visto que a lei de propagação de incertezas, abordada pelo GUM, pode ser derivada da lei de propagação de PDFs (BIPM *et al.*, 2008c, Introdução). Os artigos encontrados na literatura que descreve o método GUM–S1 são: COX e HARRIS (2005); COX e SIEBERT (2006); HERRADOR *et al.* (2005); os artigos: COX *et al.* (2003); HERRADOR e GONZALEZ (2004); KACKER *et al.* (2006); KACKER e LAWRENCE (2007); WÜBBELER *et al.* (2008) apresentam um resumo do mesmo em suas seções.

2.2.1 A propagação de funções de densidade de probabilidade

O princípio básico da propagação de PDFs é obter uma PDF que engloba todas as informações possíveis sobre o mensurando Y baseada na PDF conjunta das grandezas de entrada X_i. As PDFs das grandezas de entrada X_i englobam o conhecimento obtido sobre os valores possíveis dessas grandezas. Aqui, os valores possíveis das grandezas de entrada X_i são simbolizadas por ξ_i, logo a PDF para a grandeza de entrada X_i é simbolizada por $g_{X_i}(\xi_i)$. Enquanto que os valores possíveis para Y e sua PDF são simbolizados por η e $g_Y(\eta)$, respectivamente.

A esperança de Y poderia ser obtida pela PDF conjunta das grandezas de entrada, através da função de medição Eq.(2.1), segundo a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] &= \mathrm{E}[f(X_1, \ldots, X_N)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \ldots, \xi_N) g_{X_1,\ldots,X_N}(\xi_1, \ldots, \xi_N) d\xi_1 \ldots d\xi_N
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

A Eq.(2.33) possui um termo $g_{X_1,\ldots,X_N}(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ que representa a PDF conjunta das grandezas de entrada. Caso as grandezas de entrada sejam mutuamente independentes, a PDF conjunta será o produtório das PDFs individuais dessas grandezas. Uma vez a PDF das grandezas de entrada tenha sido atribuída, essa é propagada através da função de medição para gerar a PDF do mensurando Y ($g_Y(\eta)$).

O formalismo analítico para a determinação da PDF $g_Y(\eta)$ será demonstrado subsequentemente neste trabalho. Inicialmente, considere a função delta de Dirac (ARFKEN e WEBER, 2005) definida por:

$$
\delta(z - a) \triangleq \begin{cases} \infty, & z = a \\ 0, & z \neq a \end{cases} \tag{2.34}
$$

Algumas propriedades úteis da função delta de Dirac devem ser apresentadas, tais como:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - a) dz = 1 \tag{2.35}
$$

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \delta(z - a) dz = f(a) \tag{2.36}
$$

A última propriedade (Eq.(2.36)) pode ser reescrita, considerando $f(z) = z$ por conveniência, como:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} z \delta(z - a) dz = a \tag{2.37}
$$

Então, caso as variáveis z e a forem substituídas pelas variáveis η e $f(\xi_1, \ldots, \xi_N)$, respectivamente, a Eq.(2.37) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \eta \delta(\eta - f(\xi_1, \ldots, \xi_N)) d\eta = f(\xi_1, \ldots, \xi_N) \tag{2.38}
$$

A substituição do termo $f(\xi_1, \ldots, \xi_N)$, dado pela Eq.(2.38), na Eq.(2.33) resultará em:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \delta(\eta - f(\xi_1, \ldots, \xi_N)) \\
&\quad \times g_{X_1,\ldots,X_N}(\xi_1, \ldots, \xi_N) d\xi_1 \ldots d\xi_N d\eta
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

Por outro lado, como a esperança de Y é definida por:

$$\mathrm{E}[Y] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \eta g_Y(\eta) d\eta \tag{2.40}$$

Então, igualando a Eq.(2.39) com a Eq.(2.40), isso resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta g_Y(\eta) d\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \delta(\eta - f(\xi_1, \ldots, \xi_N)) \\ &\quad \times g_{X_1,\ldots,X_N}(\xi_1, \ldots, \xi_N) d\xi_1 \ldots d\xi_N d\eta \end{aligned} \tag{2.41}$$

Portanto, comparando ambos os lados da Eq.(2.41), conclui-se que a PDF para a grandeza de saída Y pode ser obtida por:

$$\begin{aligned} g_Y(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta - f(\xi_1, \ldots, \xi_N)) \\ &\quad \times g_{X_1,\ldots,X_N}(\xi_1, \ldots, \xi_N) d\xi_1 \ldots d\xi_N \end{aligned} \tag{2.42}$$

A Eq.(2.42) é conhecida como fórmula de Markov e uma generalização dessa fórmula pode ser obtida para mais de uma grandeza de saída (múltiplos mensurandos), como será visto mais adiante no capítulo 4. Porém, o GUM–S1 considera uma única grandeza de saída (BIPM *et al.*, 2008c, Introdução) para a função de medição. Se as grandezas de entrada forem mutuamente independentes, então a PDF conjunta é expressa por $g_{X_1}(\xi_1) \ldots g_{X_i}(\xi_N)$. Dessa forma, a Eq.(2.42) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_Y(\eta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta - f(\xi_1, \ldots, \xi_N)) \\ &\quad \times g_{X_1}(\xi_1) \ldots g_{X_N}(\xi_N) d\xi_1 \ldots d\xi_N \end{aligned} \tag{2.43}$$

Uma vez a PDF da grandeza de saída está disponível, o resultado de medição será igual a esperança dessa PDF, enquanto que o desvio padrão da mesma será a incerteza padrão associada ao resultado de medição. O conhecimento da PDF do mensurando também pode fornecer um intervalo de abrangência associado a esse resultado de medição, para uma dada probabilidade de abrangência p conforme será mostrado mais adiante na seção 2.2.3 desse trabalho. Na Figura 2.2 é ilustrado o princípio da propagação de PDFs numa situação em que N grandezas de entrada X_i mutuamente independentes compõem a função de medição.

Como pode ser observado na Figura 2.2, o conhecimento dos valores possíveis ξ_i das grandezas de entrada X_i, expressados por suas PDFs, origina uma PDF $g_Y(\eta)$

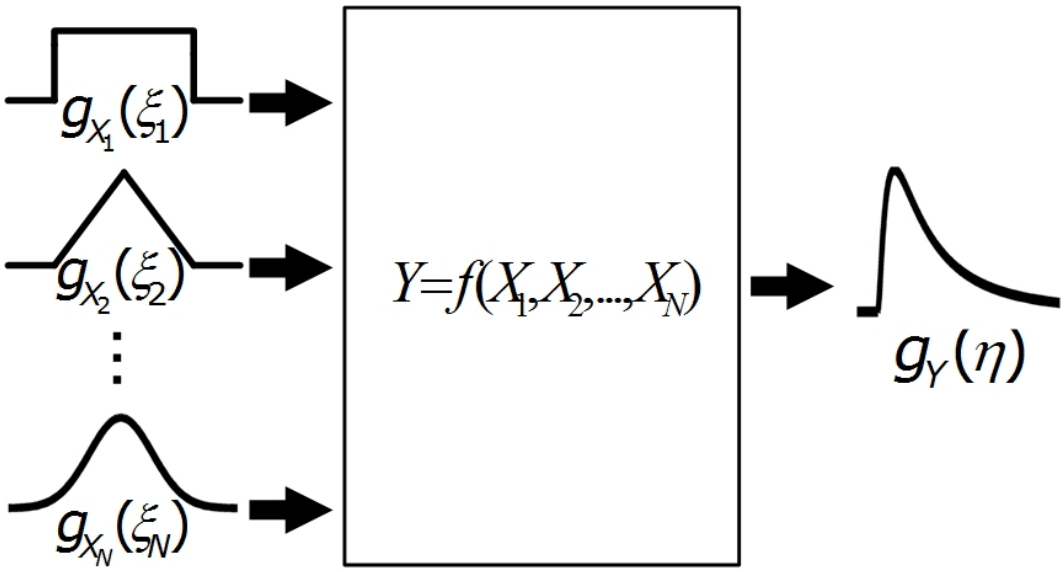

Figura 2.2: Ilustração do princípio da lei de propagação de PDFs aplicado em uma função de medição.

para o mensurando Y por meio da fórmula de Markov. Entretanto, a PDF do mensurando Y proveniente da solução analítica das Eq.(2.42) ou Eq.(2.43) é viável apenas para funções de medição simples. O artigo escrito por COX e SIEBERT (2006) apresenta exemplos de soluções analíticas da fórmula de Markov para um modelo composto por apenas uma grandeza de entrada; o trabalho proposto por ELSTER (2007) apresenta também uma solução analítica para um modelo linear submetido a uma PDF gaussiana conjunta; outros exemplos de PDF obtidas analiticamente em processos de medição podem ser consultados em LIRA (2002, 2009). Devido à impossibilidade de solução analítica da fórmula de Markov na maioria das funções de medição, um procedimento numérico deve ser usado para solucionar as expressões Eq.(2.42) ou Eq.(2.43). O método numérico recomendado pelo GUM–S1 será descrito na próxima seção deste trabalho.

2.2.2 Cálculos numéricos pelo método de Monte Carlo

A implementação geral mais eficiente do método numérico para propagação de PDFs é método de Monte Carlo (MCM) (COX *et al.*, 2001a,b; LEPEK, 2003). O método de Monte Carlo é um procedimento numérico para resolver problemas matemáticos através de simulações de variáveis aleatórias (HERRADOR e GONZALEZ, 2004). Alguns livros descrevem aplicações desse método: LANDAU e BINDER (2000); MARTINEZ e MARTINEZ (2002); RUBINSTEIN (1981); SIEPMANN *et al.* (1999).

A idéia básica do MCM, para a avaliação da incerteza de medição, é retirar M amostras da PDF conjunta $g_{X_1,\ldots,X_N}(\xi_1,\ldots,\xi_N)$ das grandezas de entrada

$X_1, \ldots, X_N$ e propagar esses valores, através da função de medição, para produzir M amostras da grandeza de saída (Y). Dessa forma, é construída uma PDF empírica ou amostral para Y, a qual representa uma estimativa da PDF do mensurando $g_Y(\eta)$. Portanto, o resultado de medição (y) é obtido pela média dessa PDF amostral e a incerteza padrão ($u(y)$) associada ao resultado de medição é igual ao desvio padrão da mesma PDF amostral. Além disso, o intervalo de abrangência dessa PDF amostral é determinado com base na probabilidade de abrangência escolhida.

O MCM produz resultados tão bons, para a construção da PDF amostral do mensurando, quanto maior for o número de amostras de Monte Carlo (M), visto que para um número M finito de resultados existe um erro aleatório e, portanto, o valor de M deve ser escolhido suficientemente grande para assegurar que esse erro seja suficientemente pequeno (BIPM *et al.*, 2008c; COX e SIEBERT, 2006). Desta maneira, quando M tende a infinito, esses resultados convergem para valores correspondentes aos obtidos da PDF $g_Y(\eta)$ (ELSTER, 2007).

Um requisito fundamental para devida aplicação do MCM é o gerador de números aleatórios. Os valores de qualquer variável aleatória podem ser simulados baseando–se na transformação de uma variável aleatória retangular, uniformemente distribuída dentro do intervalo $(0, 1)$. A melhor maneira de gerar números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $(0, 1)$ é por meio de um processo determinístico baseado no método de congruência (HERRADOR *et al.*, 2005). Como a técnica usada é determinística, os números aleatórios são chamados de números pseudo–aleatórios (ζ_k). No entanto, esses números pseudo–aleatórios têm um comportamento de números aleatórios (SCHEID, 1968). Logo, com o conhecimento desses ζ_k, pode–se determinar valores ξ_i^k, cuja variável aleatória é Z_i e sua respectiva PDF é $g(Z_i)$, dentro do intervalo (a, b) através da solução da equação integral (HERRADOR e GONZALEZ, 2004):

$$\int_a^{\xi_i^k} g(Z_i) dZ_i = \zeta_i^k \tag{2.44}$$

Os cálculos dos valores ξ_i^k, de acordo com Eq.(2.44), são rapidamente executados com a ajuda de computadores de alta velocidade através de uma rotina implementada para diferentes linguagens de programação como: FORTRAN, C, C^{++}, entre outras; e para softwares comerciais como: MATLAB, Maple, Mathematica ou até tomar os códigos disponíveis em FORTRAN e C (PRESS *et al.*, 1992a,b); outros pacotes de softwares comerciais também podem ser usados no MCM, como mostrado em HERRADOR e GONZALEZ (2004); HERRADOR *et al.* (2005). No artigo de ESWARD *et al.* (2007) são apresentadas diversas referências sobre geradores de números aleatórios, como também testes de robustez, publicamente disponíveis, sobre os mesmos.

2.2.3 A avaliação da incerteza de medição

O método GUM–S1 fornece uma PDF amostral $\hat{g}_Y(\eta)$ para o mensurando Y. Os valores simulados ξ_i^k (Eq.(2.44)) de cada grandeza de entrada X_i são usados para calcular os valores η^k da grandeza de saída por meio da função de medição:

$$\eta^k = f(\xi_1^k, \ldots, \xi_N^k,) \quad k = 1 \quad \text{a} \quad M \tag{2.45}$$

O conhecimento dos valores possíveis do mensurando $\eta^1, \ldots, \eta^M$ implica, necessariamente, na construção de $\hat{g}_Y(\eta)$. Como anteriormente apontado na seção anterior, quanto maior for o valor de M, essa PDF amostral representa uma boa estimativa da PDF $g_Y(\eta)$ do mensurando Y. Logo, a melhor estimativa y do mensurando Y pode ser estimada pela média dessa PDF amostral e a incerteza padrão $u(y)$ associada à estimativa y será o desvio padrão dessa mesma PDF. As equações de y e $u(y)$ são representadas da seguinte forma:

$$y = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \eta^k \tag{2.46}$$

$$u(y) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M} (\eta^k - y)^2} \tag{2.47}$$

.

Outra etapa do método GUM–S1 é determinar o intervalo de abrangência para a estimativa y do mensurando Y, aqui denotado por $I_p = [\eta_p^{\text{inf}}, \eta_p^{\text{sup}}]$. Uma vez que a probabilidade de abrangência p $(0 < p < 1)$ é escolhida, um intervalo de abrangência pode ser estimado através da função de distribuição acumulada (CDF)[7] empírica do mensurando Y $(\hat{G}_Y(\eta))$.

O GUM–S1 discute duas formas para obter o I_p: na primeira forma, o intervalo de abrangência é suposto simétrico e pode ser estimado como $I_p = [\eta_p^{\alpha/2}, \eta_p^{100-\alpha/2}]$, em que $\alpha = (100 - p)\%$, e os valores $\eta_p^{\alpha/2}$ e $\eta_p^{100-\alpha/2}$ correspondem aos percentis de $\alpha/2$ e $(100 - \alpha/2)$ de $\hat{G}_Y(\eta)$ para uma dada probabilidade de abrangência p, e.g., se a propbabilidade de abrangência p for escolhida igual a 95%, então o intervalo de abrangência é representado por $I_{95\%} = [\eta_{95\%}^{2,5\%}, \eta_{95\%}^{97,5\%}]$; a segunda forma, e a mais recomendada, para obter o intervalo de abrangência é baseada no intervalo de menor largura possível entre os valores extremos do intervalo. Os valores extremos η_p^{inf} e η_p^{sup} são estimados pela solução da equação:

$$p = \hat{G}_Y(\eta_p^{\text{sup}}) - \hat{G}_Y(\eta_p^{\text{inf}}) \tag{2.48}$$

[7] A CDF de qualquer variável aleatória contínua Z é obtida pela integral de sua correspondente PDF, i.e., $G(Z) = \int_{-\infty}^{Z} g(Z)dz$.

Trabalhos mais abrangentes e descritivos sobre estimativas de intervalos de abrangência usando MCM podem ser consultados em NERY e KALID (2009); WILLINK (2006b). Uma particularidade envolvida na estimativa de intervalos de abrangência surge quando a PDF $\hat{g}_Y(\eta)$ é simétrica, pois nesse caso o I_p é simétrico em relação à estimativa y, i.e., $y - \eta_p^{\text{inf}} = \eta_p^{\text{sup}} - y$. Logo, a incerteza expandida $U(y)$ pode ser estimada como $U(y) = (\eta_p^{\text{inf}} + \eta_p^{\text{sup}})/2$.

2.3 Estudo de caso

Para um melhor entendimento da avaliação da incerteza de medição usando os métodos GUM e GUM–S1, um estudo de caso será apresentado. Uma análise comparativa dos resultados provenientes de ambos os métodos também será esboçada.

O objeto de estudo apresentado nesta seção focaliza um tipo de função de medição não linear bastante comum nos diversos campos da ciência, tais como: engenharia e física. Essa função é representada pela seguinte relação funcional:

$$Y = \exp(X) \tag{2.49}$$

A avaliação da incerteza de medição pelo método GUM requer o estabelecimento da função de medição (neste caso Eq.(2.49)), depois deve ser analisada a função metrológica das grandezas de entrada, que neste caso é a única grandeza X. Hipoteticamente serão consideradas para a função metrológica da grandeza de entrada X: a correção sistemática (C) e a resolução (R) da escala do sistema de medição. Na prática, a informação para avaliar a incerteza associada à correção sistemática deve ser obtida de um certificado de calibração do sistema de medição; enquanto que a resolução da escala do sistema de medição é obtida no indicador do instrumento. A função metrológica da grandeza X, baseada na Eq.(2.14), é expressa por:

$$X = Q + R + C \tag{2.50}$$

Como exposto na seção 2.1.1, a função metrológica é composta de dois tipos de incerteza: a incerteza padrão do Tipo A e do Tipo B. A incerteza padrão do Tipo A está associada ao termo Q (série observações Q_k da grandeza de entrada X) da função metrológica (Eq.(2.50)). Neste estudo de caso, foram realizadas 30 medições independentes (Q_k) da grandeza de entrada X, cuja estimativa é $\bar{Q} = q =$ 1,8, em unidades de X (aqui representado por u.X) e incerteza padrão do Tipo A igual a $u_{\text{A}}(q) =$ 0,6 u.X. As fontes de incerteza *a priori* (incerteza do Tipo B) foram avaliadas a partir da correção sistemática e da resolução da escala do instrumento de medição. A estimativa da correção sistemática do instrumento é $c =$ 0,4 u.X, cuja incerteza padrão é igual a $u_{\text{B}}(c) =$ 0,2 u.X, enquanto que a resolução da escala do

instrumento de medição possui estimativa $r = 0$ u.X e incerteza padrão, estimada pela Eq.(2.10), igual a $u_{\mathrm{B}}(r) = 0{,}1$ u.X.

O conhecimento das informações provenientes das variáveis que compõem a função metrológica (série de observações independentes (Q_k), correção sistemática (C) e resolução da escala do instrumento de medição (R)), possibilita determinar a melhor estimativa (x) e a incerteza padrão ($u(x)$) da grandeza de entrada X, as quais são determinadas pelas Eqs.(2.15–2.16) respectivamente, cujos valores são iguais a $x = 2{,}2$ u.X e $u(x) = 0{,}6$ u.X.

Como as informações sobre a grandeza de entrada X (estimativa x e sua incerteza padrão $u(x)$) estão disponíveis, pode–se determinar o resultado de medição (y) e as respectivas incerteza padrão combinada ($u_c(y)$) e expandida ($U(y)$) do mensurando Y. A melhor estimativa (resultado de medição) do mensurando Y deve ser obtido pela aplicação da Eq.(2.19), enquanto que a incerteza padrão combinada é calculada pela Eq.(2.24) e a incerteza expandida ($U(y)$) é obtida pela Eq.(2.29), após aplicação da Eq.(2.30) para estimativa dos graus de liberdade pela fórmula W–S.

Para determinação do fator de abrangência k foram adotadas as duas probabilidades mínimas de abrangência propostas pelas inequações de Bienaymé–Chebyshev ($p = 75\%$) e Gauss ($p = 89\%$), respectivamente (ver seção 2.1.3), e também a probabilidade de abrangência $p = 95\%$. Os graus de liberdade da série de observações Q_k da grandeza de entrada X é $\nu_Q = 29$ (incerteza do Tipo A), enquanto que os graus de liberdade provenientes das incertezas do Tipo B não serão atribuídos valores demasiadamente grandes ($\nu_i = \infty$); pelo contrário os valores dos graus de liberdade para correção sistemática e resolução da escala do instrumento de medição são obtidos segundo os critérios proposto por BENTLEY (2005), i.e., os graus de liberdade devem ser inferidos com base na qualidade das fontes de informações do processo de medição. No presente estudo de caso, é garantido que a correção sistemática possui uma PDF gaussiana e a resolução da escala do instrumento de medição tem uma PDF uniforme; dessa maneira, os valores de graus de liberdade associados a essas grandezas, de acordo com a Tabela 2.1, são iguais a $\nu_C = 100$ e $\nu_R = 3$, respectivamente, pois como sabidademente a PDF da resolução da escala do instrumento de medição não é gaussiana, portanto ao aplicar a fórmula de W–S, que requer um comportamento gaussiano para as grandezas, há que penalizar essa evidente contradição.

Para aplicação do método GUM–S1 foi atribuída uma PDF gaussiana à grandeza de entrada X, com média igual à estimativa x e desvio padrão igual a incerteza padrão $u(x)$ proveniente do método GUM. Uma das etapas fundamentais para aplicação do método GUM–S1 consiste em determinar a escolha adequada do número de amostras de Monte Carlo (M). Essa escolha deve ser realizada mediante uma análise de sensibilidade do MCM sobre a função de medição; essa análise de sensibilidade

realiza um número crescente de amostras de Monte Carlo, até que o resultado de interesse (e.g., incerteza padrão do mensurando $u(y)$) tenha estabilizado seu valor. A estabilização (ou critério de parada) da análise de sensibilidade deve ser atingida quando a tolerância numérica associada à incerteza padrão $u(y)$ é satisfeita; esse procedimento é detalhado em (BIPM *et al.*, 2008c, cláusulas 7.9.2 a 7.9.4).

Os requisitos necessários para a aplicação da análise de sensibilidade proposta no GUM–S1 são: a estimativa inicial de M e o número de algarismos significativos requerido para a incerteza padrão, os quais podem ser 1 (um) ou 2 (dois) algarismos.

Neste estudo de caso foram considerados dois algarismos significativos para $u(y)$, enquanto que a estimativa inicial das amostras de Monte Carlo foi $M = 10^5$. Para aplicação do MCM foi utilizado um PC operando com as seguintes características: 2.10 GHz de frequência, um processador Core 2 duo e 3 GB de memória RAM. Além disso, a presente análise foi programada em linguagem interpretada do software comercial MATLAB (versão 7.8) no sistema operacional LINUX, cuja distribuição era Ubuntu 9.04. A aplicação da análise de sensibilidade, neste estudo de caso, forneceu um valor de $M = 2 \times 10^5$ a ser adotado no método GUM–S1.

Os valores para o resultado de medição, a incerteza padrão e os respectivos desvios percentuais, obtidos pelos métodos GUM e GUM–S1, são mostrados na Tabela 2.3. Os desvios percentuais referentes ao resultado de medição e sua incerteza padrão foram calculados com base nos resultados provenientes do método não linear (método de referência) GUM–S1.

As Figuras 2.3, 2.4 e 2.5 apresentam a PDF resultante (empírica) do mensurando Y, obtida pelo método GUM–S1 usando $M = 2 \times 10^5$ amostras de Monte Carlo. Contudo, em cada uma dessas figuras os intervalos de abrangência são estimados para as probabilidades de abrangência $p = 75\%$, $p = 89\%$ e $p = 95\%$, respectivamente.

Na Figura 2.3 são apresentados os resultados dos intervalos de abrangência estimados pelos métodos GUM, GUM–S1 e Bienaymé–Chebyshev; enquanto que a Figura 2.4 mostra os resultados provenientes dos métodos GUM, GUM–S1 e Gauss. As hipóteses para aplicação dos métodos Bienaymé–Chebyshev e Gauss foram discutidas na seção 2.1.3 do presente trabalho. A Figura 2.5 apresenta os resultados

Tabela 2.3: Comparação dos resultados provenientes dos métodos GUM e GUM–S1 para o mensurando $Y = \exp(X)$.

Resultados	**GUM**	**GUM–S1**	**desvio percentual (%)**
Estimativa y (u.Y)	8,9	10,7	-16,8
Incerteza padrão $u(y)$ (u.Y)	5,4	7,0	-23,9

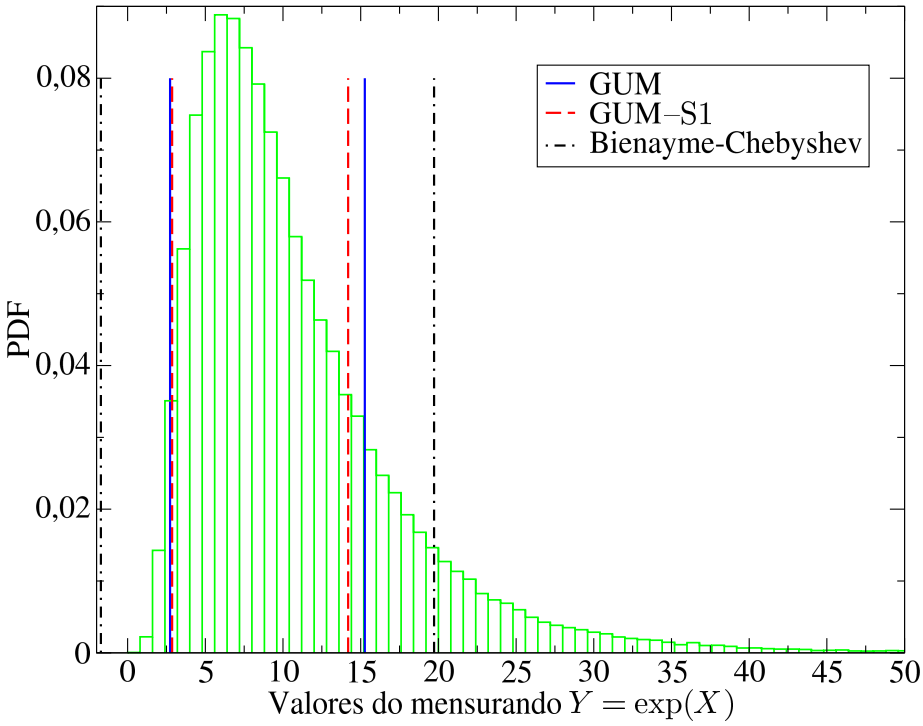

Figura 2.3: PDF gerada pelo MCM para o mensurando $Y = \exp(X)$. As linhas verticais indicam os intervalos de abrangência ($p = 75\%$) determinados pelos métodos GUM, GUM–S1 e Bienaymé–Chebyshev.

dos intervalos de abrangência oriundos somente dos métodos GUM e GUM–S1.

Os valores dos intervalos de abrangência (limites inferiores e superiores) do mensurando Y, determinados pelos métodos supracitados, são apresentados nas Tabelas 2.4, 2.5 e 2.6 segundo a probabilidade de abrangência utilizada, respectivamente.

Tabela 2.4: Comparação dos intervalos de abrangência ($p = 75\%$) provenientes dos métodos GUM, GUM–S1 e Bienaymé–Chebyshev para o mensurando $Y = \exp(X)$.

Resultados	**GUM**	**Bienaymé–Chebyshev**	**GUM–S1**
Limite inferior η^{inf} (u.Y)	2,7	-1,7	2,9
Limite superior η^{sup} (u.Y)	15,3	14,2	19,7

Tabela 2.5: Comparação dos intervalos de abrangência ($p = 89\%$) provenientes dos métodos GUM, GUM–S1 e Gauss para o mensurando $Y = \exp(X)$.

Resultados	**GUM**	**Gauss**	**GUM–S1**
Limite inferior η^{inf} (u.Y)	0,2	-1,7	2,1
Limite superior η^{sup} (u.Y)	17,8	19,2	19,7

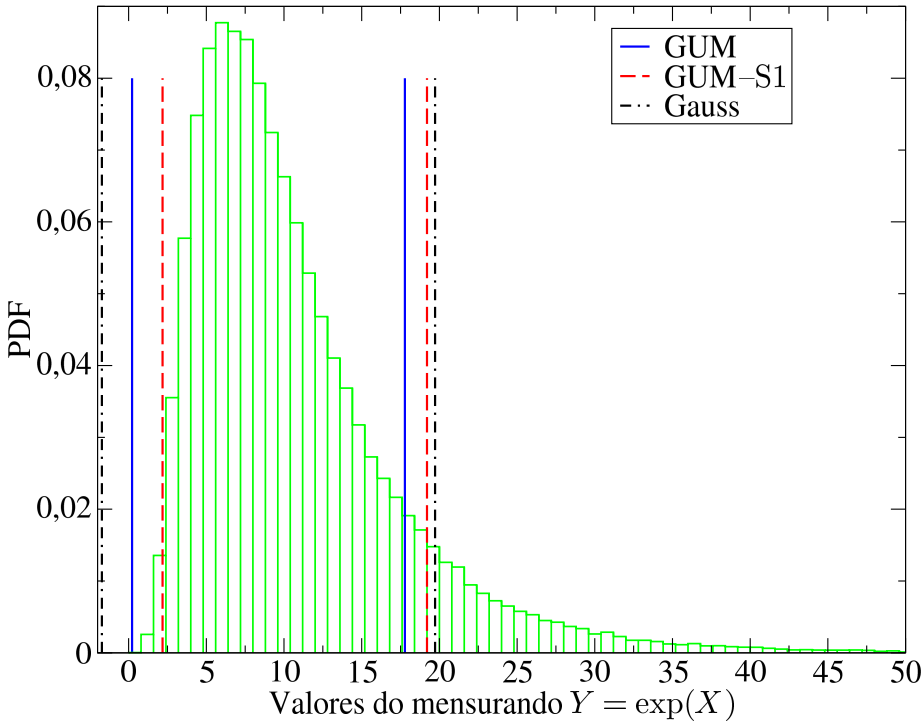

Figura 2.4: PDF gerada pelo MCM para o mensurando $Y = \exp(X)$. As linhas verticais indicam os intervalos de abrangência ($p = 89\%$) determinados pelos métodos GUM, GUM–S1 e Gauss.

Tabela 2.6: Comparação dos intervalos de abrangência ($p = 95\%$) provenientes dos métodos GUM e GUM–S1 para o mensurando $Y = \exp(X)$.

Resultados	**GUM**	**GUM–S1**
Limite inferior η^{inf} (u.Y)	-1,9	1,6
Limite superior η^{sup} (u.Y)	19,9	24,3

O fato da PDF (empírica) do mensurando Y ser assimétrica, a qual neste estudo de caso aproxima–se de uma distribuição de Rayleigh, implica em uma diferença razoável dos intervalos de abrangência obtidos via ao método GUM–S1 daqueles provenientes do método linear (GUM) e dos métodos Bienaymé–Chebyshev e Gauss, os quais consideram que o mensurando tem intervalo de abrangência simétrico e uma distribuição gaussiana. Para cada probabilidade de abrangência considerada, os métodos GUM, Bienaymé–Chebyshev ou Gauss forneceram valores negativos para o limite inferior do mensurando; tais valores (negativos) são fisicamente incoerentes, o que reforça o uso do método GUM–S1 quando a PDF do mensurando for assimétrica.

Em termos de estimativa do mensurando e de sua incerteza padrão associada, a diferença entre os métodos GUM–S1 e GUM também foi significativa. Essas discrepâncias são explanadas pela não linearidade da função de medição do mensurando;

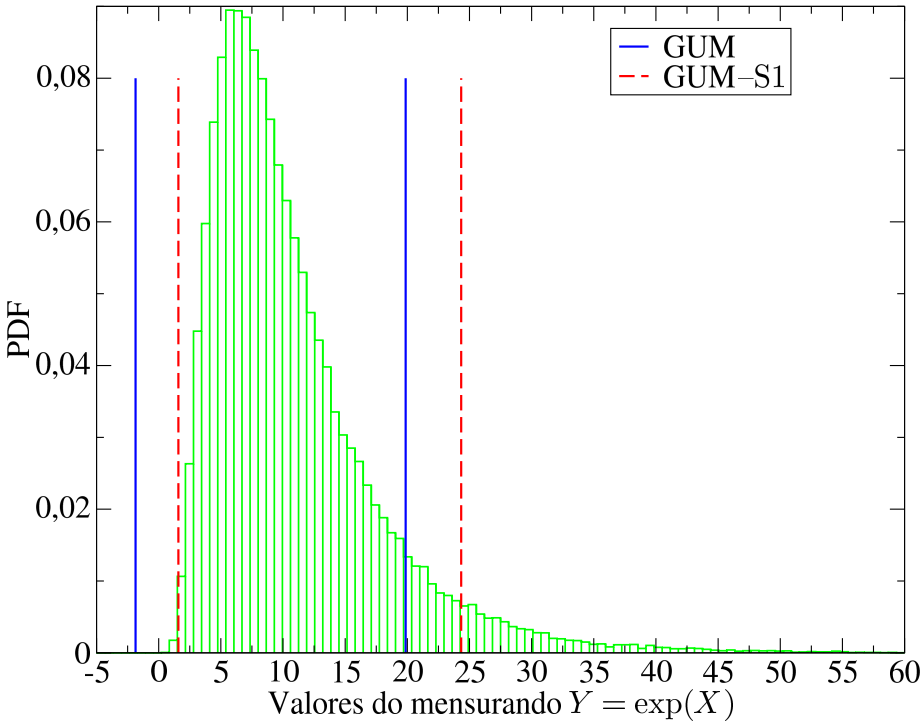

Figura 2.5: PDF gerada pelo MCM para o mensurando $Y = \exp(X)$. As linhas verticais indicam os intervalos de abrangência ($p = 95\%$) determinados pelos métodos GUM e GUM–S1.

além disso, neste estudo de caso específico a larga incerteza relativa da grandeza de entrada contribuiu também para tal discrepância. Logo, quando a não linearidade da função de medição for significativa, o método proposto pelo GUM não é adequado para avaliar a incerteza de medição. Dessa forma, o método GUM–S1 pode ser aplicado nos casos em que as hipóteses requeridas pelo método GUM não podem ser satisfeitas. Contudo, a aplicação do Suplemento 1 do GUM requer um esforço computacional significativo em relação ao método GUM.

Portanto, a partir das características dos métodos GUM e GUM–S1, métodos que sejam robustos e que exijam menores custos computacionais devem ser desenvolvidos. Um exemplo de método robusto seria utilizar os termos de ordens superiores da expansão em série de Taylor da função de medição para avaliar a incerteza de medição, através da LPU, de sistemas não lineares. No capítulo 3 são apresentadas expressões generalizadas de segunda e terceira ordem para avaliar a incerteza de medição como alternativa aos métodos GUM e GUM–S1.

2.4 Considerações finais

Neste capítulo foi apresentada uma revisão sobre os dois métodos mais utilizados para a avaliação da incerteza de medição: o GUM, baseado na lei de propagação

de incertezas; e o Suplemento 1 do GUM, baseado na lei de propagação de PDFs através do MCM. Além disso, foram apresentados os principais artigos que demonstram as ferramentas matemáticas de cada método e suas aplicações para avaliar adequadamente o resultado de medição e sua respectiva incerteza.

Cada um dos métodos tem sua relevância no que se refere à aplicabilidade da avaliação da incerteza de medição. Logo, é importante destacar os méritos e as limitações de cada um desses métodos. Os principais méritos do GUM são: não necessidade do conhecimento completo da PDF das grandezas de entrada do modelo de medição; esse método requer apenas as estimativas, as incertezas padrão e os coeficientes de correlação da PDF das grandezas de entrada para determinar a melhor estimativa do mensurando e sua respectiva incerteza padrão. Além disso, esse método requer simples cálculos para a avaliação da incerteza de medição, que torna-o como o método mais aceito pelos metrologistas ou profissionais que necessitam expressar adequadamente o resultado de uma medição.

Por outro lado, depois de apresentar os méritos do método proposto pelo GUM, é importante ressaltar que esse método possui restrições quanto ao seu uso: primeiro, se a função de medição é não linear, a expansão em série de Taylor truncada no termo linear (1ª derivada) fornece resultados enganosos ou errôneos para a incerteza de padrão combinada e consequentemente a incerteza expandida do mensurando; segundo, o fato de não determinar uma PDF ao mensurando implica em uma indeterminação do intervalo de abrangência para expressar os valores possíveis do mensurando; por último, a estimativa da incerteza expandida requer um comportamento gaussiano tanto do mensurando Y e sua incerteza padrão combinada $u_c(y)$ quanto das grandezas de entrada X_i e suas respectivas incertezas padrão $u(x_i)$, além disso as grandezas de entrada X_i também devem ser mutuamente independentes.

A hipótese do comportamento gaussiano para as grandezas do modelo de medição é bastante usada e defendida com base na aplicação do CLT. Entretanto, o CLT não é válido sob os seguintes aspectos: quando a função de medição é não linear, quando as grandezas de entrada não são independentes, e quando o número de observações independentes (medições experimentais) das grandezas observáveis do modelo de medição é pequeno[8].

O método proposto pelo Suplemento 1 do GUM requer menos hipóteses do que aquele método proposto pelo GUM, logo sua aplicação é menos restritiva. As principais vantagens do método GUM–S1 são: geração de uma PDF para o mensurando, a qual permite a determinação do intervalo de abrangência, variância, desvio padrão, média, moda, assimetria, curtose e outros parâmetros estatísticos do mensurando; segundo, não existem limitações no que tange à natureza não linear da função de medição, diferente do método GUM que requer uma aproximação linear de função de

[8]O nº mínimo de medições independentes deveria ser 30 para validar o CLT (GODEC, 1997).

medição pela série de Taylor; terceiro, não existem suposições referentes à distribuição do mensurando, i.e., a PDF do mensurando pode ser simétrica e não gaussiana ou assimétrica (no método GUM supõe-se que a distribuição do mensurando deve se aproximar de uma gaussiana, uma vez que esta hipótese é necessária para estimar o intervalo de abrangência baseado na distribuição *t-Student*); quarto, não requer o cálculo do número de graus liberdade efetivos (que incluiria uma hipótese de que o mensurando tem uma distribuição de freqüência de *t-Student*) pela Eq.(2.30) ou Eq.(2.32); finalmente, não é necessário calcular derivadas parciais para a avaliação da incerteza de medição, embora, quando necessário, esse método apresente um procedimento numérico para determinar os coeficientes de sensibilidade (BIPM *et al.*, 2008c, Anexo B).

Porém, o método GUM–S1 também possui limitações. Primeiramente, a seleção da PDF apropriada para as grandezas de entrada pode ser difícil por causa de dados imprecisos ou falta de conhecimento dos processos físicos e/ou químicos que influenciam diretamente um processo de medição (WILLINK, 2010). Outra dificuldade encontrada por esse método surge quando necessita-se da geração de números aleatórios de PDFs conjuntas não gaussianas, pois os sistemas computacionais (softwares) possuem geradores de números aleatórios somente para PDF gaussiana multivariada. Uma alternativa a essa problemática é uso de funções cópulas, as quais são usadas na estatística como um método geral para formular quaisquer distribuições multivariadas de maneira que diversos tipos gerais de dependência possam ser representados; uma aplicação prática das funções cópulas para a avaliação da incerteza de medição é apresentada por POSSOLO (2010). Por fim, em alguns casos o tempo de processamento (custo computacional) do método GUM–S1 pode ser muito longo, e.g., em modelos de medição complexos com muitas grandezas de entrada ou modelos de medição fortemente não lineares.

Baseado na explanação sobre os méritos e as limitações do GUM e seu Suplemento 1, bem como nos resultados apresentados nos estudos de caso, pode-se concluir que o GUM apresenta uma avaliação robusta para a incerteza de medição, principalmente quando as funções de medição são lineares ou fracamente não lineares. Por outro lado, o Suplemento 1 do GUM pode ser considerado como uma ferramenta confiável e consistente na avaliação da incerteza de medição em situações onde as condições de aplicabilidade do GUM não estão completamente atendidas. Portanto, o método GUM–S1 deve sempre ser usado quando a não linearidade das funções de medição forem significativas, quando a independência entre as grandezas de entrada não for assegurada, e quando as PDFs das grandezas tanto de entrada quanto de saída forem assimétricas.

Capítulo 3

Métodos de segunda e terceira ordem para a avaliação da incerteza de medição

"O que se mede existe e é conhecido na proporção em que a medida é precisa."

Filósofo Gaston Bachelard

O método proposto pelo GUM é baseado em uma aproximação linear da função de medição por meio da expansão em série de Taylor truncada na 1ª derivada. Contudo, quando a função de medição é fortemente não linear, o uso dessa aproximação é inadequada. Logo, termos de ordens superiores provenientes da série de Taylor não podem ser negligenciados. Este capítulo apresenta expressões generalizadas para a avaliação da incerteza padrão de medição, baseadas na expansão em série de Taylor até as derivadas de segunda e terceira ordem. Resultados bem próximos daqueles provenientes do método não linear (GUM–S1) são alcançados por essas expressões a um baixo custo computacional. Portanto, os métodos propostos de segunda e terceira ordem podem ser úteis para a análise de incerteza de medição em modelos não lineares. O ineditismo do tema abordado no presente capítulo foi determinante para elaboração de um trabalho de relevância internacional (MARTINS e KALID, 2010a).

3.1 Introdução

No capítulo 2 foi demonstrado que o método GUM utiliza um procedimento linear, baseado na expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem da função de medição, para expressar a melhor estimativa do mensurando e sua respectiva incerteza padrão. Em muitos casos práticos, esse procedimento de primeira ordem é suficiente para caracterizar a incerteza padrão até mesmo em modelos de medição (fracamente) não lineares.

No que tange ao cálculo da melhor estimativa do mensurando, o próprio GUM recomenda um procedimento diferente quando a função de medição é não linear (BIPM *et al.*, 2008a, cláusula 4.1.4), i.e., ao invés de substituir as estimativas das grandezas de entrada diretamente na função (estimativa linear), deve-se obter as observações independentes do mensurando a partir das observações das grandezas de entrada previamente utilizadas na função, e assim calcular a média dessas observações (estimativa não linear). Entretanto, a incerteza padrão (combinada) de medição, associada a essa estimativa do mensurando, é baseada em um método linear ou de primeira ordem. Existem modelos de medição, contudo, em que a não linearidade é significativa, dessa maneira o uso da aproximação linear para a avaliação da incerteza de medição do mensurando é incorreto, o que implica no uso dos termos de ordens superiores da expansão em série de Taylor da função de medição.

Os termos de ordens superiores podem exibir muitas propriedades desejáveis em um processo de medição, entre estas destacam–se: caracterização e detecção de não linearidades de sistemas de medição. Um esquema conceitual para ilustrar os efeitos de altas ordens em processo de avaliação da incerteza de medição é apresentado na Figura 3.1; na qual são esboçadas comportamentos da incerteza padrão de medição em função do resultado de medição (estimativa) do mensurando.

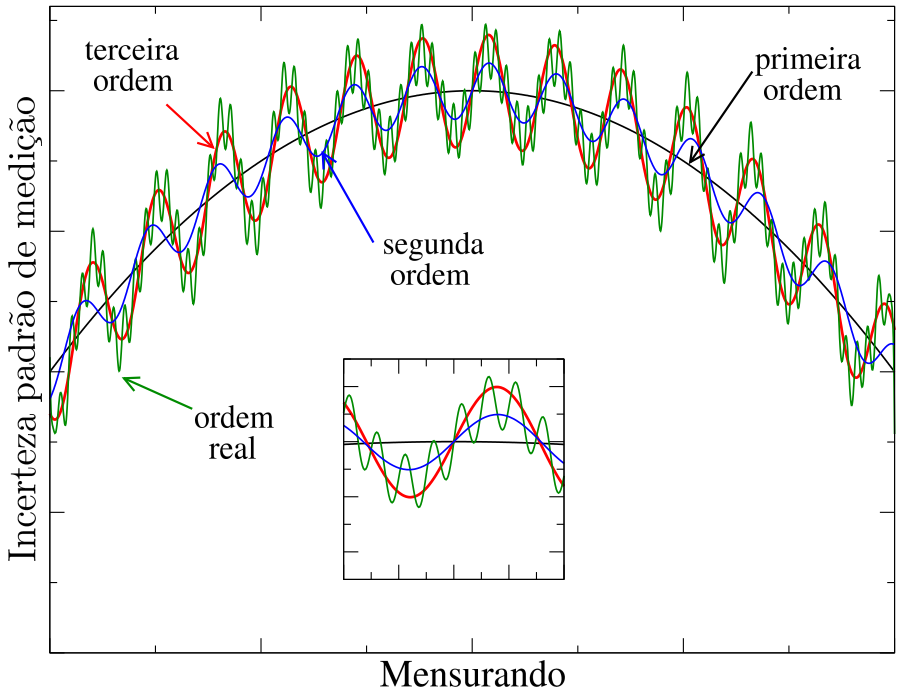

Figura 3.1: Esquema conceitual para demonstrar os efeitos de ordens superiores em um processo de medição.

Como pode ser observado na Figura 3.1, um aumento da ordem, por meio da expansão em série de Taylor da função de medição e posterior aplicação do procedi-

mento LPU, na expressão da incerteza padrão tende a aproximar-se cada vez mais da ordem exata da incerteza padrão real[1]. Ou seja, o método de segunda ordem para avaliar a incerteza padrão é mais abrangente do que o método de primeira ordem, assim como o método de terceira ordem engloba o de segunda ordem e assim por diante, até que se reproduza completamente a não linearidade da função de medição.

Em diversos campos da ciência e tecnologia, como por exemplo, nanotecnologia e aplicações de engenharia de alta precisão de medição, incertezas de medição associadas a métodos não lineares são relevantes para expressar um maior grau de confiança das medições; alguns trabalhos mostram aplicações que necessitam recorrer a esses métodos em processos de medição: BRADARIC *et al.* (2002), em teste de robustez de sistemas submetidos à ruídos; MEKID (2005), em sistemas mecânicos de medição. Portanto, avaliações de incertezas provenientes de métodos de ordens superiores podem ser utilizadas para refletir a correspondente influência de não linearidade existente em um processo de medição.

Em situações onde as funções de medição são fortemente não lineares, o GUM (BIPM *et al.*, 2008a, cláusula 5.1.2) aconselha usar alguns termos de ordens elevadas. Segundo o GUM, os termos mais importantes, de ordens imediatamente superiores aos de primeira ordem, que devem ser adicionados à incerteza padrão combinada de primeira ordem (Eq.2.26) são:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\Big)\right\}u^2(x_i)u^2(x_j) \tag{3.1}$$

Entretanto, existem restrições quanto ao uso desses termos para a avaliação da incerteza padrão usando funções de medição não lineares, as quais são: as grandezas de entrada X_i devem ser mutuamente independentes e possuírem comportamento gaussiano. Maiores detalhes sobre estas restrições podem ser consultados em FRENKEL (2006).

Para superar essas limitações, alguns trabalhos foram desenvolvidos: LIRA (2002); TANG (1975); WONG (1985) propuseram uma expressão de segunda ordem para a incerteza padrão baseada no terceiro e quarto momento estatístico, contudo a função de medição era composta de apenas uma grandeza de entrada, i.e., $Y = f(X)$; WANG e IYER (2005a) propõem uma expressão de segunda ordem para a incerteza padrão que contempla N grandezas de entrada na função de medição, entretanto essa última expressão é válida somente para as grandezas de entrada mutuamente independentes e gaussianas; um trabalho mais abrangente foi desenvolvido por MEKID e VAJA (2008), neste trabalho os autores propuseram expressões de segunda e terceira ordem para ambas as estimativas do mensurando e

[1]No presente contexto, a incerteza padrão real é aquela proveniente de um método que considera todas as não linearidades da função de medição, e.g., o método GUM–S1.

suas respectivas incertezas padrão em funções de medição que possuem uma ou duas grandezas de entrada.

Inspirado no trabalho de Mekid e Vaja, expressões generalizadas de segunda e terceira ordem para avaliar a incerteza padrão de um mensurando foram desenvolvidas. Essas expressões podem ser usadas em funções de medição que possuem N grandezas de entrada mutuamente independentes.

3.2 Lei de propagação de incertezas em modelos de medição não lineares

Para avaliar e expressar a incerteza de medição em sistemas não lineares, por meio da LPU, a expansão em série de Taylor da função de medição deve envolver termos de 2ª ou 3ª derivadas. Esse procedimento requer o conhecimento dos momentos estatísticos de ordens superiores, tais como: terceiro, quarto, quinto e sexto momentos; o terceiro e o quarto momento possuem características físicas que são úteis e aplicáveis na avaliação da incerteza de medição aqui proposta. O terceiro e o quarto momento estatístico podem ser relacionados com a assimetria (*skewness*) e a curtose (*kurtosis*) da PDF de uma grandeza aleatória, respectivamente.

A assimetria é o quanto a curva de uma PDF desvia–se ou afasta–se de sua posição simétrica. Esta é obtida a partir do terceiro momento estatístico centrado na média:

$$\mathrm{E}[(\xi - x)^3] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^3 g_X(\xi) d\xi \tag{3.2}$$

Em que ξ representa os valores possíveis da variável aleatória X e a esperença dessa variável aleatória é dada por $x = \mathrm{E}[\xi]$.

O parâmetro assimetria é definido pela seguinte equação:

$$\gamma \triangleq \frac{\mathrm{E}[(\xi - x)^3]}{\{\mathrm{E}[(\xi - x)^2]\}^{3/2}} \tag{3.3}$$

Portanto, caso a assimetria (γ) seja escrita em termos da incerteza padrão de medição $u(x)$, a Eq.(3.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathrm{E}[(\xi - x)^3] = \gamma u^3(x) \tag{3.4}$$

A curtose é a medida do grau de achatamento de uma PDF. Essa pode ser obtida através do quarto momento estatístico centrado na média:

$$\mathrm{E}[(\xi - x)^4] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - x)^4 g_X(\xi) d\xi \tag{3.5}$$

O parâmetro curtose é definido pela seguinte equação:

$$\kappa \triangleq \frac{\mathrm{E}[(\xi - x)^4]}{\{\mathrm{E}[(\xi - x)^2]\}^2} \tag{3.6}$$

Então, pondo a curtose (κ) em termos da incerteza padrão de medição, essa pode ser escrita como:

$$\mathrm{E}[(\xi - x)^4] = \kappa u^4(x) \tag{3.7}$$

3.2.1 Método de segunda ordem

O método de segunda ordem, para a avaliação da incerteza padrão de medição, consiste em realizar uma expansão da função de medição em série de Taylor, em torno das melhores estimativas x_i das grandezas de entrada X_i, até os termos de 2ª derivada. Dessa forma, a função de medição pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} Y \approx Y_{2\mathrm{ord}} \;=\; & f(x_1, \ldots, x_N) + \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)(X_i - x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)(X_i - x_i)^2 \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)(X_i - x_i)(X_j - x_j) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como anteriormente salientado, nesse trabalho assume–se que as grandezas de entrada são mutuamente independentes[2], i.e., todos os termos que possuem a expressão $\mathrm{E}[(X_i - x_i)(X_j - x_j)]$ podem ser escritas como $\mathrm{E}[(X_i - x_i)]\mathrm{E}[(X_j - x_j)]$; além disso, todos os termos com $\mathrm{E}[(X_i - x_i)]$ são iguais a zero uma vez que $x_i = \mathrm{E}[X_i]$. Portanto, a aplicação do operador esperança em ambos os lados da Eq.(3.8) rende como estimativa o resultado de medição do mensurando ($y_{2\mathrm{ord}} = \mathrm{E}[Y_{2\mathrm{ord}}]$) baseado numa expressão de segunda ordem:

$$y \approx y_{2\mathrm{ord}} = f(x_1, \ldots, x_N) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big) u^2(x_i) \tag{3.9}$$

Agora, se a diferença entre a Eq.(3.8) e Eq.(3.9) for elevada ao quadrado, sendo posteriormente aplicado o operador esperança em ambos os lados da expressão (maiores detalhes dessa dedução são delineados no apêndice A.1), finalmente será obtida

[2]Esta hipótese é aceitável em muitos processos de medição, pois a dependência entre as grandezas de entrada é minimizada quando as compensações de efeitos sistemáticos são consideradas.

a expressão de segunda ordem para a incerteza padrão de medição:

$$
\begin{aligned}
u^2(y) \approx u^2(y_{2\text{ord}}) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)^2 u^2(x_i)}_{\text{primeira ordem}} + \gamma_i \Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big) u^3(x_i) \\
& + \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\kappa_i - 1}{4}\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)^2 u^4(x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)^2 u^2(x_i) u^2(x_j)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

O método de segunda ordem, proposto pelas Eqs.(3.9–3.10), engloba as expressões do resultado de medição ($y_{1\text{ord}}$) e da incerteza padrão combinada ($u_c(y)$) do método linear, proposto pelo GUM. Portanto, esse método é mais apropriado do que o método linear para avaliar a incerteza padrão de medição em funções não lineares. A eficiência do método de segunda ordem se deve à inclusão dos termos de segunda ordem da expansão em série de Taylor das funções de medição.

3.2.2 Método de terceira ordem

Neste caso, a estimativa e a incerteza padrão de medição do mensurando são derivadas da expansão em série de Taylor da função de medição truncada nos termos de terceira ordem. Essa expansão da função de medição rende a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
Y \approx Y_{3\text{ord}} \quad = \quad & f(x_1, \ldots, x_N) + \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)(X_i - x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)(X_i - x_i)^2 \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)(X_i - x_i)(X_j - x_j) + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)(X_i - x_i)^3 \\
& + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2 \partial X_j}\Big)(X_i - x_i)^2 (X_j - x_j) \\
& + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N}\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i,j}}^{N} \Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}\Big)(X_i - x_i)(X_j - x_j)(X_k - x_k)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Se o operador esperança é aplicado em ambos os lados da Eq.(3.11), considerando todas as hipóteses aplicadas ao método de segunda ordem, o resultado de medição ou estimativa do mensurando ($y_{3\text{ord}} = \mathrm{E}[Y_{3\text{ord}}]$) é obtido por meio da seguinte equação:

$$
y \approx y_{3\text{ord}} = f(x_1, \ldots, x_N) + \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big) u^2(x_i) + \frac{\gamma_i}{6}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big) u^3(x_i) \right\} \tag{3.12}
$$

Caso seja aplicado o mesmo procedimento do método de segunda ordem (ver detalhes também no apêndice A.2), a expressão generalizada para incerteza padrão será representada pela seguinte equação:

$$
\begin{aligned}
u^2(y) \approx u^2(y_{3\mathrm{ord}}) \quad = \quad & u^2(y_{2\mathrm{ord}}) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\kappa_i}{3}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)u^4(x_i) \\
& + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)\Big\{\mathrm{E}[(X_i - x_i)^5] - \gamma_i u^5(x_i)\Big\} \\
& + \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)^2\Big\{\mathrm{E}[(X_i - x_i)^6] - \gamma_i^2 u^6(x_i)\Big\} \\
& + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j^2}\Big)u^2(x_i)u^2(x_j) \qquad (3.13) \\
& + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\gamma_i\left\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2 \partial X_j}\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j^2}\Big)\right\}u^3(x_i)u^2(x_j) \\
& + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\kappa_i\left\{\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2 \partial X_j}\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j^2}\Big)\right\}u^4(x_i)u^2(x_j) \\
& + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\gamma_i\gamma_j\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j^2}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2 \partial X_j}\Big)u^3(x_i)u^3(x_j) \\
& + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{N}\left\{\frac{1}{6}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}\Big)^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2 \partial X_j}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_j \partial X_k^2}\Big)\right\}u^2(x_i)u^2(x_j)u^2(x_k)
\end{aligned}
$$

Como pode ser observado nas Eqs.(3.12–3.13), a estimativa do mensurando ($y_{3\mathrm{ord}}$) e sua respectiva incerteza padrão ($u(y_{3\mathrm{ord}})$) engloba as expressões das respectivas estimativas e incertezas padrão dos métodos linear (GUM) e de segunda ordem. Portanto, o método de terceira ordem é mais abrangente e robusto do que os métodos linear e de segunda ordem para funções de medição não lineares, uma vez que mais termos da expansão em série de Taylor são considerados nas funções de medição.

3.3 Estudo de caso

Nesta seção um estudo de caso é apresentado como ilustração da aplicação dos métodos propostos para avaliar o resultado de medição e sua respectiva incerteza padrão. Os resultados provenientes dos métodos de segunda e terceira ordem são comparados com o método linear, proposto pelo GUM, e o método não linear, proposto pelo Suplemento 1 do GUM.

O estudo de caso, aqui proposto, consiste em avaliar a estimativa do mensurando e sua incerteza padrão pelos métodos supracitados, cuja função de medição foi extraída do trabalho de WÜBBELER *et al.* (2008). A função de medição é regida pela

seguinte expressão:

$$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \tag{3.14}$$

Esse tipo de modelo de medição é comum nas áreas de técnicas de medição por coordenadas e também em processos de medição envolvidos com grandezas complexas. WÜBBELER *et al.* (2008) supuseram que ambas as grandezas de entrada possuem comportamento gaussiano, com esperanças (estimativas) iguais a $x_1 = x_2 = 1{,}0$ e incertezas padrão também iguais a $u(x_1) = u(x_2) = 1{,}0$ nas respectivas unidades das grandezas X_1 e X_2, i.e, u.X_1 e u.X_2;

Diferentemente dos autores WÜBBELER *et al.* (2008), aqui serão considerados diferentes comportamentos para as grandezas de entrada da função de medição proposta. A grandeza de entrada X_1 tem uma PDF uniforme cujos limites inferior e superior são 0,0 e 2,0 u.X_1, respectivamente. Os valores da grandeza de entrada X_2 devem ser mais concentrados em torno de um valor bem definido do que seus respectivos limites inferior e superior, portanto, uma PDF triangular simétrica foi suposta para essa grandeza cujos limites são iguais a 0,0 e 1,5 u.X_2, respectivamente.

Neste trabalho, os dados experimentais numéricos referentes às medições das grandezas X_1 e X_2 são apresentados na Figura 3.2.

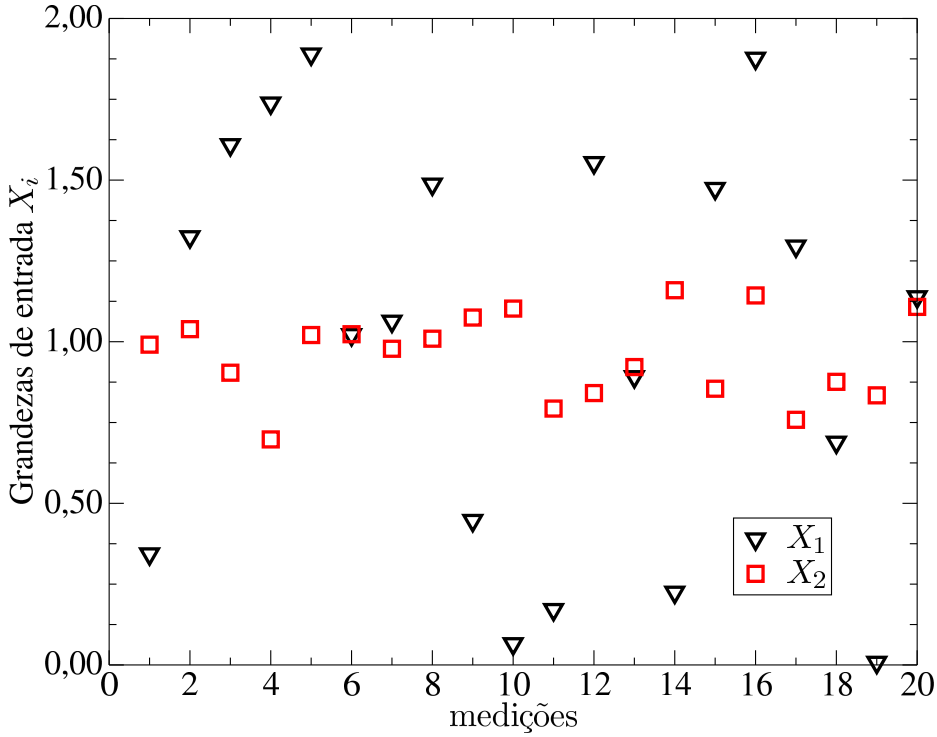

Figura 3.2: Medições das grandezas de entrada X_1 e X_2.

O tratamento de dados para cada grandeza, em termos de parâmetros estatísticos e metrológicos, tais como: média, incerteza padrão, assimetria, curtose, quinto e

sexto momentos, são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Parâmetros estatísticos e metrológicos dos conjuntos de medições referentes às grandezas de entrada X_1 and X_2.

Parâmetros	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$
PDF	Uniforme	Triangular
Média x_i (u.X$_i$)	$1,02$	$0,96$
Incerteza padrão $u(x_i)$ (u.X$_i$)	$0,63$	$0,13$
Skewness (adimensional)	$-0,26$	$-0,23$
Kurtosis (adimensional)	$1,73$	$2,03$
Quinto momento (unidade correspondente a X_i)	$-7,03 \times 10^{-2}$	$-4,48 \times 10^{-5}$
Sexto momento (unidade correspondente a X_i)	$1,80 \times 10^{-1}$	$2,62 \times 10^{-5}$

Pelo fato de ser um experimento numérico, a presente análise considera apenas avaliações do Tipo A da incerteza padrão. Entretanto, na prática fontes de incerteza do Tipo B, provenientes dos sistemas de medição, devem ser consideradas. Apesar disso, mesmo considerando as fontes de incerteza do Tipo B nos métodos propostos, a tendência dos resultados é mantida, pois tais fontes de incertezas estão presentes nas funções metrológicas das grandezas de entrada (apresentado no capítulo 2), as quais são baseadas em fatores aditivos. Em outras palavras, essas funções metrológicas são essencialmente lineares e, portanto, a aplicação do método GUM para tais funções (de medição direta) é suficiente e robusta. Todavia, neste estudo de caso a avaliação da incerteza de medição da grandeza de saída (Y), a qual possui uma relação não linear com as grandezas de entrada (X_i), o método GUM não é adequado.

Através do anteriormente exposto no capítulo 2, o método GUM–S1 consiste em determinar o resultado de medição e sua respectiva incerteza padrão por meio de uma PDF empírica gerada pelo MCM. A escolha do número de amostras de Monte Carlo foi obtida por meio do procedimento numérico (análise de sensibilidade) descrito no capítulo 2; para a aplicação desse procedimento foram considerados dois algarismos significativos para $u(y)$ e a estimativa inicial de amostras de Monte Carlo foi $M = 10^7$, valor adotado no artigo de WÜBBELER *et al.* (2008).

Na presente análise de sensibilidade, cada valor de M foi usado para retirar amostras de uma PDF uniforme, referente à grandeza de entrada X_1, e uma PDF triangular, referente à grandeza de entrada X_2, cujos os limites inferiores e superiores de ambas as grandezas foram apresentadas previamente no início desta seção. Esses experimentos numéricos foram executados em linguagem MATLAB (versão 7.8) sob a plataforma operacional LINUX (distribuição Ubuntu 9.04) através de um PC operando com 2.10 GHz de frequência, um processador Core 2 duo e 3 GB de memória RAM.

O resultado da análise de sensibilidade revelou que o número de amostras de

Monte Carlo igual a $M = 2 \times 10^7$ deveria ser utilizada para a função de medição proposta, uma vez que esse valor satisfez a tolerância numérica da incerteza padrão. A PDF empírica do mensurando Y obtida por meio do método GUM–S1, para $M = 2 \times 10^7$, é apresentada na Figura 3.3.

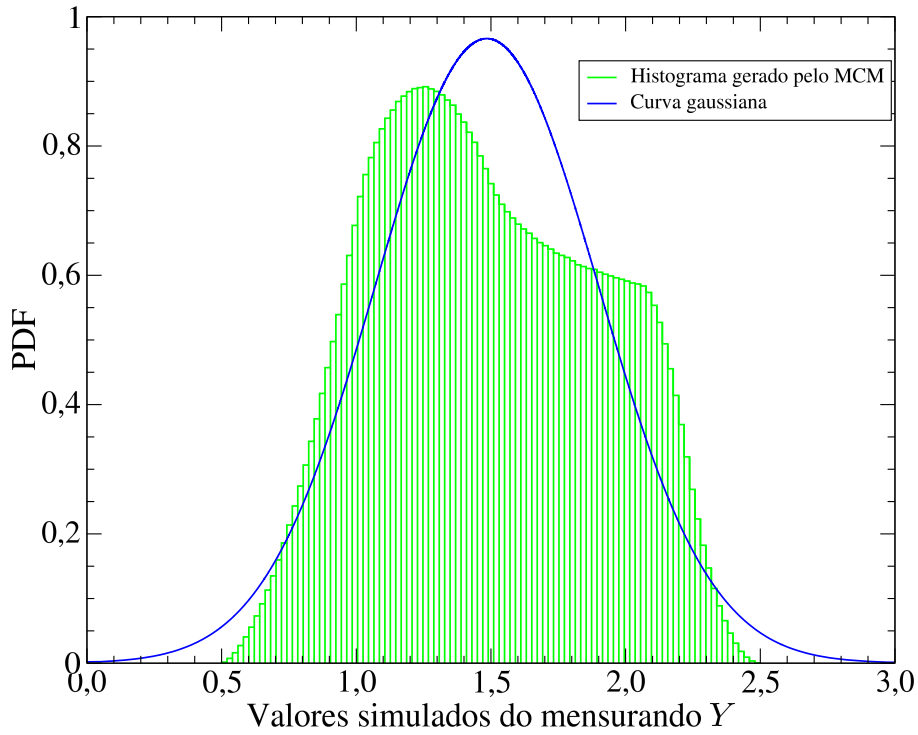

Figura 3.3: PDF empírica do mensurando $Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ gerada pelo MCM.

Como pode ser observado na Figura 3.3, a PDF do mensurando Y não é gaussiana devido a não linearidade significativa da função de medição. Logo, os métodos propostos (segunda e terceira ordem) devem ser usados para avaliar a incerteza padrão de medição.

Os resultados provenientes dos quatros métodos, tais como: estimativa (y), incerteza padrão ($u(y)$) e seus respectivos desvios percentuais δ_y e $\delta_{u(y)}$, são mostrados na Tabela 3.2, com a incerteza padrão expressada com dois algarismos significativos conforme recomendação do GUM (BIPM *et al.*, 2008b, claúsula 7.2.6). Os desvios percentuais foram calculados tomando como referência o método GUM–S1.

Os resultados apresentados na Tabela 3.2 revelam que existe uma diferença significativa dos resultados provenientes dos métodos GUM e GUM–S1. Essa discrepância ocorreu pelo fato de que o método GUM considera uma aproximação linear da função de medição, enquanto que o método GUM–S1 considera toda não linearidade da mesma.

Por outro lado, observa–se nitidamente, que os resultados provenientes dos métodos de segunda e terceira ordem tendem a convergir para os resultados obtidos

Tabela 3.2: Comparação entre os métodos de segunda e terceira ordem com os métodos GUM e GUM–S1.

Métodos	$\boldsymbol{y}$ (**unidade de** $\boldsymbol{Y}$)	$\boldsymbol{\delta_y}$ (%)	$\boldsymbol{u(y)}$ (**unidade de** $\boldsymbol{Y}$)	$\boldsymbol{\delta_{u(y)}}$ (%)
Primeira ordem (GUM)	$1,40$	$-5,4$	$0,46$	$+12,20$
Segunda ordem	$1,46$	$-1,4$	$0,45$	$+9,76$
Terceira ordem	$1,47$	$-0,7$	$0,42$	$+2,44$
GUM–S1 (MCM)	$1,48$	$0,0$	$0,41$	$0,0$

pelo método GUM–S1. Ou seja, os resultados obtidos pelo método de segunda ordem foram melhores do que os resultados provenientes do método linear, enquanto que os resultados do método de terceira ordem aproxima–se mais ainda do método GUM–S1.

Toda essa análise é validada pelo decaimento do desvio percentual com o aumento da ordem da função de medição do mensurando. Além disso, se os tempos de processamento, apresentados na Tabela 3.3, entre os quatros métodos forem analisados, nota–se que não há diferenças significativas entre os métodos linear, segunda e terceira ordem, enquanto que o tempo de processamento do método GUM–S1 é muito superior aos demais métodos.

Tabela 3.3: Comparação entre os tempos de processamento provenientes dos métodos GUM, GUM–S1, segunda e terceira ordem.

Métodos	**tempo de processamento (s)**
Primeira ordem (GUM)	$0,64$
Segunda ordem	$0,67$
Terceira ordem	$0,68$
GUM–S1(MCM)	$245,55$

Portanto, os pequenos desvios percentuais dos métodos de segunda e terceira ordem quando comparados com o método linear, bem como um tempo de processamento muito inferior do que o método GUM–S1, demonstra que esses métodos podem ser úteis na avaliação da incerteza padrão de medição para funções de medição não lineares, principalmente quando existir limitação de tempo (desvantagem do método GUM–S1) para a análise da incerteza de medição de funções não lineares.

3.4 Considerações finais

Quando as funções de medição possuem não linearidade significativa, o uso do método GUM é inadequado para avaliar a incerteza padrão de medição do mensurando.

Pois, o uso desse método (linear) pode, inclusive, gerar valores de incertezas fisicamente incoerentes (demasiadamente pequenas ou grandes).

Para superar essa limitação, foram propostas expressões generalizadas de segunda e terceira ordem para a avaliação da incerteza padrão de medição, as quais N grandezas de entrada mutuamente independentes podem ser utilizadas nas funções de medição. Esses métodos propostos revelaram ser úteis na análise não linear da incerteza padrão de medição em relação ao método GUM. Portanto, essas expressões generalizadas podem ser devidamente incorporadas ao GUM para avaliar a incerteza de medição quando a não linearidade da função de medição for significativa.

Os resultados provenientes dos métodos propostos de segunda e terceira ordem tendem a convergir para os resultados do método GUM–S1. Embora esse último método seja mais robusto do que os métodos de segunda e terceira ordem, um esforço computacional e um tempo de processamento significativamente maior é requerido. Essas características intrínsecas do método GUM–S1 tornam–se mais pronunciadas à medida que a complexidade e a não linearidade dos modelos de medição se tornam mais significativas.

Por outro lado, os métodos de segunda e terceira ordem possuem tempos de resposta equivalentes ao do método GUM, além de exigirem um esforço computacional muito inferior em relação ao método GUM–S1. Além disso, quando as funções de medição são de segunda e terceira ordem, os valores das estimativas $y_{2\mathrm{ord}}$ ou $y_{3\mathrm{ord}}$ e suas respectivas incertezas padrão $u(y_{2\mathrm{ord}})$ or $u(y_{3\mathrm{ord}})$ são avaliações robustas do mensurando Y, respectivamente.

A limitação dos métodos de segunda e terceira ordem em relação aos métodos GUM e GUM–S1 surge quando há necessidade de expressar a incerteza de medição como um intervalo (de abrangência), pois esses métodos propostos (segunda e terceira ordem) não possuem um procedimento para estimar os intervalos de abrangência do mensurando. Portanto, se o objetivo for obter intervalos de abrangência para o mensurando, oriundo de uma função de medição fortemente não linear, o método mais robusto é o GUM–S1. Estudos futuros serão desenvolvidos para avaliar intervalos de abrangência por meio dos métodos de segunda e terceira ordem em sistemas não lineares de medição.

Capítulo 4

Incerteza de medição em sistemas multivariáveis

"Quanto mais um homem se aproxima de suas metas, tanto mais crescem as dificuldades."

Filósofo Johann Wolfgang von Goethe

O presente capítulo visa demonstrar uma extensão dos métodos GUM e GUM–S1 para os sistemas multivariáveis de medição. Os aspectos teóricos e práticos do método linear (MLPU), baseado na lei de propagação de incertezas, e do método não linear (MLPP), baseado na lei de propagação de PDFs conjuntas por meio do método de Monte Carlo, são apresentados. As vantagens e as desvantagens dos métodos MLPU e MLPP são delineados a partir dos resultados originados de um sistema multivariável não linear de medição (reator químico). O conteúdo deste capítulo foi integralmente submetido como artigo ao periódico nacional Controle & Automação (MARTINS e KALID, 2010b).

4.1 Introdução

Os métodos abordados pelo GUM e GUM–S1 são aplicados em sistemas de medição que possuem apenas uma grandeza de saída (um mensurando), tais sistemas de medição são classificados como sistemas MISO (*Multiple Input Single Output*). Porém, em alguns sistemas de medição mais do que um mensurando depende de um conjunto comum de grandezas de entrada, esses sistemas são classificados como MIMO (*Multiple Input Multiple Output*). Os sistemas MIMO de medição podem surgir em modelos da metrologia óptica, acústica e elétrica; ou modelos de processos químicos e petroquímicos.

Na literatura, boa parte dos trabalhos relacionados às sistemas MIMO de medição utiliza a lei de propagação de incertezas, a saber: BICH (1996); KACKER

e JONES (2003) apresentam uma fórmula para a incerteza de medição em sistemas MIMO considerando apenas duas grandezas de saída; BICH *et al.* (1993/94); D'ANTONA (2004); LIRA (2002); WANG e IYER (2005b); WEISE (1984) demonstram uma equação geral, uma forma matricial equivalente ao método GUM, denominado de método da lei de propagação de incertezas multivariável, aqui denotado por método MLPU; outras aplicações do método MLPU envolvendo mensurandos compostos de grandezas complexas (sistemas multivariáveis) são também encontradas na literatura: HALL (2003, 2004); RIDLER e SALTER (2002); WILLINK e HALL (2002). Antagonicamente, a lei de propagação de PDFs, implementado via MCM, para sistemas MIMO de medição, aqui denominado de método MLPP, é menos abordado do que o método MLPU. Alguns trabalhos que utilizam o método MLPP, para avaliar a incerteza de medição em sistemas MIMO, destacam-se na literatura: CORDERO e ROTH (2005); HALL (2006); MARTINS e KALID (2010c); POSSOLO (2010); SOUZA e KALID (2010).

O presente capítulo visa demonstrar uma metodologia para avaliar a incerteza de medição em sistemas MIMO baseada nos métodos MLPU e MLPP. Este capítulo está organizado no seguinte formato: a primeira parte descreve a lei de propagação de incertezas multivariável, assim como um procedimento para estimar o intervalo de abrangência individual dos mensurandos de um sistema MIMO de medição; a segunda parte focaliza a demonstração da lei de propagação de PDFs sob os aspectos analíticos e numéricos, esse último baseado no MCM; além disso, um procedimento para estimar intervalos de abrangência individuais, baseado no método MLPP, também será apresentado. Por fim, os méritos e os deméritos dos métodos MLPU e MLPP são delineados com base nos resultados provenientes de um sistema MIMO não linear de medição (reator químico).

4.2 Lei de propagação de incertezas multivariável

O método MLPU consiste em avaliar as estimativas e a matriz de covariância das grandezas de saída (múltiplos mensurandos Y_j), que dependem de várias grandezas de entrada X_i, por meio de f_k funções de medição, as quais podem ou não ser funções explícitas. Uma representação do sistema MIMO de medição pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{cases} f_1(Y_1, Y_2, \ldots, Y_K; X_1, X_2, \ldots, X_N) & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ f_K(Y_1, Y_2, \ldots, Y_K; X_1, X_2, \ldots, X_N) & = & 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Em um sistema de medição representado pela Eq.(4.1), as funções de medição podem ser resolvidas de forma analítica ou numérica; podem ser obtidas através de

modelagens fenomenológicas ou empíricas; devem incluir as possíveis compensações sistemáticas provenientes dos sistemas de medição das grandezas de entrada; além disso, o número de funções f_K deve ser igual ao número de grandezas de saída ou mensurandos Y_j.

Conforme exposto inicialmente nesse capítulo, o método MLPU é uma extensão do método GUM, dessa forma uma aproximação linear das funções de medição deve ser considerada também nesse método.

Em notação matricial, as funções de medição podem ser escritas de uma forma mais compacta, i.e.:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Y};\mathbf{X}) = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

Em que $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_K)^{\mathrm{T}}$ representa o vetor das grandezas de saída; $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_N)^{\mathrm{T}}$ representa o vetor das grandezas de entrada; enquanto que o símbolo $\mathbf{0}$ é um vetor coluna com todos seus elementos iguais a zero e $\mathcal{F}(\mathbf{Y};\mathbf{X})$ representa um vetor coluna $(f_1(\mathbf{Y};\mathbf{X}), \ldots, f_K(\mathbf{Y};\mathbf{X}))^{\mathrm{T}}$.

De forma análoga ao método GUM, a linearização das funções de medição é realizada através de uma expansão da série de Taylor truncada nos termos lineares em torno das estimativas tanto das grandezas de saída $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_K)^{\mathrm{T}}$ quanto das grandezas de entrada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)^{\mathrm{T}}$. Dessa maneira, a linearização da Eq.(4.2) fornece a expressão seguinte:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Y};\mathbf{X}) \approx \mathcal{F}(\mathbf{y};\mathbf{x}) + \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y}-\mathbf{y}) + \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}-\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{4.3}$$

As matrizes de sensibilidade das grandezas de saída ($\mathbf{S}_{\mathbf{y}}$) e entrada ($\mathbf{S}_{\mathbf{x}}$) contêm as derivadas parciais de primeira ordem de cada função de medição f_K em relação as grandezas $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{X}$, avaliadas nas estimativas $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}$, respectivamente. Essas matrizes de sensibilidade $\mathbf{S}_{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{S}_{\mathbf{x}}$ são as matrizes Jacobianas das grandezas de saída ($\mathbf{J}_{\mathbf{y}}$) e entrada ($\mathbf{J}_{\mathbf{x}}$), respectivamente.

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{J}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial y_1 & \ldots & \partial f_1/\partial y_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_K/\partial y_1 & \ldots & \partial f_K/\partial y_K \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{J}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \ldots & \partial f_1/\partial x_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial f_K/\partial x_1 & \ldots & \partial f_K/\partial x_N \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Como a estimativa $\mathcal{F}(\mathbf{y};\mathbf{x})$ é solução da Eq.(4.3), i.e., $\mathcal{F}(\mathbf{y};\mathbf{x}) = 0$. Logo, a Eq.(4.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{Y}-\mathbf{y}) + \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}-\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{4.6}$$

Se o vetor das grandezas de saída ($\mathbf{Y}$) for explicitado da Eq.(4.6), por meio da álgebra matricial, é obtida a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{S}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}-\mathbf{x}) + \mathbf{y} \\ \mathbf{S}^{\mathrm{T}} &= -(\mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}})^{-\mathbf{1}}\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

A aplicação do operador variância vetorial[1] em ambos os lados da Eq.(4.7) fornece a lei de propagação de incertezas multivariável, ou seja, essa operação matemática fornece a matriz de covariância das grandezas de saída de ordem K ($\mathbf{U}_{\mathbf{y}}$) a partir do conhecimento da matriz de covariância das grandezas de entrada de ordem N ($\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$).

$$\mathbf{U}_{\mathbf{y}} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_{\mathbf{x}}\mathbf{S} \tag{4.8}$$

Como pode ser observado da Eq.(4.8), o método MLPU consiste em propagar as informações disponíveis das grandezas de entrada: vetor das estimativas $\mathbf{x}$ e a matriz de covariância (ou matriz de incerteza) $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$, para as grandezas de saída por meio de um procedimento linear conforme é abordado pelo GUM em sistemas MISO de medição.

Os elementos das matrizes de covariância, tanto das grandezas de saída quanto das grandezas de entrada, representam: a variância (ou incerteza padrão quadrática) das grandezas (todos os elementos da diagonal principal); e a covariância existente entre cada grandeza de saída e cada grandeza entrada (todos os elementos que não pertencem à diagonal principal). Essas matrizes são apresentadas nas Eq.(4.9) e Eq.(4.10), respectivamente.

$$\mathbf{U}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} u^2(y_1) & \dots & u(y_1, y_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(y_K, y_1) & \dots & u^2(y_K) \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u^2(x_1) & \dots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & \dots & u^2(x_N) \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

A matriz de covariância $\mathbf{U}_{\mathbf{y}}$ associada aos resultados de medição (estimativas) $\mathbf{y}$ dos mensurandos $\mathbf{Y}$, expressada pela Eq.(4.8), é o parâmetro quantitativo usado

[1] O operador variância de uma grandeza vetorial $\mathbf{Z}$, cuja esperança é $\mathbf{z}$ com PDF igual a $g(\mathbf{Z})$, é proveniente da seguinte expressão $\mathrm{Var}[\mathbf{Z}] = \mathrm{E}[(\mathbf{Z}-\mathbf{z})(\mathbf{Z}-\mathbf{z})^{\mathrm{T}}] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty}(\mathbf{Z}-\mathbf{z})(\mathbf{Z}-\mathbf{z})^{\mathrm{T}} g(\mathbf{Z}) d\mathbf{Z}$.

para avaliar a qualidade da medição proveniente dos sistemas MIMO. Entretanto, algumas aplicações industriais ou comerciais requerem o conhecimento de uma incerteza expandida equivalente aos sistemas MISO de medição. Ou seja, em sistemas MIMO de medição uma região, não mais um intervalo, de abrangência em torno do ponto K–dimensional do espaço referente às estimativas $\mathbf{y}$ é necessária para abranger os valores possíveis dos mensurandos $\mathbf{Y}$.

Nos sistemas MISO de medição, o intervalo de abrangência (incerteza expandida) para o único mensurando Y é estimado com base na fórmula W–S, a qual pressupõe que as grandezas de entrada e de saída, igualmente às suas incertezas padrão, devem ser gaussianas; além disso, as grandezas de entrada devem ser estatisticamente independentes, conforme discutido na seção 2.2 deste trabalho.

Um procedimento equivalente, ou até mesmo outro, para determinar a região de abrangência dos sistemas MIMO de medição ainda não está bem consolidado na literatura. Apesar disso, o trabalho de WILLINK e HALL (2002) tem sugerido um método que permite estimar uma região de abrangência aproximada para pequenas amostras ($n \leq 5$) das grandezas de entrada. Além da determinação da região de abrangência ser uma tarefa ainda sem um procedimento bem definido pela literatura, o conhecimento dessa região não deve ser útil para os sistemas MIMO de medição, pois do ponto de vista prático, é mais interessante conhecer os intervalos (de abrangência) de cada mensurando individualmente do que as regiões de abrangência (BICH *et al.*, 2006b). Todavia, quando as covariâncias dos mensurandos de $\mathbf{U_y}$ são da ordem de grandeza das variâncias (elementos da diagonal principal de $\mathbf{U_y}$) é necessário avaliar a região de abrangência dos mensurandos e não os intervalos (de abrangência) individuais dos mesmos. O presente trabalho focaliza os sistemas MIMO de medição em que as covariâncias presentes em $\mathbf{U_y}$ possuem ordem de grandezas inferiores às variâncias dessa matriz. A região de abrangência de sistemas MIMO de medição será investigada em trabalhos futuros.

Segundo os autores BICH *et al.* (2006b); COX e HARRIS (2003), os intervalos de abrangência individuais para cada mensurando podem ser estimados segundo o procedimento adotado no GUM, i.e., para cada elemento da diagonal principal ($u(y_j)$) da matriz de covariância $\mathbf{U_y}$ é estimado o fator de abrangência (k_j) com base nos graus de liberdade efetivos de $u(y_j)$, usando a fórmula W–S, e a probabilidade de abrangência p escolhida. Dessa forma, cada grandeza de saída Y_j possui seu intervalo de abrangência: $I_j = [y_j \pm k_j u(y_j)]$. Um fluxo esquemático das etapas de cálculo do método MPLU é apresentado na Figura 4.1.

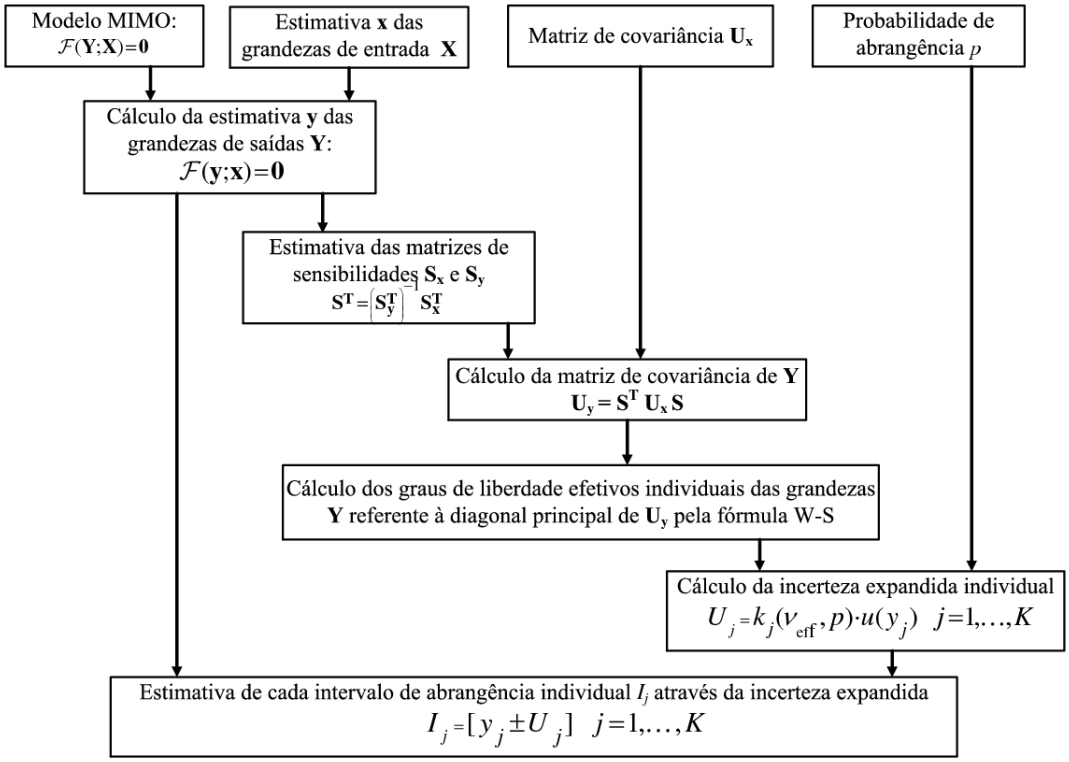

Figura 4.1: Etapas de cálculo para avaliar a incerteza de medição em sistemas MIMO baseado no método MLPU, quando a diagonal da matriz de covariância $\mathbf{U_y}$ for dominante.

4.3 Lei de propagação de funções de densidade de probabilidade multivariável

O método MLPU utiliza uma aproximação linear das funções de medição do sistema MIMO para expressar a matriz de covariância associada ao vetor das estimativas das grandezas de saída. Esse método (linear) pode ser usado quando as funções de medição são lineares ou linearizadas em torno da região de interesse. Contudo, quando a não linearidade associada ao modelo de medição MIMO é significativa, um método não linear deve ser requerido de modo a fornecer resultados mais consistentes para a avaliação da incerteza de medição. O método não linear mais abrangente do que o método MLPU é aquele baseado na lei de propagação de PDFs, uma vez que este procedimento fornece uma PDF conjunta para os mensurandos do sistema MIMO de medição. Assim como nos sistemas MISO de medição, a propagação de PDFs nos sistemas MIMO de medição pode ser obtida tanto de uma abordagem analítica quanto de uma abordagem numérica.

Nesta seção são demonstrados os métodos analítico e numérico para determinar a PDF conjunta dos mensurandos de um sistema MIMO de medição. Além disso,

são delineados os passos para estimar os intervalos de abrangência individuais de cada grandeza de saída a partir de suas PDFs marginais.

4.3.1 Abordagem analítica

A essência da abordagem não linear para expressar e avaliar a incerteza de medição em sistemas MIMO é derivar uma PDF conjunta $g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta})$ para os mensurandos $\mathbf{Y}$ a partir da PDF conjunta $g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$ das grandezas de entrada que compõem o modelo de medição MIMO. Nesse trabalho, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_N)^{\mathrm{T}}$ denota os valores possíveis das grandezas de entrada $\mathbf{X}$, provenientes dos experimentos, enquanto que $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_K)^{\mathrm{T}}$ denota os valores possíveis das grandezas de saída $\mathbf{Y}$ proveniente da função de medição $\mathcal{F}$.

Para demonstrar a lei de propagação de PDFs pela abordagem analítica serão consideradas as funções de medição em sua forma explícita, i.e.:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{X}) \tag{4.11}$$

A esperança do vetor $\mathbf{Y}$ poderia ser obtida através da PDF conjunta das grandezas de entrada $\mathbf{X}$ de acordo com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathbf{Y}] &= \mathrm{E}[\mathcal{F}(\mathbf{X})] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \tag{4.12}$$

De forma análoga ao procedimento aplicado nos sistemas MISO de medição (ver seção 2.2), a função delta de Dirac será utilizada. Como as propriedades dessa função podem ser aplicadas para grandezas vetoriais, a seguinte propriedade tem grande utilidade na abordagem proposta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{z}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{z} - \mathbf{a}) d\mathbf{z} = \mathbf{a} \tag{4.13}$$

Caso as grandezas vetoriais $\mathbf{z}$ e $\mathbf{a}$ sejam substituídas pelas grandezas $\boldsymbol{\eta}$ e $\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi})$, respectivamente, então a Eq.(4.13) pode ser reescrita como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\eta} - \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi})) d\boldsymbol{\eta} = \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi}) \tag{4.14}$$

A substituição do valor de $\mathcal{F}(\boldsymbol{\xi})$ proveniente da Eq.(4.14) na Eq.(4.12) fornece a seguinte expressão:

$$\mathrm{E}[\mathbf{Y}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\eta} - \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi})) g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta} \tag{4.15}$$

Como a esperança do vetor $\mathbf{Y}$ é definida por:

$$\mathrm{E}[\mathbf{Y}] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\eta} g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \tag{4.16}$$

A PDF conjunta das grandezas de saída do sistema MIMO de medição pode ser obtida pela igualdade da Eq.(4.15) com a Eq.(4.16), logo:

$$g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\eta} - \mathcal{F}(\boldsymbol{\xi})) g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \tag{4.17}$$

Uma vez a PDF conjunta das grandezas de saída $\mathbf{Y}$ é conhecida, o resultado de medição $\mathbf{y}$ e sua respectiva matriz de covariância $\mathbf{U}_{\mathbf{y}}$, bem como as PDFs marginais $g'_{Y_j}(\eta_j)$ de cada mensurando Y_j, podem ser determinadas pelas Eqs.(4.18, 4.19, 4.20), respectivamente.

$$\mathbf{y} = \mathrm{E}[\mathbf{Y}] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\eta} g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{U}_{\mathbf{y}} = \mathrm{Var}[\mathbf{Y}] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})^{\mathrm{T}} g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \tag{4.19}$$

$$g'_{Y_j}(\eta_j) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta}) d\eta_l \ldots d\eta_K \quad j \neq l = 1, \ldots, K \tag{4.20}$$

Contudo, assim como nos sistemas MISO de medição, a Eq.(4.17) pode ser solucionada analiticamente somente para casos relativamente simples. Portanto, um procedimento numérico, de interesse prático, é necessário para determinar a PDF conjunta dos mensurandos de um sistema MIMO de medição. O método numérico mais eficiente para esses sistemas de medição é o MCM. A aplicação do MCM nos sistemas MIMO de medição será apresentado na próxima seção.

4.3.2 Abordagem numérica

Como demonstrado na seção anterior, integrais multidimensionais são exigidas para determinar a PDF $g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta})$ (Eq.(4.17)). Geralmente, a solução dessas integrais é realizada por métodos numéricos. O método numérico adotado pelo GUM–S1 é o MCM e, portanto, aqui nos sistemas MIMO de medição seu uso também será adotado.

A ideia básica do MCM, nos sistemas MIMO de medição, é retirar M amostras da PDF conjunta $g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$ das grandezas de entrada e propagá-las, através das funções de medição (Eq.(4.2)), de modo a gerar M amostras das grandezas de saída (mensurandos $\mathbf{Y}$) e, consequentemente, uma PDF conjunta empírica ($\hat{g}_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta})$). Resultados

oriundos da PDF $\hat{g}_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta})$ convergem a resultados correspondentes a PDF $g_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\eta})$ à medida que as amostras de Monte Carlo são grandes (e.g., 10^6). Todavia, a escolha adequada para M deve ser realizada com base na tolerância numérica adotada para a matriz de covariância $\mathbf{U}_{\mathbf{y}}$, de forma análoga ao procedimento abordado pelo GUM–S1 (BIPM *et al.*, 2008c).

Na prática, os resultados de maior interesse para a avaliação da incerteza de medição de sistemas MIMO são (BICH *et al.*, 2006b): o vetor de estimativa $\mathbf{y}$, a matriz de covariância $\mathbf{U}_{\mathbf{y}}$ e os intervalos de abrangência individuais I_j associados a cada mensurando Y_j. Os intervalos de abrangência individuais são determinados pelas PDFs marginais empíricas $\hat{g}'_{Y_j}(\eta_j)$ de cada mensurando Y_j provenientes do MCM; esses intervalos de abrangência individuais são determinados pelo mesmo procedimento numérico apresentado pelo GUM–S1 (ver seção 2.3), i.e., a estimativa de I_j são determinados com base em uma probabilidade de abrangência p estabelecida previamente para cada mensurando Y_j. Na Figura 4.2 é esboçado um fluxo esquemático das etapas de cálculo do método MLPP.

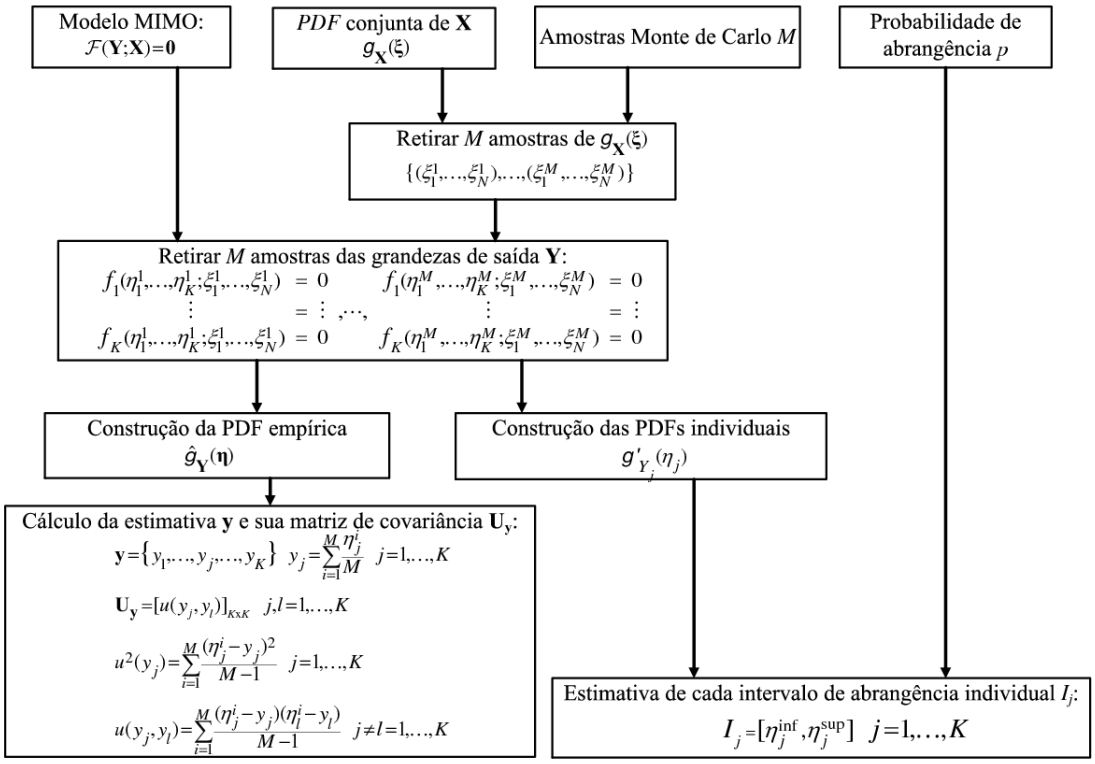

Figura 4.2: Etapas de cálculo para avaliar a incerteza de medição em sistemas MIMO baseado no método MLPP, quando a diagonal da matriz de covariância $\mathbf{U}_{\mathbf{y}}$ for dominante.

4.4 Estudo de caso

A partir do anteriormente exposto sobre os métodos MLPU (linear) e MLPP (não linear), um estudo de caso será abordado nesta seção para elucidar uma aplicação desses métodos de modo a obter uma maior clareza e assimilação dos mesmos. O estudo de caso, aqui abordado, será um reator tanque continuamente agitado (reator CSTR) da planta didática simulada do PROTEC–UFBA (KALID, 2005).

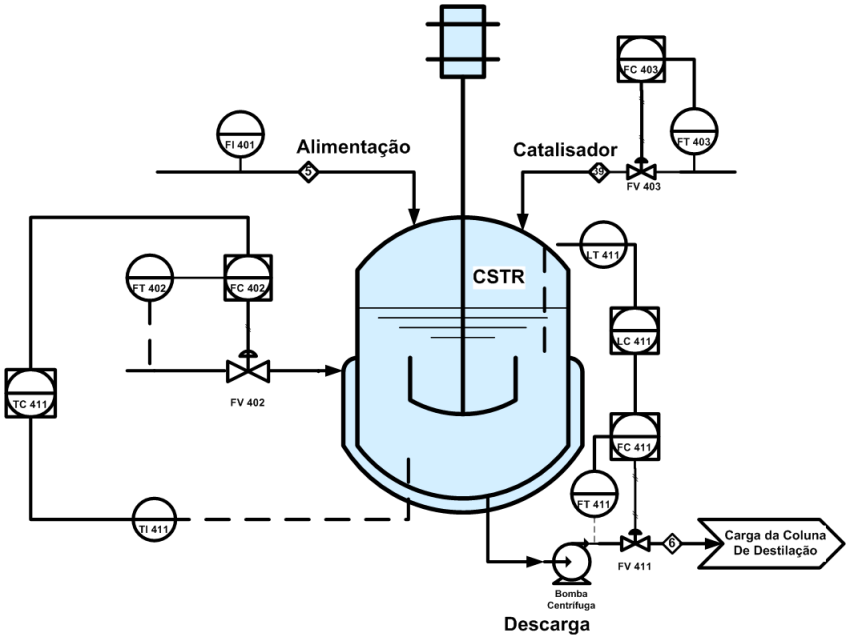

Figura 4.3: Fluxograma simplificado do reator CSTR da planta didática PROTEC–UFBA.

A função desse reator é transformar o reagente A no produto B por meio de uma catálise homogênea em fase líquida. Por tratar-se de uma reação endotérmica, um fluido de aquecimento é requerido para que a mesma ocorra. A Figura 4.3 apresenta um fluxograma simplificado desse reator CSTR, na qual são mostradas as correntes de alimentação, catalisador, fluido de aquecimento e descarga do mesmo, bem como suas malhas de controle de temperatura e nível. A aplicação dos métodos MLPU e MLPP neste sistema MIMO será avaliada sob o regime estacionário. O objetivo é avaliar a incerteza padrão de medição e os respectivos intervalos de abrangência das concentrações molares do reagente (C_{A}) e do produto (C_{B}) dentro do reator.

As funções de medição associadas às concentrações molares são obtidas de modelagem fenomenológica. Essas funções são representadas pelas Eqs.(4.21–4.22), respectivamente.

$$f_1 = \frac{(C_{\mathrm{A},i} - C_{\mathrm{A}}) \cdot F_i}{\rho_{\mathrm{m}} \cdot A_{\mathrm{t}} \cdot L} - \mathrm{k_o} \exp\left[\frac{-\mathrm{E_a}}{(\mathrm{R_g} \cdot (T + 273,15))}\right] C_{\mathrm{A}} = 0 \tag{4.21}$$

$$f_2 = \frac{(C_{\mathrm{B},i} - C_{\mathrm{B}}) \cdot F_i}{\rho_{\mathrm{m}} \cdot A_{\mathrm{t}} \cdot L} + \mathrm{k_o} \exp\left[\frac{-\mathrm{E_a}}{(\mathrm{R_g} \cdot (T + 273,15))}\right] C_{\mathrm{A}} = 0 \qquad (4.22)$$

Em que $C_{\mathrm{A},i}$ e $C_{\mathrm{B},i}$ são as concentrações molares do reagente A e do produto B na corrente de alimentação respectivamente, em kmol/m^3; F_i é a vazão mássica da corrente de alimentação, em t/min; L é o nível do reator, em m; T é a temperatura do reator, em °C; ρ_{m} é a massa específica da mistura reacional, em kg/m^3; $\mathrm{E_a}$ é energia de ativação da reação, em J/kmol; $\mathrm{R_g}$ é a constante universal dos gases, em J/(kmol· K); $\mathrm{k_o}$ é o fator pré-exponencial da reação, em 1/min.

Neste estudo de caso somente a vazão mássica de alimentação (F_i), o nível (L) e a temperatura (T) do reator, serão consideradas como grandezas de entrada do sistema MIMO de medição. Nas demais variáveis (aqui classificadas como parâmetros do sistema MIMO) são assumidas que suas respectivas incertezas são desprezíveis em relação às incertezas das grandezas de entrada especificadas (F_i, L e T). Os valores desses parâmetros são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Parâmetros do reator CSTR.

Parâmetros	**Valores**
$C_{\mathrm{A},i}$ (kmol/m^3)	$16,22$
$C_{\mathrm{B},i}$ (kmol/m^3)	$0,65$
ρ_{m} (kg/m^3)	$1,00 \times 10^3$
$\mathrm{E_a}$ (J/kmol)	$1,18 \times 10^7$
$\mathrm{R_g}$ (J/kmol· K)	$8,31 \times 10^3$
$\mathrm{k_o}$ (1/min)	$64,43$

Um experimento foi realizado para obter dados de medição referente às grandezas de entrada F_i, L e T. A aquisição dos dados de medição das grandezas de entrada foi caracterizada pelos seguintes aspectos: série de observações independentes de cada grandeza de entrada foram amostradas; correções sistemáticas, como também resolução da escala dos instrumentos de medição, foram consideradas na construção de cada função metrológica, respectivamente. Na análise experimental dos dados de medição foi constatado que as grandezas de entrada são estatisticamente independentes, ou seja, a matriz de covariância $\mathbf{U_x}$ de tais grandezas é diagonal. Os valores das estimativas e as respectivas incertezas padrão das grandezas de entrada são mostrados na Tabela 4.2.

O conhecimento das informações referentes às grandezas de entrada permite aplicar ambos os métodos MLPU e MLPP para avaliar a matriz de covariância $\mathbf{U_y}$ e os intervalos de abrangência individuais (I_j) das grandezas de saída (mensurandos), conforme procedimento apresentado nas Figuras 4.1 e 4.2, respectivamente. Para a

Tabela 4.2: Parâmetros metrológicos das grandezas de entrada: vazão mássica de alimentação, nível e temperatura do reator CSTR.

Grandezas	**Estimativa** x_i	**Incerteza padrão** $u(x_i)$
F_i (t/min)	$1,5$	$0,3$
L (m)	$0,99$	$0,02$
T (°C)	59	4

aplicação do método MLPP é necessário estabelecer o número de amostras de Monte Carlo (M) adequado para o sistema MIMO de medição. A escolha adequada para M foi obtida mediante a aplicação da análise de sensibilidade das funções de medição, baseada na tolerância numérica associada à matriz de covariância das grandezas de saída ($\mathbf{U_y}$). Para a aplicação desse método foi atribuída uma PDF gaussiana para cada grandeza de entrada F_i, L e T, respectivamente, cujas esperanças (médias) e desvios padrão são apresentados na Tabela 4.2.

Na análise de sensibilidade do MCM foram considerados dois algarismos significativos para cada elemento de $\mathbf{U_y}$ e a estimativa inicial para as amostras de Monte Carlo foi $M = 10^7$. Os experimentos numéricos foram implementados em linguagem MATLAB (versão 7.8) sob o sistema operacional Windows Server 2003, por meio de um PC com 3,0 GHz de freqüência, 4 GB de memória RAM e um processador Intel Xeon. Após a aplicação da análise de sensibilidade nas funções de medição, o número de amostras de Monte Carlo a ser considerado neste sistema MIMO de medição é $M = 4 \times 10^7$.

Os resultados processados pelo método não linear MLPP foram comparados com os resultados provenientes do método linear MLPU. As PDFs individuais (marginais), geradas pelo método MLPP, de cada mensurando e os respectivos intervalos de abrangência estimados por ambos os métodos, com base em uma probabilidade de abrangência $p = 90\%$, são apresentadas nas Figuras 4.4 e 4.5. Os valores das estimativas das concentrações molares do reagente e do produto e suas respectivas incertezas padrão, obtidos pelos métodos MPLU e MLPP, são apresentados no interior das Figuras 4.4 e 4.5, respectivamente.

Como pode ser observado nas Figuras 4.4 e 4.5, os resultados provenientes da abordagem não linear (método MLPP) diferem significativamente dos resultados oriundos da abordagem linear (método MLPU). Esta afirmação é mais evidente quando se compara os desvios percentuais de cada resultado dos mensurandos (estimativa, incerteza padrão, limites inferior e superior) do método MPLU em relação ao método MLPP, apresentados nas Tabelas 4.3 e 4.4.

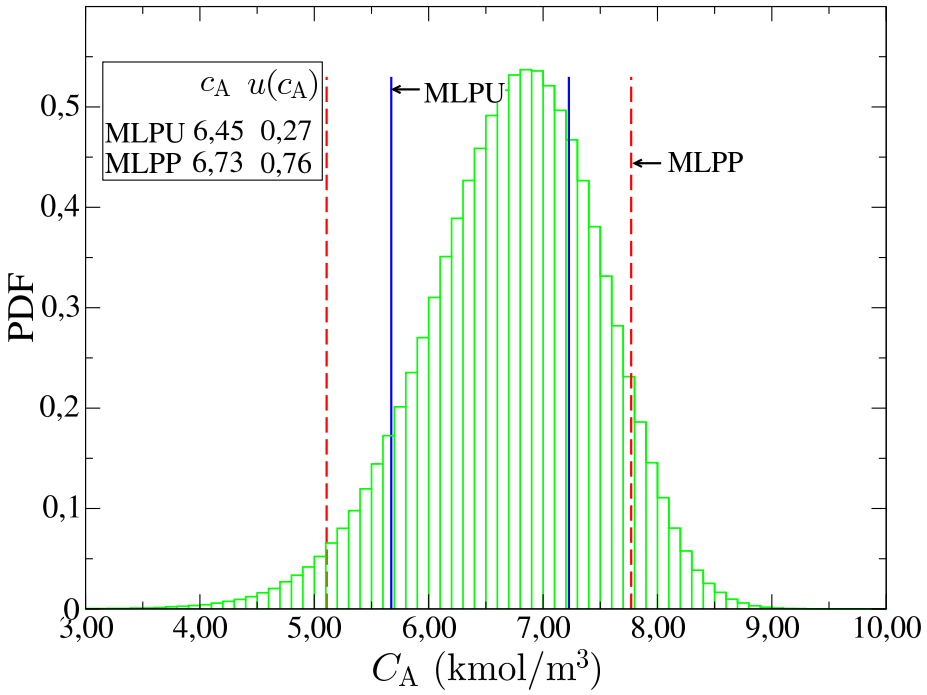

Figura 4.4: PDF marginal da concentração molar do reagente A estimada pelo método MLPP. As linhas verticais (cheias e tracejadas) indicam os intervalos de abrangência determinados pelos métodos MLPU e MLPP, respectivamente.

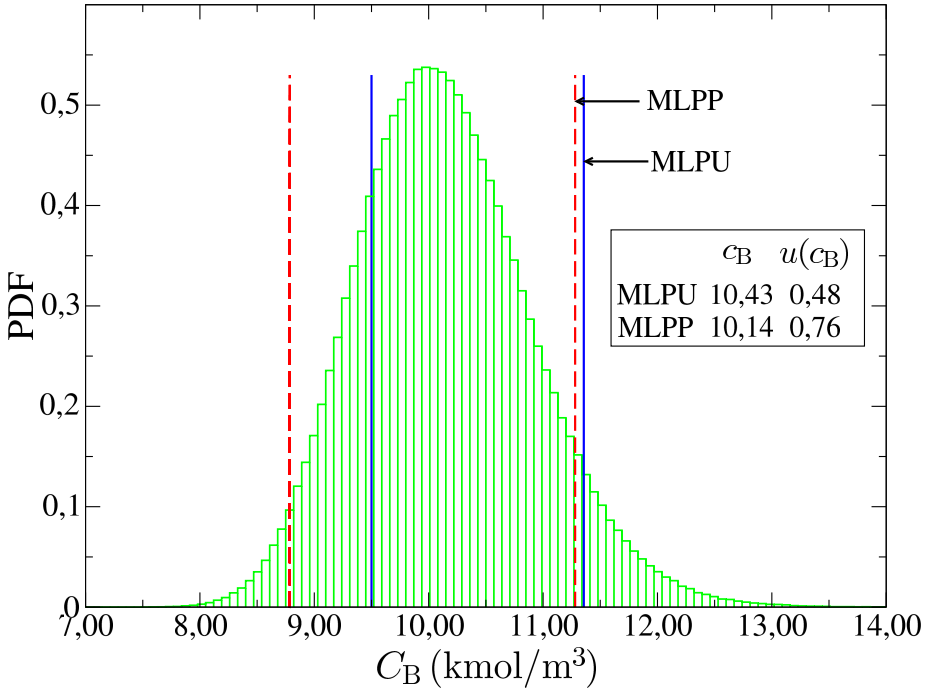

Figura 4.5: PDF marginal da concentração molar do produto B estimada pelo método MLPP. As linhas verticais (cheias e tracejadas) indicam os intervalos de abrangência determinados pelos métodos MLPU e MLPP, respectivamente.

Tabela 4.3: Resultados obtidos para a concentração molar do reagente A por ambos os métodos MLPU e MLPP.

Resultados	**Método MLPU**	**Método MLPP**	**Desvio percentual (%)**
Estimativa (kmol/m^3)	$6,45$	$6,73$	$-4,21$
Incerteza padrão (kmol/m^3)	$0,27$	$0,76$	$-65,04$
Limite inferior (kmol/m^3)	$5,67$	$5,11$	$+11,05$
Limite superior (kmol/m^3)	$7,23$	$7,77$	$-6,99$

Tabela 4.4: Resultados obtidos para a concentração molar do produto B por ambos os métodos MLPU e MLPP.

Resultados	**Método MLPU**	**Método MLPP**	**Desvio percentual (%)**
Estimativa (kmol/m^3)	$10,43$	$10,14$	$+2,80$
Incerteza padrão (kmol/m^3)	$0,48$	$0,76$	$-37,25$
Limite inferior (kmol/m^3)	$9,50$	$8,79$	$+8,13$
Limite superior (kmol/m^3)	$11,36$	$11,28$	$+0,67$

As discrepâncias existentes entre os métodos podem ser explicadas pela forte não linearidade das funções de medição que compõem o sistema MIMO de medição. Como o método MLPP considera todas as não linearidades das funções de medição, seus resultados são melhores do que aqueles provenientes do método linear (MLPU), principalmente na estimativa dos intervalos de abrangência.

O método MLPU sempre considera um intervalo de abrangência simétrico de uma PDF gaussiana, fato que não ocorre no método MLPP, uma vez que tais intervalos são estimados de uma PDF marginal empírica de cada mensurando, seja essa simétrica ou assimétrica, gaussiana ou não. Entretanto, o método MLPP requer um tempo de processamento muito significativo em relação ao método MLPU, conforme apresentado na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Comparação entre os tempos de processamento provenientes dos métodos MLPU e MLPP.

Métodos	**tempo de processamento (s)**
MLPU	60,5
MLPP	3,5 $\times 10^5$ (ou 4 dias)

Portanto, quando as funções de medição do sistema MIMO forem não lineares o uso do método MLPP é mais robusto do que o método MLPU, visto que sua

aplicação gera resultados mais consistentes à medida que a não linearidade das funções de medição se tornam mais significativas.

4.5 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados dois métodos para expressar e avaliar a incerteza de medição em sistemas MIMO: o método linear (MLPU), baseado na lei de propagação de incertezas, e o método não linear (MLPP), baseado na lei de propagação de PDFs através do MCM.

O método MLPU pode ser usado para caracterizar a medição de sistemas MIMO devido às seguintes vantagens: primeiro, não há necessidade do conhecimento completo da PDF conjunta das grandezas de entrada, são requeridos apenas o vetor esperança e sua matriz de covarância associada; segundo, possui cálculos simples para avaliar a matriz de covariância das grandezas de saída do sistema MIMO que, por sua vez, podem ser facilmente implementados em qualquer linguagem computacional.

Por outro lado, o método MLPU possui limitações relevantes quanto ao seu uso, o que justifica a necessidade de um método mais robusto para expressar e avaliar a incerteza de medição dos sistemas MIMO. As principais limitações desse método são: quando as funções de medição possuem não linearidades significativas, a expansão em série de Taylor truncada nos termos de primeira ordem deve fornecer resultados inconsistentes ou enganosos; na estimativa dos intervalos de abrangência individuais das grandezas de saída é necessário supor uma PDF gaussiana para os mensurandos Y_j e suas respectivas incertezas padrão $u(y_j)$, além disso, as grandezas de entrada e suas respectivas incertezas padrão devem ser mutuamente independentes e gaussianas também. Ou seja, para a aplicação do método MLPU são requeridas muitas hipóteses que, em certas situações práticas, não podem ser satisfeitas.

A avaliação da incerteza de medição por meio do método não linear MLPP é menos restritivo do que o método MLPU, isto é, esse método requer menos hipóteses para sua aplicação em relação ao método MLPU. As vantagens mais relevantes do método MLPP são: fornece uma PDF conjunta e PDFs individuais (marginais) para as grandezas de saída; não existem limitações no que tange à natureza não linear do modelo de medição MIMO, i.e., esse método considera todas as não linearidades das funções de medição; não há necessidade de supor que a PDF de cada grandeza de entrada deva ser gaussiana para estimar os intervalos de abrangência individuais dessas grandezas.

Entretanto, o método MLPP também possui limitações: assim como nos sistemas MISO, a atribuição apropriada da PDF referente às grandezas de entrada pode ser difícil por causa da imprecisão de dados ou falta de conhecimento dos processos

físico-químicos que influenciam o processo de medição; o tempo de processamento pode ser muito longo à medida que se aumenta a complexidade e não linearidade dos modelos de medição; por fim, outra dificuldade reside na geração de números aleatórios para uma PDF conjunta não gaussiana, visto que a maioria dos *softwares* geram números aleatórios somente para PDF conjunta gaussiana; uma alternativa para essa restrição é recorrer as funções cópulas, ver referência no capítulo 2.

A partir do anteriormente exposto sobre as vantagens e as desvantagens dos métodos MPLU e MLPP, pode-se concluir que o método MLPU deve ser usado em sistemas lineares de medição, enquanto que o método MLPP é mais abrangente e pode ser aplicado para quaisquer modelos de medição, inclusive os modelos não lineares. Portanto, o método não linear MLPP é mais robusto para expressar e avaliar a incerteza de medição em sistemas multivariáveis não lineares do que o método linear MLPU.

Capítulo 5

Conclusões e sugestões para continuidade da pesquisa

"O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano."
"Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes."

Sir. Isaac Newton

Neste derradeiro capítulo são apresentadas as principais conclusões, bem como sugestões de futuros trabalhos para continuidade da pesquisa abordada na presente Dissertação. O objetivo primordial do presente trabalho foi contribuir com a literatura no que tange à teoria e aos aspectos práticos de métodos para a avaliação da incerteza de medição.

Com relação à literatura nacional, o capítulo 2 esboçou aspectos teóricos e práticos dos métodos propostos pelo GUM e seu Suplemento 1 (GUM–S1). Portanto, embora o capítulo 2 não contenha informações originais, é a primeira vez que um estudo dessa abrangência sobre esses métodos é escrito em língua portuguesa.

No capítulo 2, o tratamento matemático dos métodos analisados foi rigoroso e profundo. Além disso, uma compilação e uma análise crítica das informações dispersas na literatura especializada sobre cada etapa desses métodos, assim como os méritos e os deméritos baseados em uma função de medição (estudo de caso) comum em processos de medição, foram apresentados. A relevância do estudo delineado no capítulo 2, para a literatura nacional, é constatada por sua publicação no periódico Controle & Automação (MARTINS *et al.*, 2010b).

Quanto às contribuições originais do presente trabalho, estas foram delineadas nos respectivos capítulos 3 e 4.

Expressões generalizadas de segunda e terceira ordem para a incerteza padrão de medição, baseada na expansão em série de Taylor das funções de medição truncadas nos termos de 2ª e 3ª derivadas, respectivamente, foram desenvolvidas neste trabalho (capítulo 3). Essas expressões (segunda e terceira ordem) revelaram–se úteis para expressar e avaliar a incerteza padrão de funções de medição não lineares a

um baixo custo computacional. Portanto, essas expressões podem ser devidamente incorporadas ao GUM para a avaliação da incerteza de medição em sistemas não lineares.

O capítulo 4 apresentou os aspectos teóricos e práticos dos métodos linear (MLPU) e não linear (MLPP) para a avaliação da incerteza de medição em sistemas MIMO. Neste capítulo 4 foi demonstrada uma metodologia para expressar e avaliar a incerteza de medição em sistemas MIMO, além disso, as vantagens e as desvantagens de ambos os métodos foram esboçadas de modo a proporcionar uma reflexão para a escolha adequada dos mesmos.

O método MLPU é bastante utilizado para expressar a incerteza de medição em sistemas MIMO, porém, quando a não linearidade das funções de medição são significativas e as grandezas não possuem comportamentos gaussianos, os resultados gerados por esse método tornam–se inconsistentes ou até mesmo errôneos. Em contraste ao método MLPU, o método numérico não linear MLPP permite avaliar a incerteza usando funções de medições não lineares, bem como considera quaisquer PDFs para as grandezas de saída e entrada que compõem tais funções para estimativa dos intervalos de abrangência individuais dos mensurandos. O método numérico, baseado no MCM, utilizado no MLPP permite avaliar a incerteza de medição em situações nas quais o tratamento analítico torna–se muito complexo, excessivamente trabalhoso, complicado e até mesmo impossível. Sua desvantagem reside no fato de exigir um esforço computacional significativo em relação ao método MLPU; contudo, a disponibilidade de computadores cada vez mais rápidos e possantes em processamento e uso da memória RAM torna o método MLPP mais exequível.

Os resultados obtidos de cada tema estudado no presente trabalho sugerem algumas alternativas de trabalhos para superar as limitações apontadas.

No tocante dos métodos de ordens superiores da incerteza de medição, um trabalho a ser desenvolvido consiste em determinar intervalos de abrangência de segunda e terceira ordem para o mensurando. Ou seja, um procedimento equivalente àquele proposto pelo GUM deveria ser requerido para estimar tais intervalos de abrangência através desses métodos propostos. Portanto, expressões mais extensas ou gerais da fórmula W–S, i.e., fórmula W–S de segunda e terceira ordem, devem ser desenvolvidas de modo que seja possível estimar os graus de liberdade efetivos, os fatores de abrangência e, como consequência, os intervalos de abrangência de segunda e terceira ordem, respectivamente, para o mensurando.

Com relação ao método linear (MLPU) e ao método não linear (MLPP) para a avaliação da incerteza de medição em sistemas MIMO, métodos alternativos podem ser desenvolvidos de maneira a superar as respectivas limitações impostas por ambos os métodos MLPU e MLPP. Trata–se de desenvolver expressões de segunda e terceira

ordem para a matriz de covariância dos múltiplos mensurandos que constituem os sistemas MIMO de medição. Estas expressões podem ser úteis para caracterizar a não linearidade das funções de medição do sistema MIMO; tal característica supera a limitação do método linear MLPU, além disso, o esforço computacional e o tempo de processamento dos métodos de ordens superiores são inferiores aos necessários pelo método não linear baseado no MCM (MLPP). Portanto, esses métodos propostos (segunda e terceira ordem) podem, em muitos problemas de medição MIMO, ser mais úteis do que os métodos MLPU e MLPP devido a suas características intermediárias em relação às características desses últimos.

Além das sugestões de futuros trabalhos citadas anteriormente, outros temas, não abordados nesta Dissertação, são relevantes para esta linha de pesquisa, a saber: desenvolvimento de métodos para a avaliação da incerteza em sistemas dinâmicos a partir das abordagens frenquencista e bayesiana; aplicação da estatística bayesiana ou da lógica fuzzy para a avaliação da incerteza em sistemas sem medição. O autor do presente trabalho tem a intenção de continuar nesta linha de pesquisa; sua manifestação de continuidade mostra–se evidente através da publicação dos trabalhos: MARTINS e KALID (2010d); MARTINS *et al.* (2010a); RODRIGUES e MARTINS (2009); RODRIGUES *et al.* (2009), os quais abordam os dois últimos temas sugeridos, que serão objetos de estudo na Tese de doutorado do autor, a iniciar em agosto deste ano.

Apêndice A

Demonstração das expressões de ordens superiores da incerteza padrão de medição

"A alegria está na luta, na tentativa, no sofrimento envolvido e não na vitória propriamente dita."

Mahatma Gandhi

No presente apêndice são demonstradas as principais etapas para dedução das expressões generalizadas de segunda e terceira ordem da incerteza padrão de medição. Essas expressões são aplicadas somente em sistemas de medição que são constituídos de grandezas de entrada estatisticamente independentes.

A.1 Expressão de segunda ordem

Na construção da expressão de segunda ordem da incerteza padrão de medição é necessário expandir a função de medição (Eq.(2.1)) em série de Taylor, em torno das estimativas x_i das grandezas de entrada X_i, e truncá–la nos termos de segunda ordem. Para simplificar a notação, o termo $X_i - x_i$ será substituído por Θ_i, i.e., $\Theta_i = X_i - x_i$. Dessa maneira a expressão obtida através dessa expansão será dada por:

$$Y_{2\text{ord}} = f(x_1, \ldots, x_N) + \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Theta_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\Theta_i\Theta_j \tag{A.1}$$

As expressões para o resultado de medição e sua incerteza padrão são decorrentes dos operadores matemáticos esperança[1] e variância[2], respectivamente. Dessa forma, a aplicação do operador matemático esperança em ambos os lados da Eq.(A.1) representa o resultado de medição (ou melhor estimativa $y_{2\text{ord}} = \mathrm{E}[Y_{2\text{ord}}]$ do mensurando Y) associado ao método de segunda ordem.

$$y_{2\text{ord}} = \mathrm{E}[f(x_1, \ldots, x_N)] + \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)\mathrm{E}[\Theta_i] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\mathrm{E}[\Theta_i\Theta_j] \quad \text{(A.2)}$$

Como exposto anteriormente no início do presente apêndice, todas as grandezas de entrada da função de medição serão consideradas independentes, i.e., $\mathrm{E}[\Theta_i\Theta_j] = \mathrm{E}[\Theta_i]\mathrm{E}[\Theta_j]$, $\forall\, i \neq j$; além disso, todo termo $\mathrm{E}[\Theta_i]$ será nulo uma vez que $x_i = \mathrm{E}[X_i]$. Logo, aplicando as restrições citadas anteriormente, a Eq.(A.2) pode ser reescrita como:

$$y_{2\text{ord}} = f(x_1, \ldots, x_N) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)u^2(x_i) \quad \text{(A.3)}$$

Como a incerteza padrão de medição depende do segundo momento estatístico centrado na média, a expressão obtida da diferença entre o mensurando $Y_{2\text{ord}}$ e sua esperança $y_{2\text{ord}}$ é necessária. Então, a diferença entre a Eq.(A.1) e Eq.(A.2) é dada por:

$$(Y_{2\text{ord}} - y_{2\text{ord}}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial X_i}(\theta_i - \mathrm{E}[\theta_i]) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\left(\theta_i\theta_j - \mathrm{E}\left[\theta_i\theta_j\right]\right) \quad \text{(A.4)}$$

O quadrado da Eq.(A.4) rende a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}(Y_{2\text{ord}} - y_{2\text{ord}})^2 = {} & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial X_j}\Big)\theta_i\theta_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_k}\Big)(\theta_i\theta_j\theta_k - \theta_i\mathrm{E}\left[\theta_j\theta_k\right]) \\ & \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_k \partial X_p}\Big)\Big(\theta_i\theta_j\theta_k\theta_p - 2\theta_i\theta_j\mathrm{E}\left[\theta_k\theta_p\right] + \mathrm{E}\left[\theta_i\theta_j\right]\mathrm{E}\left[\theta_k\theta_p\right]\Big)\end{aligned} \quad \text{(A.5)}$$

[1]A esperança (ou média) de uma grandeza aleatória Z, cuja *PDF* é representada por $g(Z)$, é definida como: $z = \mathrm{E}[Z] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} Zg(Z)dZ$.

[2]A variância (incerteza padrão ao quadrado) de uma grandeza aleatória Z, cuja *PDF* é representada por $g(Z)$, é obtida a partir da definição do segundo momento estatístico centrado na média, i.e.: $u^2(z) = \mathrm{Var}[Z] = \mathrm{E}[(Z - \mathrm{E}[Z])^2] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty}(Z - \mathrm{E}[Z])^2 g(Z)dZ$.

Aplicando o operador esperança em ambos os lados da Eq.(A.5), considerando a hipótese de independência entre as grandezas de entrada, a incerteza padrão de medição ($u^2(y_{2\text{ord}})$) associada ao método de segunda ordem é determinada segundo a expressão:

$$\begin{aligned} u^2(y_{2\text{ord}}) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial X_j}\Big)\mathrm{E}[\theta_i\theta_j] + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_k}\Big)\mathrm{E}[\theta_i\theta_j\theta_k] \\ &\quad \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_k \partial X_p}\Big)\Big(\mathrm{E}[\theta_i\theta_j\theta_k\theta_p] - \mathrm{E}\left[\theta_i\theta_j\right]\mathrm{E}\left[\theta_k\theta_p\right]\Big) \end{aligned} \tag{A.6}$$

Caso os índices dos somatórios da Eq.(A.6) sejam reduzidos e considerando os parâmetros estatísticos assimetria (γ) e curtose (κ), definidos no capítulo 3, i.e., $\mathrm{E}[\Theta_i^3] = \gamma_i u^3(x_i)$ e $\mathrm{E}[\Theta_i^4] = \kappa_i u^4(x_i)$, a expressão de segunda ordem da incerteza padrão de medição pode ser melhor reescrita como:

$$\begin{aligned} u^2(y_{2\text{ord}}) &= \sum_{i=1}^{N}\underbrace{\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)^2 u^2(x_i)}_{\text{primeira ordem}} + \gamma_i\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)u^3(x_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\kappa_i - 1}{4}\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)^2 u^4(x_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)^2 u^2(x_i)u^2(x_j) \end{aligned} \tag{A.7}$$

A.2 Expressão de terceira ordem

A expressão de terceira ordem da incerteza padrão de medição é obtida pelo truncamento dos termos de terceira ordem da expansão em série de Taylor da função de medição. Dessa forma a expressão de terceira ordem para o mensurando Y deve ser representada por:

$$\begin{aligned} Y \approx Y_{3\text{ord}} &= f(x_1,\ldots,x_N) + \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\theta_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\theta_i\theta_j \\ &\quad + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}\Big)\theta_i\theta_j\theta_k \end{aligned} \tag{A.8}$$

O resultado de medição ($y_{3\text{ord}} = \mathrm{E}[Y_{3\text{ord}}]$) é determinado após a aplicação do operador esperança em ambos os lados da Eq.(A.8):

$$
\begin{aligned}
y_{3\text{ord}} &= \mathrm{E}\left[f(x_1,\ldots,x_N)\right] + \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\mathrm{E}\left[\theta_i\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\mathrm{E}\left[\theta_i\theta_j\right] \\
&\quad + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}\Big)\mathrm{E}\left[\theta_i\theta_j\theta_k\right] \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

Reduzindo os índices dos somatórios da Eq.(A.9), a expressão do resultado de medição $y_{3\text{ord}}$ torna–se:

$$
y_{3\text{ord}} = f(x_1,\ldots,x_N) + \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)u^2(x_i) + \frac{\gamma_i}{6}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)u^3(x_i)\right\} \qquad \text{(A.10)}
$$

A diferença entre a Eq.(A.8) e a Eq.(A.9) rende a seguinte expressão:

$$
\begin{aligned}
(Y_{3\text{ord}} - y_{3\text{ord}}) &= \sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)(\theta_i - \mathrm{E}[\theta_i]) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\left(\theta_i\theta_j - \mathrm{E}\left[\theta_i\theta_j\right]\right) \\
&\quad + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}\Big)\Big(\theta_i\theta_j\theta_k - \mathrm{E}\left[\theta_i\theta_j\theta_k\right]\Big) \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

Como demonstrado no método de segunda ordem, a incerteza padrão associada ao resultado de medição é decorrente do segundo momento estatístico centrado na média; então o quadrado da Eq.(A.11) é necessário para determinar a expressão de terceira ordem da incerteza padrão de medição. Logo, elevando ao quadrado ambos os lados dessa última equação obtém–se:

$$
\begin{aligned}
(Y_{3\text{ord}} - y_{3\text{ord}})^2 &= \Bigg\{\Bigg[\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\theta_i\Bigg]^2 + \Bigg[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\left(\theta_i\theta_j - \mathrm{E}\left[\theta_i\theta_j\right]\right)\Bigg]^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_j \partial X_k}\Big)\theta_i\theta_j\theta_k - \theta_i\mathrm{E}\left[\theta_j\theta_k\right]\Bigg\} \\
&\quad + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_j \partial X_k \partial X_p}\Big)\Big[\theta_i\theta_j\theta_k\theta_p - \theta_i\mathrm{E}\left[\theta_j\theta_k\theta_p\right]\Big] \\
&\quad + \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_k \partial X_p \partial X_q}\Big)\Big[\theta_i\theta_j\theta_k\theta_p\theta_q \\
&\quad - \theta_k\theta_p\theta_q\mathrm{E}[\theta_i\theta_j] - \theta_i\theta_j\mathrm{E}[\theta_k\theta_p\theta_q] + \mathrm{E}[\theta_i\theta_j]\mathrm{E}[\theta_k\theta_p\theta_q]\Big] \\
&\quad + \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sum_{r=1}^{N}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_p \partial X_q \partial X_r}\Big)\Big[\theta_i\theta_j\theta_k\theta_p\theta_q\theta_r \\
&\quad - \theta_i\theta_j\theta_k\mathrm{E}[\theta_p\theta_q\theta_r] - \theta_p\theta_q\theta_r\mathrm{E}[\theta_i\theta_j\theta_k] + \mathrm{E}[\theta_i\theta_j\theta_k]\mathrm{E}[\theta_p\theta_q\theta_r]\Big] \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

A incerteza padrão de medição associada ao método de terceira ordem ($u(y_{3\text{ord}})$) é obtida pela aplicação do operador esperança na Eq.(A.12), cuja equação resultante é expressa da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
u^2(y_{3\text{ord}}) \;=\;& u^2(y_{2\text{ord}}) + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_j \partial X_k \partial X_p}\Big)\mathrm{E}[\theta_i\theta_j\theta_k\theta_p] \\
&+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_k \partial X_p \partial X_q}\Big)\Big[\mathrm{E}[\theta_i\theta_j\theta_k\theta_p\theta_q] - \mathrm{E}[\theta_k\theta_p\theta_q]\mathrm{E}[\theta_i\theta_j]\Big] \\
&+\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\sum_{r=1}^{N}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_p \partial X_q \partial X_r}\Big)\Big[\mathrm{E}[\theta_i\theta_j\theta_k\theta_p\theta_q\theta_r] \\
&-\mathrm{E}[\theta_i\theta_j\theta_k]\mathrm{E}[\theta_p\theta_q\theta_r]\Big] \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}
$$

Reduzindo os índices do somatório da Eq.(A.13), a expressão da incerteza padrão de medição pode ser reescrita da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
u^2(y_{3\text{ord}}) \;=\;& u^2(y_{2\text{ord}}) + \sum_{i=1}^{N}\frac{\kappa_i}{3}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)u^4(x_i) \\
&+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)\Big\{\mathrm{E}[(X_i - x_i)^5] - \gamma_i u^5(x_i)\Big\} \\
&+\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{N}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)^2\Big\{\mathrm{E}[(X_i - x_i)^6] - \gamma_i^2 u^6(x_i)\Big\} \\
&+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\Big(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j^2}\Big)u^2(x_i)u^2(x_j) \qquad \text{(A.14)} \\
&+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\gamma_i\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2 \partial X_j}\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j^2}\Big)\Big\}u^3(x_i)u^2(x_j) \\
&+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\kappa_i\Big\{\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2 \partial X_j}\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^3}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j^2}\Big)\Big\}u^4(x_i)u^2(x_j) \\
&+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\gamma_i\gamma_j\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j^2}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2 \partial X_j}\Big)u^3(x_i)u^3(x_j) \\
&+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{N}\Big\{\frac{1}{6}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k}\Big)^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_i^2 \partial X_j}\Big)\Big(\frac{\partial^3 f}{\partial X_j \partial X_k^2}\Big)\Big\}u^2(x_i)u^2(x_j)u^2(x_k)
\end{aligned}
$$

Apêndice B

Produção Bibliográfica

Ao longo do período de construção desta pesquisa, alguns trabalhos (aceitos, apresentados, publicados ou submetidos) foram desenvolvidos. Estes trabalhos seguem listados abaixo:

1. Martins, M. A. F., Kalid, R. A., 2009, Avaliação da incerteza de medição baseada no terceiro e quarto momento estatístico. In: X Seminário de Pesquisa e Pós-Graduação do PIBIC-UFBA;

2. Martins, M. A. F., Kalid, R., 2010a, Generalized expressions of second and third order for standard measurement uncertainty. Submetido ao periódico internacional Measurement;

3. Martins, M. A. F., Kalid, R., 2010b, Avaliação da incerteza de medição em sistemas multivariáveis baseada em simulações de Monte Carlo. In: VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica;

4. Martins, M. A. F., Kalid, R., 2010c, Metodologia para avaliação da incerteza de medição em regime dinâmico de sistemas contínuos. In: XVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Química;

5. Martins, M. A. F., Kalid, R., 2010d, Métodos clássicos para a avaliação da incerteza de medição em sistemas multivariáveis. Artigo submetido ao periódico Controle & Automação (em fase de revisão);

6. Martins, M. A. F., Amaro, C. A., Souza, L. S., Kalid, R., Kiperstok, A., 2010, New objective function for data reconciliation in water balance from industrial processes. Journal of Cleaner Production. Vol. 18 (12), 1184–1189;

7. Martins, M. A. F., Kalid, R., Nery, G. A., Teixeira, L., Gonçalves, G., 2010, Comparação entre os métodos linear e não linear para a avaliação da incerteza de medição. Controle & Automação. Vol. 21 (6), 557–576;

8. Martins, M. A. F., Pessoa, R. W. S., Kalid, R. A., 2009, Análise estatística do uso de um filtro de Kalman a um sistema de medição com ruídos. In: V Congresso Nacional de Metrologia;

9. Rodrigues, I., Martins, M. A. F., Hartmann, A. E. B., Kalid, R. A., 2009, Utilização de questionários na estimativa da incerteza em reconciliação de dados do balanço hídrico. In: VIII Congresso Nacional de Engenharia Química – Iniciação Científica;

10. Rodrigues, I., Martins, M. A. F., 2009, Lógica Fuzzy aplicada em reconciliação de dados de balanço hídrico. In: XXVIII Seminário Estudantil de Pesquisa do PIBIC-UFBA.

Referências Bibliográficas

ALBERTAZZI, A., SOUZA, A., 2008, *Fundamentos de Metrologia Científica e Industrial*. Barueri, Brasil, Manole.

ARFKEN, G., WEBER, H., 2005, *Mathematical method for physicists*. New York: Elsevier.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 1977, *NBR 5891: Regras de arredondamento na numeração decimal*. Rio de Janeiro.

BALLICO, M., 2000, "Limitations of the Welch-Satterthwaite approximation for measurement uncertainty calculations", *Metrologia*, v. 37, n. 1, pp. 61–64.

BENTLEY, R. E., 2005, *Uncertainty in Measurement: The ISO Guide*. Technology transfer series monograph n 1, National Measurement Institute of Australia.

BEVINGTON, P., ROBISON, D. K., 1992, *Data Reduction and Errors Analysis for the Physical Science*. New York: Mc Graw Hill.

BICH, W., 1996, "Simple formula for the propagation of variances and covariances", *Metrologia*, v. 33, n. 2, pp. 181–183.

BICH, W., COX, M. G., HARRIS, P. M., 1993/94, "Uncertainty Modelling in Mass Comparisons", *Metrologia*, v. 30, pp. 495–502.

BICH, W., CALLEGARO, L., PENNECCHI, F., 2006a, "Non-linear models and best estimates in the GUM", *Metrologia*, v. 43, n. 4, pp. S196–S199.

BICH, W., COX, M. G., HARRIS, P. M., 2006b, "Evolution of the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement", *Metrologia*, v. 43, pp. S161–S166.

BIPM, IEC, IFCC, et al., 2008a, *International vocabulary of metrology : Basic and general concepts and associated terms (VIM). Joint Committee for Guides in Metrology*. Relatório técnico, Bureau International des Poids et Measures, JCGM 200:2008, a. Documento traduzido pelo INMETRO, primeira edição brasileira em 2009.

BIPM, IEC, IFCC, et al., 2008b, *Evaluation of Measurement Data - Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Joint Committee for Guides in Metrology.* Relatório técnico, Bureau International des Poids et Measures, JCGM 100:2008, b. Primeira versão desse documento referente ao ano de 1995 foi traduzido pelo INMETRO e ABNT, terceira edição brasileira em 2003.

BIPM, IEC, IFCC, et al., 2008c, *Evaluation of Measurement Data-Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement-Propagation of distributions using a Monte Carlo method.* Relatório técnico, Joint Committee for Guides in Metrology, Bureau International des Poids et Measures, JCGM 200:2008, c.

BRADARIC, I., PETROPULU, A. P., DIAMANTARAS, K. I., 2002, "Subspace design of low-rank estimators for higher-order statistics", *Journal of the Franklin Institute*, v. 339, n. 2, pp. 161 – 187. ISSN: 0016-0032.

CIPM, 1980, *Rapport BIPM-80/3, Report on the BIPM enquiry on error statements.* Relatório técnico, Bureau International des Poids et Measures.

CORDERO, R. R., ROTH, P., 2005, "On two methods to evaluate the uncertainty of derivatives calculated from polynomials fitted to experimental data", *Metrologia*, v. 42, pp. 39–44.

COX, M. G., DAINTON, M. P., HARRIS, P. M., 2001a, *Software Specifications for Uncertainty Evaluation and Associated Statistic Analysis.* Relatório técnico, National Physical Laboratory, Teddington, UK, a.

COX, M. G., DAINTON, M. P., HARRIS, P. M., 2001b, *Software Support for Metrology Best Pratice Guide.* Relatório Técnico 06, National Physical Laboratory, Teddington, UK, b.

COX, M., HARRIS, P., 2003, "The GUM and its planned supplemental guides", *Accred Qual Assur*, v. 8, n. 4, pp. 375–379.

COX, M., HARRIS, P., 2005, "An outline of Supplement 1 to the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement on numerical methods for the propagation of distributions", *Measurement Techniques*, v. 48, n. 4, pp. 336–345.

COX, M. G., SIEBERT, B. R. L., 2006, "The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty", *Metrologia*, v. 43, pp. S178 – S188.

COX, M. G., DESENFANT, M., HARRIS, P. M., et al., 2003, "Model–based measurement uncertainty evaluation, with applications in testing", *Accred Qual Assur*, v. 8, pp. 548–554.

DA COSTA-FELIX, R. P. B., 2006, "Type B uncertainty in sound power measurements using comparison method", *Measurement*, v. 39, pp. 169–175.

D'ANTONA, G., 2004, "Measurement data processing using random matrices: a generalized formula for the propagation of uncertainty", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 53, pp. 537–545.

ELSTER, C., 2000, "Evaluation of measurement uncertainty in the presence of combined random and analogue-to-digital conversion errors", *Measurement Science and Technology*, v. 11, n. 9, pp. 1359–1363.

ELSTER, C., 2007, "Calculation of uncertainty in the presence of prior knowledge", *Metrologia*, v. 44, n. 2, pp. 111–116.

ESWARD, T. J., DE GINESTOUS, A., HARRIS, P. M., et al., 2007, "A Monte Carlo method for uncertainty evaluation implemented on a distributed computing system", *Metrologia*, v. 44, n. 5, pp. 319–326.

FAIRFIELD-SMITH, H., 1936, *J. Counc. Sci. Indust. Res*, v. 9, pp. 211.

FRENKEL, R. B., 2006, *Statistical Background to the ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement.* Technology transfer series monograph n 2, National Measurement Institute of Australia.

FRENKEL, R. B., KIRKUP, L., 2005, "Monte Carlo-based estimation of uncertainty owing to limited resolution of digital instruments", *Metrologia*, v. 42, pp. 27–30.

GIACOMO, P., 1981, "News from BIPM", *Metrologia*, v. 17, pp. 69–74.

GIACOMO, P., 1982, "News from BIPM", *Metrologia*, v. 18, pp. 43–44.

GIACOMO, P., 1987, "News from BIPM", *Metrologia*, v. 24, pp. 49–50.

GODEC, Z., 1997, "Standard uncertainty in each measurement result explicit or implicit", *Measurement*, v. 20, n. 2, pp. 97 – 101. ISSN: 0263-2241. doi: DOI:10.1016/S0263-2241(97)00020-1.

HALL, B. D., 2003, "Calculating measurement uncertainty for complex-valued quantities", *Measurement Science and Technology*, v. 14, n. 3, pp. 368–375.

HALL, B. D., 2004, "On the propagation of uncertainty in complex-valued quantities", *Metrologia*, v. 41, n. 3, pp. 173–177.

HALL, B. D., 2006, "Monte Carlo uncertainty calculations with small-sample estimates of complex quantities", *Metrologia*, v. 43, n. 3, pp. 220–226.

HALL, B. D., WILLINK, R., 2001, "Does "Welch-Satterthwaite"make a good uncertainty estimate?" *Metrologia*, v. 38, n. 1, pp. 9–15.

HERRADOR, M. A., GONZALEZ, A., 2004, "Evaluation of measurement uncertainty in analytical assays by means of Monte-Carlo simulation", *Talanta*, v. 64, n. 2, pp. 415 – 422. ISSN: 0039-9140.

HERRADOR, M. A., ASUERO, A. G., GONZÁLEZ, A. G., 2005, "Estimation of the uncertainty of indirect measurements from the propagation of distributions by using the Monte-Carlo method: An overview", *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, v. 79, n. 1-2, pp. 115 – 122. ISSN: 0169-7439.

INSTITUTO NACIONAL DE COLONIZAÇÃO E REFORMA AGRÁRIA (INCRA), 2008, *Norma Técnica para Georreferenciamento de Imóveis Rurais*, 2 ed.

KACKER, R., JONES, A., 2003, "On use of Bayesian statistics to make the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement consistent", *Metrologia*, v. 40, n. 5, pp. 235–248.

KACKER, R., TOMAN, B., HUANG, D., 2006, "Comparison of ISO-GUM, draft GUM Supplement 1 and Bayesian statistics using simple linear calibration", *Metrologia*, v. 43, pp. S167–S177.

KACKER, R., SOMMER, K.-D., KESSEL, R., 2007, "Evolution of modern approaches to express uncertainty in measurement", *Metrologia*, v. 44, n. 6, pp. 513–529.

KACKER, R. N., 2006, "Bayesian alternative to the ISO-GUM's use of the Welch-Satterthwaite formula", *Metrologia*, v. 43, n. 1, pp. 1–11.

KACKER, R. N., LAWRENCE, J. F., 2007, "Trapezoidal and triangular distributions for Type B evaluation of standard uncertainty", *Metrologia*, v. 44, n. 2, pp. 117–127.

KALID, R., 2005. "Planta didática simulada do PROTEC-UFBA". Programa de Pós-Graduação em Engenharia Industrial da EPUFBA , Salvador, Brasil. 15 de julho de 2009 <http://www.teclim.ufba.br/ead>.

KESSEL, R., KACKER, R., BERGLUND, M., 2006, "Coefficient of contribution to the combined standard uncertainty", *Metrologia*, v. 43, n. 4, pp. S189–S195.

KIRKUP, L., FRENKEL, R. B., 2006, *An Introduction to uncertainty in Measurement.* New York: Cambridge University Press.

LANDAU, D. P., BINDER, K., 2000, *A Guide to Monte Carlo Simulation in Statistical Physics.* Cambridge University Press.

LEE, P. M., 1997, *Bayesian Statistics.* Oxford University Press.

LEPEK, A., 2003, "A computer program for a general case evaluation of the expanded uncertainty", *Accred Qual Assur*, v. 8, pp. 296–299.

LIRA, I., 2002, *Evaluating the measurement uncertainty: fundamentals and practical guidance.* Institute of Physics Publishing.

LIRA, I., 2008, "The generalized maximum entropy trapezoidal probability density function", *Metrologia*, v. 45, n. 4, pp. L17–L20.

LIRA, I., 2009, "On the meaning of coverage probabilities", *Metrologia*, v. 46, n. 6, pp. 616–618.

LIRA, I., GRIENTSCHNIG, D., 2010, "Bayesian assessment of uncertainty in metrology: a tutorial", *Metrologia*, v. 47, pp. R1–R14.

LIRA, I., KYRIAZIS, G., 1999, "Bayesian inference from measurement information", *Metrologia*, v. 36, n. 3, pp. 163–169.

LIRA, I., 2006, "Bayesian evaluation of comparison data", *Metrologia*, v. 43, n. 4, pp. S231–S234.

LIRA, I. H., WÖGER, W., 1997, "The evaluation of standard uncertainty in the presence of limited resolution of indicating devices", *Measurement Science and Technology*, v. 8, n. 4, pp. 441–443.

LIRA, I. H., WÖGER, W., 1998a, "Evaluation of the uncertainty associated with a measurement result not corrected for systematic effects", *Measurement Science and Technology*, v. 9, n. 6, pp. 1010–1011.

LIRA, I. H., WÖGER, W., 1998b, "The evaluation of the uncertainty in knowing a directly measured quantity", *Measurement Science and Technology*, v. 9, n. 8, pp. 1167–1173.

LIU, Z., 2005, "Higher order corrections to the Welch-Satterthwaite formula", *Metrologia*, v. 42, n. 5, pp. 449–457.

LOCCI, N., MUSCAS, C., GHIANI, E., 2002, "Evaluation of uncertainty in measurements based on digitized data", *Measurement*, v. 32, n. 4, pp. 265 – 272. ISSN: 0263-2241. doi: DOI:10.1016/S0263-2241(02)00034-9.

MARTINEZ, W. L., MARTINEZ, A. R., 2002, *Computational Statistics Handbook with MATLAB*. New York: Chapman & Hall/CRC.

MARTINS, M. A. F., KALID, R., 2010a, "Generalized expressions of second and third order for standard measurement uncertainty", *Submetido ao periódico Measurement (em fase de revisão)*.

MARTINS, M. A. F., KALID, R., 2010b, "Métodos clássicos para a avaliação da incerteza de medição em sistemas multivariáveis", *Submetido ao periódico Controle & Automação (em fase de revisão)*.

MARTINS, M. A. F., KALID, R., 2010c, "Avaliação da incerteza de medição em sistemas multivariáveis baseada em simulações de Monte Carlo". In: *VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*, c.

MARTINS, M. A. F., KALID, R., 2010d, "Metodologia para avaliação da incerteza de medição em regime dinâmico de sistemas contínuos". In: *XVIII Congresso Brasileiro de Engenharia Química*, d.

MARTINS, M. A. F., AMARO, C. A., SOUZA, L. S., et al., 2010a, "New objective function for data reconciliation in water balance from industrial processes", *Journal of Cleaner Production*, v. 18, n. 12, pp. 1184–1189. doi: 10.1016/j.jclepro.2010.03.014.

MARTINS, M. A. F., KALID, R., NERY, G. A., et al., 2010b, "Comparação entre os métodos linear e não linear para a avaliação da incerteza de medição", *Controle & Automação*, v. 21, n. 6, pp. 557–576.

MEKID, S., 2005, "Design strategy for precision engineering: Second order phemonena", *Journal of Engineering Design*, v. 16, n. 1.

MEKID, S., VAJA, D., 2008, "Propagation of uncertainty: Expressions of second and third order uncertainty with third and fourth moments", *Measurement*, v. 41, n. 6, pp. 600 – 609. ISSN: 0263-2241. doi: DOI: 10.1016/j.measurement.2007.07.004.

NERY, G., KALID, R., 2009, "Estimativa da incerteza pelo método Monte Carlo: comparação entre diferentes procedimentos de cálculo". In: *V Congresso Nacional de Metrologia*.

POSSOLO, A., 2010, "Copulas for uncertainty analysis", *Metrologia*, v. 47, n. 3, pp. 262–271.

PRESS, W. H., TEULOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., et al., 1992a, *Numerical Recipes in C the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.

PRESS, W. H., TEULOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., et al., 1992b, *Numerical Recipes in FORTRAN: the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.

RIDLER, N. M., SALTER, M. J., 2002, "An approach to the treatment of uncertainty in complex S–parameter measurements", *Metrologia*, v. 39, pp. 295–302.

RODRIGUES, I., MARTINS, M. A. F., 2009, "Lógica Fuzzy aplicada em reconciliação de dados de balanço hídrico". In: *XXVIII Seminário Estudantil de Pesquisa do PIBIC–UFBA*.

RODRIGUES, I., MARTINS, M. A. F., HARTMANN, A. E. B., et al., 2009, "Utilização de questionários na estimativa da incerteza em reconciliação de dados do balanço hídrico". In: *VIII Congresso Nacional de Engenharia Química – Iniciação Científica*.

RUBINSTEIN, R. Y., 1981, *Simulation and the Monte-Carlo Method*. New York: Jonh Wiley and Sons.

SATTERTHWAITE, F., 1941, "Synthesis of variance", *Psychometrika*, v. 6, pp. 309–316.

SATTERTHWAITE, F., 1946, "An approximate distribution of estimates of variance components", *Biometrics Bulletin*, v. 2, n. 6, pp. 110–114.

SCHEID, F., 1968, *Theory and Problem of Numerical Analysis, Schaum's Outline Serie*. New York: McGraw Hill.

SIEPMANN, J. I., FERGUSON, D. M., TRUHLAR, D. G., 1999, *Monte-Carlo Method in Chemical Physics, Advanced In Chemical Physics*. New York: Wiley.

SOMMER, K. D., SIEBERT, B. R. L., 2006, "Systematic approach to the modelling of measurements for uncertainty evaluation", *Metrologia*, v. 43, n. 4, pp. S200–S210.

SOMMER, K.-D., KÜHN, O., LEÓN, F. P., et al., 2009, "A Bayesian approach to information fusion for evaluating the measurement uncertainty", *Robotics and Autonomous Systems*, v. 57, n. 3, pp. 339 – 344. ISSN: 0921-8890. Selected papers from 2006 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration (MFI 2006), 2006 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration.

SOUZA, L., KALID, R., 2010. "Propagação da incerteza na reconciliação de dados com restrições lineares". Monografia apresentada a Universidade Federal da Bahia.

TANG, A. H.-S. A. W. H., 1975, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, v. 1. Jonh Wiley and Sons.

TAYLOR, J. R., 1997, *An Introduction to Error Analysis*. Sausalito, CA: University Science Book.

VUOLO, J. H., 1997, *Fundamentos da Teoria de Erros*. São Paulo: Edgard Blucher.

WANG, C. M., IYER, H. K., 2005a, "On higher-order corrections for propagating uncertainties", *Metrologia*, v. 42, n. 5, pp. 406–410.

WANG, C. M., IYER, H. K., 2005b, "Propagation of uncertainties in measurements using generalized inference", *Metrologia*, v. 42, n. 2, pp. 145–153.

WEISE, K., 1984, "DIN 1319 (Part 4) – Basic concepts of measurements: Treatment of uncertainties in the evaluation of measurements", pp. 1–55.

WEISE, K., WOGER, W., 1993, "A Bayesian theory of measurements uncertainty", *Metrologia*, v. 3, pp. 1–11.

WELCH, B., 1936, "The specification of rules for rejecting too variance a product, with particular reference to an electric lamp problem", *J. R. Stat. Soc. Suppl*, v. 3, pp. 29–48.

WELCH, B., 1938, "The significance of the difference between two means when the population variances are unequal", *Biometrika*, v. 29, pp. 350–362.

WHITE, D. R., SAUNDERS, P., 2007, "The propagation of uncertainty with calibration equations", *Measurement Science and Technology*, v. 18, n. 7, pp. 2157–2169.

WILLINK, R., 2005, "A procedure for the evaluation of measurement uncertainty based on moments", *Metrologia*, v. 42, n. 5, pp. 329–343.

WILLINK, R., 2006a, "Principles of probability and statistics for metrology", *Metrologia*, v. 43, pp. S211–S219.

WILLINK, R., 2006b, "On using the Monte Carlo method to calculate uncertainty intervals", *Metrologia*, v. 43, n. 6, pp. L39–L42.

WILLINK, R., 2007, "A generalization of the Welch-Satterthwaite formula for use with correlated uncertainty components", *Metrologia*, v. 44, n. 5, pp. 340–349.

WILLINK, R., 2008, "An inconsistency in uncertainty analysis relating to effective degrees of freedom", *Metrologia*, v. 45, n. 1, pp. 63–67.

WILLINK, R., 2010, "Difficulties arising from the representation of the measurand by a probability distribution", *Measurement Science and Technology*, v. 21, n. 1, pp. 015110.

WILLINK, R., HALL, B. D., 2002, "A classical method for uncertainty analysis with multidimensional data", *Metrologia*, v. 39, n. 4, pp. 361–369.

WONG, F. S., 1985, "First-order, second-moment methods", *Computers & Structures*, v. 20, n. 4, pp. 779 – 791. ISSN: 0045-7949.

WÜBBELER, G., KRYSTEK, M., ELSTER, C., 2008, "Evaluation of measurement uncertainty and its numerical calculation by a Monte Carlo method", *Measurement Science and Technology*, v. 19, n. 8, pp. 084009 (4pp).