



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**  
Programa de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

**Testes Observacionais em Modelos Cosmológicos  
com Interação Vácuo-Matéria**

Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

2008



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

INSTITUTO DE FÍSICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Testes Observacionais em Modelos Cosmológicos  
com Interação Vácuo-Matéria**

Cássio Bruno Magalhães Pigozzo

**Orientador:** Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva

Dissertação apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal da Bahia para a  
obtenção do título de Mestre em Física.

Salvador - 2008

## **Abstract**

In this work we study the observational viability of a cosmological model with vacuum-matter interaction, where the cosmological term is proportional to the Hubble parameter. Type Ia supernovae tests are performed with four different samples, from which we conclude that this model fits well the data, leading to an estimative of the current matter density parameter higher than the standard model one, but within the limits from galaxy dynamics and gravitational lensing observations. According to our analysis, the universe has its expansion accelerated and is older than the oldest observed objects. Just as in the spatially flat standard model, the SNLS sample gives the best fit. Results from the standard analysis of the cosmic microwave background radiation and baryon acoustic oscillations allowed us to indirectly test the present model, and the joint analysis of the three tests indicates that this model is not only theoretically attractive but has also a good concordance with these observations.

---

Prof. Dr. Saulo Carneiro de Souza Silva  
Dissertation Committee Chair



## Resumo

Nesta dissertação estudamos a viabilidade observacional de um modelo cosmológico com interação vácuo-matéria, no qual o termo cosmológico é proporcional ao parâmetro de Hubble. Os testes com supernovas do tipo Ia foram feitos com quatro amostras distintas, e deles concluímos que o modelo se ajusta bem aos dados, apresentando densidade de matéria atual acima do que é obtido com o modelo padrão, mas dentro dos limites estabelecidos por observações de dinâmica de galáxias e lentes gravitacionais. Segundo as análises, o universo encontra-se em expansão acelerada e tem idade superior à dos objetos mais antigos observados. Assim como no caso do modelo padrão espacialmente plano, o conjunto de dados do SNLS fornece o melhor ajuste. Resultados para o modelo padrão obtidos com dados da radiação cósmica de fundo em microondas e das oscilações acústicas bariônicas permitiram testes indiretos do modelo em estudo, e a combinação dos três testes mostra que ele não apenas é interessante teoricamente como também apresenta concordância com estas observações.



# Agradecimentos

Agradeço aos familiares e amigos por todo apoio e compreensão. Em especial, a minha irmã Camila Pigozzo por ser minha referência de Ciência na família, e aos amigos Beto Mercês, Claire Andrade e Leandro Cerqueira pela confiança em mim que nem eu tinha.

Agradeço a todos os anos de orientação do professor Saulo Carneiro, com paciência e dedicação excepcionais, sendo de extrema importância na minha formação profissional.

Agradeço pela colaboração do professor Jailson Alcaniz e de Maria Aldinez Dantas (Observatório Nacional – RJ), essencial para a concretização deste trabalho.

Agradeço, também, ao Colegiado da Pós-Graduação em Física da UFBA por todo cuidado e respeito ao aluno.

(Bolsa CAPES)

“Ninguém experimenta  
a profundidade de um rio  
com os dois pés.”

Provérbio africano

Ao tempo

# Conteúdo

<b>Lista de Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 O Modelo</b>	<b>3</b>
2.1 O Modelo Padrão . . . . .	5
2.1.1 Época dominada por radiação . . . . .	7
2.1.2 Época dominada por matéria . . . . .	8
2.1.3 Cálculo do Parâmetro de Idade . . . . .	8
2.1.4 Parâmetros cosmológicos em função do redshift . . . . .	9
2.2 Soluções com $\Lambda(t)$ . . . . .	11
2.2.1 Época dominada por radiação . . . . .	13
2.2.2 Época dominada por matéria . . . . .	14
2.2.3 Igualdade radiação-matéria . . . . .	16
2.2.4 O parâmetro de Hubble . . . . .	17
<b>3 Medindo o Universo</b>	<b>21</b>
3.1 Redshift . . . . .	24
3.2 Distâncias Curtas . . . . .	27
3.3 Distância Luminosidade . . . . .	28
3.4 Distância Diâmetro-Angular . . . . .	30
3.5 Magnitude e Módulo de Distância . . . . .	32
<b>4 Supernovas</b>	<b>34</b>
4.1 Procedimento do teste . . . . .	37
4.2 Gold Sample . . . . .	39
4.3 Legacy Survey . . . . .	41
4.4 Gold 2006 . . . . .	43
4.5 Essence . . . . .	45

4.6	Comparação entre as amostras . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Radiação Cósmica de Fundo</b>	<b>50</b>
5.1	Corpo negro e expansão homogênea . . . . .	52
5.2	Estágios do universo primordial . . . . .	54
5.2.1	Recombinação . . . . .	55
5.2.2	Desacoplamento . . . . .	58
5.2.3	Último espalhamento . . . . .	59
5.3	Flutuações de temperatura . . . . .	61
5.4	A posição do primeiro pico . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Oscilações Acústicas Bariônicas</b>	<b>67</b>
<b>7</b>	<b>Análise Combinada</b>	<b>71</b>
7.1	Legacy + BAO . . . . .	74
7.2	Legacy + BAO + CMB . . . . .	75
<b>8</b>	<b>Conclusão</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Exemplos de Algoritmos Utilizados</b>	<b>82</b>
<b>B</b>	<b>Análise Combinada para Todas as Amostras de Supernovas</b>	<b>86</b>
B.1	Combinações com o Gold Sample . . . . .	86
B.1.1	Gold Sample + BAO . . . . .	86
B.1.2	Gold Sample + BAO + CMB . . . . .	87
B.2	Combinações com o Gold 2006 . . . . .	88
B.2.1	Gold 2006 + BAO . . . . .	88
B.2.2	Gold 2006 + BAO + CMB . . . . .	88
B.3	Combinações com o Essence . . . . .	89
B.3.1	Essence + BAO . . . . .	89
B.3.2	Essence + BAO + CMB . . . . .	90
	<b>Bibliografia</b>	<b>91</b>

## Lista de Tabelas

4.1	Níveis de confiança para dois parâmetros livres. . . . .	38
4.2	Valores dos parâmetros obtidos com o Gold Sample. . . . .	39
4.3	Intervalos nos três níveis de confiança dados pelo Gold Sample. . . . .	40
4.4	Valores dos parâmetros obtidos com o Legacy. . . . .	41
4.5	Intervalos nos três níveis de confiança dados pelo Legacy. . . . .	42
4.6	Valores dos parâmetros obtidos com o Gold 2006. . . . .	43
4.7	Intervalos nos três níveis de confiança dados pelo Gold 2006. . . . .	44
4.8	Valores dos parâmetros obtidos com o Essence. . . . .	45
4.9	Intervalos nos três níveis de confiança dados pelo Essence. . . . .	45
7.1	Valores dos parâmetros obtidos com a combinação Legacy+BAO. . . . .	74
7.2	Intervalos nos três níveis de confiança com Legacy+BAO. . . . .	74
7.3	Valores dos parâmetros obtidos com a combinação Legacy+BAO+CMB. . . . .	76
7.4	Intervalos nos três níveis de confiança com Legacy+BAO+CMB. . . . .	76
B.1	Valores dos parâmetros obtidos na combinação BAO+Gold Sample. . . . .	86
B.2	Intervalos dos parâmetros ajustados com BAO+Gold Sample. . . . .	86
B.3	Valores dos parâmetros obtidos com CMB+BAO+Gold Sample. . . . .	87
B.4	Intervalos dos parâmetros ajustados com CMB+BAO+Gold Sample. . . . .	87
B.5	Valores dos parâmetros obtidos na combinação BAO+Gold 2006. . . . .	88
B.6	Intervalos dos parâmetros ajustados com BAO+Gold 2006. . . . .	88
B.7	Valores dos parâmetros obtidos com CMB+BAO+Gold 2006. . . . .	88
B.8	Intervalos dos parâmetros ajustados com CMB+BAO+Gold 2006. . . . .	88
B.9	Valores dos parâmetros obtidos na combinação BAO+Essence. . . . .	89
B.10	Intervalos dos parâmetros ajustados com BAO+Essence. . . . .	89
B.11	Valores dos parâmetros obtidos com CMB+BAO+Essence. . . . .	90
B.12	Intervalos dos parâmetros ajustados com CMB+BAO+Essence. . . . .	90

# Lista de Figuras

2.1	Verificação da equação (2.96) para dois valores de $\Omega_{m,o}$ . . . . .	19
4.1	Regiões de confiança do ajuste com o Gold Sample de ambos modelos. . . . .	40
4.2	Regiões de confiança do ajuste com o Legacy de ambos modelos. . . . .	42
4.3	Regiões de confiança do ajuste com o Gold 2006 de ambos modelos. . . . .	44
4.4	Regiões de confiança do ajuste com o Essence de ambos modelos. . . . .	46
4.5	Diagramas de Hubble obtidos com os valores de <i>best-fit</i> seguidos pelas diferenças em relação ao $\Lambda$ CDM. . . . .	48
4.6	Diagramas de Hubble e respectivas diferenças em relação ao $\Lambda$ CDM. . . . .	49
5.1	Pares de parâmetros que resultam na posição do primeiro pico. . . . .	66
6.1	Resultados obtidos com $D_V(0.35) = 1370 \pm 64$ Mpc. . . . .	69
7.1	Superposição dos resultados com Gold Sample, BAO e CMB. . . . .	71
7.2	Superposição dos resultados com Legacy, BAO e CMB. . . . .	72
7.3	Superposição dos resultados com Gold 2006, BAO e CMB. . . . .	72
7.4	Superposição dos resultados com Essence, BAO e CMB. . . . .	73
7.5	Resultado da combinação Legacy+BAO. . . . .	75
7.6	Resultado da combinação Legacy+BAO+CMB. . . . .	77
7.7	Superposição dos ajustes combinados com o Legacy. . . . .	78
A.1	Algoritmo do teste com Legacy. . . . .	83
A.2	Algoritmo do teste com BAO. . . . .	84
A.3	Algoritmo do teste com a CMB. . . . .	85
B.1	Superposição dos ajustes combinados com o Gold Sample. . . . .	87
B.2	Superposição dos ajustes combinados com o Gold 2006. . . . .	89
B.3	Superposição dos ajustes combinados com o Essence. . . . .	90

# Capítulo 1

## Introdução

É da natureza humana entender o mundo a sua volta. Há registros de que civilizações antigas já especulavam sobre o universo em que viviam: sua origem, evolução, composição e, inclusive, seu futuro. Com o desenvolvimento da ciência e da tecnologia, o universo foi se mostrando cada vez mais complexo e misterioso.

Universo, do latim, “o todo”. De fato explicar o todo é uma tarefa difícil. Ainda mais estando o ser humano numa região nada especial de um braço de uma galáxia – Via Láctea – a qual faz parte de um aglomerado de galáxias – Grupo Local – que por sua vez, está numa região aleatória do cosmos. Apesar de parecer muito pretencioso, este é o objetivo da Cosmologia: estudar a evolução do universo, sua dinâmica em grande escala.

O cosmólogo propõe modelos cosmológicos que, a princípio, são puramente teóricos. A diversidade de universos é grande. Pode-se ter um que se expanda infinitamente; que desacelere e colapse novamente, e, eventualmente, gere outro Big Bang; um universo que não começou com essa grande explosão, que sempre existiu. Há aquele que só é composto pela chamada energia escura – universo de de Sitter –, ou ainda o que só possui matéria – universo de Einstein-de Sitter. Mas se o objetivo é descrever o universo em que vivemos, torna-se necessária a obtenção de dados observacionais com os quais seja possível verificar se um modelo cosmológico se ajusta

bem aos dados ou não.

Na escala em que a cosmologia estuda o universo, galáxias e aglomerados são meros pontos numa extensa malha – infinita, a depender do modelo. Na obtenção de medidas do universo, uma primeira dificuldade é definir distância e, claro, como mensurá-la. Por muito tempo a Cosmologia sofreu preconceitos no meio científico por não ter medidas precisas do universo.

Com o desenvolvimento de telescópios cada vez mais eficientes, instalados em solo ou lançados no espaço, obtêm-se informações mais precisas de fontes muito distantes. Mas a descoberta e estudo profundo da radiação cósmica de fundo em microondas (*cosmic microwave background radiation* – CMB) é que colocou de vez a Cosmologia na posição de uma ciência de precisão.

O presente trabalho tem como objetivo o estudo de diferentes testes observacionais, seja com dados de Supernovas ou da CMB, e a utilização destes para verificar se um modelo cosmológico específico é satisfatório do ponto de vista observacional. Para tanto, será feita uma breve revisão da literatura sobre o modelo cosmológico em questão, e também sobre aquele que é usado como referência, o modelo padrão. Uma discussão sobre as medidas cosmológicas também se faz necessária, bem como o entendimento dos fenômenos estudados. O sucesso do trabalho não estará no fato de o modelo passar nos testes ou não, mas na riqueza de informações e técnicas advindas desta análise<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Resultados do presente trabalho deram origem diretamente a dois artigos [1, 2].

# Capítulo 2

## O Modelo

As observações de dados da radiação cósmica de fundo em microondas indicam que o Universo é homogêneo e isotrópico em larga escala, ou seja, não só a Terra não é um referencial privilegiado: nenhum ponto do cosmos o é. Baseando-se nisso, foi utilizada na construção do modelo cosmológico uma métrica com máxima simetria espacial – a métrica de Friedmman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi \right], \quad (2.1)$$

onde as coordenadas são co-móveis [3, 4, 5]. Como a CMB também sugere fortemente que o universo é espacialmente plano – ou muito aproximadamente plano – tomaremos  $k = 0$ . Para tanto, espera-se que a densidade total de matéria e energia do universo,  $\rho_T$ , coincida com a chamada densidade crítica  $\rho_c$ ,

$$\rho_T = \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.2)$$

A função  $a(t)$ , fator de escala, descreve como se dá a evolução do espaço. A sua dependência temporal difere de modelo para modelo, e de um estágio de evolução a outro.

De acordo com a análise dos dados de supernovas Ia em altos *redshifts*, o universo encontra-se atualmente em expansão acelerada, o que sugere que ele não é predo-

minantemente composto por matéria – caso o fosse, o caráter atrativo desta última provocaria a desaceleração da expansão.

Da Física de Partículas sabemos que a massa da matéria que conhecemos na Terra tem maior contribuição dos bárions – partículas formadas por quarks. Os quarks são os tijolos fundamentais da matéria – até onde a tecnologia nos permitiu chegar–, ao lado dos léptons. Os bárions estáveis são os prótons e os nêutros, estes últimos se confinados no núcleo atômico. Léptons com os quais convivemos são, por exemplo, elétrons e neutrinos, ambos muito pouco massivos. Assim, a matéria que está fortemente relacionada com atração gravitacional é chamada de matéria bariônica, e é do nosso conhecimento que ela interage com os fótons. Boa parte dela não é visível por questões técnicas, mas o valor total de sua densidade é estimado por estudos de nucleossíntese primordial.

Observações de dinâmica de galáxias e lentes gravitacionais estimam uma densidade bem maior de matéria nestas estruturas do que a densidade bariônica esperada. Como esse grande excedente não interage com fótons, ele é então denominado matéria escura [6, 7, 8]. As estimativas de sua densidade levam a um total de matéria agregante em torno de 30% da matéria-energia total do universo [9, 10].

Logo, a responsabilidade da aceleração recai na grande parcela da composição do cosmos desconhecida, chamada de energia escura [11, 12, 13]. Entre os candidatos à energia escura, o modelo atualmente tido como padrão, o  $\Lambda$ CDM – *cold dark matter* – adota a constante cosmológica [11, 12, 14], e a densidade dessa energia é representada por

$$\rho_\Lambda = \Lambda, \quad (2.3)$$

utilizando-se daqui em diante  $8\pi G = c = \hbar = 1$ .

No modelo padrão, a energia escura tem a mesma equação de estado do vácuo,

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\Lambda, \quad (2.4)$$

onde a pressão negativa seria a responsável pela aceleração da expansão [15].

No modelo aqui estudado, a energia escura tem a mesma equação de estado (2.4), diferindo do padrão por  $\Lambda$  não ser mais uma constante, obedecendo a uma lei de evolução proposta por Schützhold [16], segundo a qual  $\Lambda$  é proporcional ao parâmetro de Hubble,

$$\Lambda = \sigma H, \quad (2.5)$$

onde  $\sigma$  é uma constante positiva da ordem do cubo da massa do pión, e o parâmetro de Hubble definido por

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.6)$$

Modelos com  $\Lambda$  variável são estudados tentando solucionar problemas que o modelo padrão deixa em aberto, como a grande diferença entre o pequeno valor observado atualmente da constante cosmológica e o alto valor obtido pelas teorias quânticas de campo [14, 17]. O cálculo de energia do vácuo quântico resulta num valor 120 ordens de grandeza maior que o observado. Outro problema é o da coincidência cósmica. Como veremos, na história da evolução do universo, as densidades de suas componentes variam, e há uma fase em que uma domina, e outra época que é dominada por outra componente. As estimativas das densidades atuais de matéria escura e energia escura resultam em valores com mesma ordem de grandeza. O questionamento se dá no porquê de vivermos justamente no período em que essas densidades têm valores tão próximos. É apenas coincidência?

## 2.1 O Modelo Padrão

Como o modelo  $\Lambda$ CDM será usado como referência na análise dos testes observacionais com o modelo que chamaremos de  $\Lambda(t)$ , torna-se útil um breve resumo do primeiro, restringindo-se apenas ao caso espacialmente plano. Nesta situação, as equações de Einstein podem ser escritas na forma

$$\rho_T = 3H^2, \quad (2.7)$$

$$\dot{\rho}_T + 3H(\rho_T + p_T) = 0, \quad (2.8)$$

onde (2.7) é conhecida como equação de Friedmman, e (2.8) a de continuidade.

Tomando a componente de matéria do fluido cósmico como um fluido perfeito, a sua equação de estado pode ser escrita de forma geral como

$$p_i = (\gamma - 1)\rho_i, \quad (2.9)$$

sendo  $p$  e  $\rho$  pressão e densidade, respectivamente, da matéria ( $i = m$ ) ou da radiação ( $i = r$ ). A matéria incoerente tem pressão nula ( $\gamma = 1$ ), enquanto para radiação  $p_r = \rho_r/3$ , ou seja,  $\gamma = 4/3$ .

Como neste modelo as componentes se conservam independentemente, pode-se aplicar a (2.8) separadamente para a matéria incoerente e para a radiação. Para a primeira, tem-se

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = 0. \quad (2.10)$$

Pela definição (2.6) e sabendo que  $p_m = 0$ , chega-se a

$$\frac{d\rho_m}{\rho_m} = -3\frac{da}{a}. \quad (2.11)$$

Integrando-se (2.11), usando  $\rho_{m,o}$  e  $a_o$  como a densidade de matéria e o fator de escala atuais, obtém-se  $\rho_m(a)$ :

$$\rho_m = \rho_{m,o} \left(\frac{a_o}{a}\right)^3. \quad (2.12)$$

Repetindo o mesmo processo para a radiação, temos

$$\dot{\rho}_r + 3H(\rho_r + p_r) = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\rho_r}{\rho_r} = -4\frac{da}{a}, \quad (2.14)$$

e a (2.14) leva à equação de evolução

$$\rho_r = \rho_{r,o} \left(\frac{a_o}{a}\right)^4. \quad (2.15)$$

A equação de Friedmman (2.7) pode ser escrita na forma

$$3H^2 = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (2.16)$$

e, substituindo (2.3), (2.12) e (2.15) em (2.16) e dividindo toda a expressão por  $3H_o^2$ , chega-se a

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \frac{\rho_{r,o}}{3H_o^2} \left(\frac{a_o}{a}\right)^4 + \frac{\rho_{m,o}}{3H_o^2} \left(\frac{a_o}{a}\right)^3 + \frac{\Lambda}{3H_o^2}. \quad (2.17)$$

Definindo o parâmetro de densidade como

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad (2.18)$$

e com auxílio da (2.2), a (2.16) torna-se

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \Omega_{r,o} \left(\frac{a_o}{a}\right)^4 + \Omega_{m,o} \left(\frac{a_o}{a}\right)^3 + \Omega_{\Lambda,o}, \quad (2.19)$$

lembrando que, no caso plano,  $\Omega_T = 1$ . A expressão (2.19) não é facilmente integrável, mas com boa aproximação é possível obter resultados interessantes.

### 2.1.1 Época dominada por radiação

No universo em expansão, e, mais especificamente, que em toda sua história esteve em processo expansivo, fator de escala muito pequeno remete a tempos muito remotos, e para  $a$  muito grande, teremos tempos futuros. Analisando (2.19), o termo de radiação domina para  $a \rightarrow 0$ , e neste limite ela se torna simplesmente

$$ada \approx H_o \sqrt{\Omega_{r,o}} a_o^2 dt. \quad (2.20)$$

Escolhendo  $a(t=0) = 0$  na integração de (2.20), tem-se

$$a \approx \left( H_o a_o^2 \sqrt{\Omega_{r,o}} t \right)^{1/2}. \quad (2.21)$$

Com este resultado calcula-se o valor do parâmetro de Hubble, usando-se (2.6),

$$H \approx \frac{1}{2t}, \quad (2.22)$$

e o fator de desaceleração  $q \equiv -\ddot{a}/\dot{a}^2 \approx 1$ .

### 2.1.2 Época dominada por matéria

Verifica-se pela (2.19) que o período dominado por radiação é seguido por uma fase onde a expansão é regida pela matéria incoerente. Neste caso, tem-se

$$a^{1/2} da \approx H_o \sqrt{\Omega_{m,o}} a_o^{3/2} dt, \quad (2.23)$$

e assim

$$a \approx \left( \frac{3}{2} H_o \sqrt{\Omega_{m,o}} a_o^{3/2} t + C_1 \right)^{2/3}. \quad (2.24)$$

É possível estimar a expressão do fator de escala no momento de igualdade radiação-matéria ( $t_{rm}$ ). Basta utilizar (2.12) e (2.15), fazendo  $\rho_r = \rho_m$ . Assim,

$$a_{rm} = a_o \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,o}}. \quad (2.25)$$

Isolando o tempo em (2.21) e em (2.24), fazendo-os iguais em  $a_{rm}$  e usando (2.25), encontra-se a constante aditiva

$$C_1 \approx -\frac{1}{2} a_o^{3/2} \left( \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,o}} \right)^{3/2} \approx 0. \quad (2.26)$$

### 2.1.3 Cálculo do Parâmetro de Idade

O período dominado por radiação é muito curto, como veremos no capítulo 5, comparado com o dominado por matéria – o qual precisa ser longo, permitindo a formação de grandes estruturas. Assim, tomemos a equação (2.16) sem o termo de radiação,

$$3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \rho_m + \Lambda = \rho_{m,o} \left( \frac{a_o}{a} \right)^3 + \Lambda. \quad (2.27)$$

Resolvendo a equação diferencial acima obtemos

$$a(t) = \left( \frac{\rho_o a_o^3}{2\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ \cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1 \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (2.28)$$

com a qual, substituída em (2.6), encontramos o parâmetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\sqrt{3\Lambda}}{3} \frac{\sinh(\sqrt{3\Lambda}t)}{\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1}, \quad (2.29)$$

bem como a equação de evolução da densidade de matéria,

$$\rho_m(t) = 2\Lambda \left[ \cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1 \right]^{-1}. \quad (2.30)$$

Utilizando as duas últimas equações na (2.18) podemos encontrar o parâmetro de densidade da matéria em função do tempo,

$$\Omega_m(t) = \frac{2}{\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) + 1}, \quad (2.31)$$

e com este resultado é possível escrever

$$\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) = \frac{2}{\Omega_m} - 1, \quad (2.32)$$

reescrevendo a (2.29) em termos do parâmetro de densidade,

$$H = \frac{\sqrt{3\Lambda}}{3} [1 - \Omega_m]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.33)$$

Isolando o tempo em (2.32) temos

$$t = \frac{1}{\sqrt{3\Lambda}} \cosh^{-1} \left[ \frac{2}{\Omega_m} - 1 \right], \quad (2.34)$$

e assim, multiplicando (2.33) e (2.34), usando os valores atuais, obtemos o parâmetro de idade atual

$$H_o t_o = \frac{1}{3} (1 - \Omega_{m,o})^{-\frac{1}{2}} \cosh^{-1} \left[ \frac{2}{\Omega_{m,o}} - 1 \right]. \quad (2.35)$$

#### 2.1.4 Parâmetros cosmológicos em função do redshift

Uma grandeza muito utilizada observacionalmente é o desvio para o vermelho – redshift – que a radiação emitida pelas fontes espalhadas no cosmos sofre até ser observada. Sua definição será discutida mais detalhadamente no próximo capítulo. Por hora, tomemos como válida a relação

$$1 + z = \frac{a_o}{a}, \quad (2.36)$$

onde  $z$  é o redshift observado em uma onda emitida quando o fator de escala valia  $a$ . Dessa forma, (2.19) pode ser escrita como

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \Omega_{r,o} (1+z)^4 + \Omega_{m,o} (1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,o}, \quad (2.37)$$

que, para momentos próximos do atual – quando a densidade de radiação é muito baixa comparada com as de matéria e de energia escura ( $\Omega_{\Lambda} + \Omega_m \approx 1$ ) e os redshifts são baixos – torna-se

$$H = H_o [1 - \Omega_{m,o} + \Omega_{m,o} (1+z)^3]^{1/2}. \quad (2.38)$$

Também com (2.36), substituindo-a em (2.25), obtem-se a expressão do redshift da radiação emitida em  $t_{rm}$ ,

$$z_{rm} = \frac{\Omega_{m,o}}{\Omega_{r,o}}, \quad (2.39)$$

sabendo-se que  $z_{rm} \gg 1$ .

O fator de desaceleração definido anteriormente pode ser reescrito como

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (2.40)$$

onde

$$\ddot{a} = \frac{d^2a}{dt^2} = \frac{d}{dt}(aH) = a\frac{dH}{dt} + H\dot{a} = a\frac{dH}{dt} + aH^2. \quad (2.41)$$

Como temos o parâmetro de Hubble em função do redshift, aplicamos a regra da cadeia em  $dH/dt$ ,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dz} \frac{dz}{dt}, \quad (2.42)$$

e pela (2.36) obtemos

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{a_o}{a^2} \dot{a} = -(1+z)H. \quad (2.43)$$

Aplicando os resultados (2.41), (2.42) e (2.43) na (2.40), encontramos o fator de desaceleração com função do redshift,

$$q(z) = -1 + \frac{(1+z)}{H(z)} \frac{dH}{dz}, \quad (2.44)$$

que serve para qualquer modelo. Substituindo (2.38) na (2.44), obtemos o fator de desaceleração para o modelo padrão na fase de matéria,

$$q(z) = -1 + \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m,o}(1+z)^3}{[1 - \Omega_{m,o} + \Omega_{m,o}(1+z)^3]}, \quad (2.45)$$

o que resulta num fator de desaceleração atual,  $z = 0$ , dado pela expressão

$$q_o = -1 + \frac{3}{2}\Omega_{m,o}. \quad (2.46)$$

## 2.2 Soluções com $\Lambda(t)$

Após o breve resumo do modelo padrão na seção anterior, será apresentado agora o modelo foco desta pesquisa: o modelo com densidade de vácuo variável, com evolução descrita pela expressão (2.5) [18, 19].

Usando a mesma equação de estado para a matéria (2.9) e substituindo a densidade e pressão totais, dados por

$$\rho_T = \rho_i + \rho_\Lambda, \quad (2.47)$$

$$p_T = p_i + p_\Lambda, \quad (2.48)$$

em (2.8), obtém-se

$$\frac{d}{dt}(\rho_i + \rho_\Lambda) + 3H(\rho_i + \rho_\Lambda + p_i + p_\Lambda) = 0, \quad (2.49)$$

e, usando (2.3) e (2.4), a equação (2.49) reduz-se a

$$\dot{\rho}_i + 3H(\rho_i + p_i) = -\dot{\Lambda}. \quad (2.50)$$

Como já discutido, em modelo com constante cosmológica ( $\dot{\Lambda} = 0$ ), (2.50) representa a equação de continuidade da matéria. Com  $\Lambda$  variável, ela pode ser interpretada como uma equação de continuidade com fonte, onde o decaimento da densidade de energia do vácuo acarreta produção de matéria ou um aumento na massa das partículas pré-existentes.

As equações (2.5), (2.7), (2.9) e (2.47) levam a (2.50) à forma

$$2\dot{H} + 3\gamma H^2 - \sigma\gamma H = 0. \quad (2.51)$$

Ao resolvê-la, obtém-se a evolução temporal do parâmetro de Hubble, a menos de uma constante de integração relacionada com a escolha da origem do tempo,

$$H = \frac{\sigma/3}{1 - \exp(-\sigma\gamma t/2)}. \quad (2.52)$$

Com (2.5), (2.7) e (2.47) encontra-se que  $\rho_i$  depende do parâmetro de Hubble pela expressão

$$\rho_i = (3H - \sigma)H, \quad (2.53)$$

de onde é possível ter, usando (2.52),

$$\rho_i = \frac{\sigma^2}{12} \sinh^{-2}(\sigma\gamma t/4). \quad (2.54)$$

Novamente com (2.52), agora substituindo-a em (2.5), chega-se à evolução no tempo da densidade de energia escura,

$$\Lambda = \frac{\sigma^2/3}{1 - \exp(-\sigma\gamma t/2)}. \quad (2.55)$$

Integrando a (2.52) em relação ao tempo mais uma vez, e usando a definição (2.6), temos que a função do fator de escala é

$$a = C_i [\exp(\sigma\gamma t/2) - 1]^{2/3\gamma}, \quad (2.56)$$

com a qual se chega às expressões das densidades de matéria e vácuo como funções do fator de escala,

$$\rho_i = \frac{\sigma^2}{3} \left(\frac{C_i}{a}\right)^{3\gamma/2} \left[1 + \left(\frac{C_i}{a}\right)^{3\gamma/2}\right] \quad (2.57)$$

e

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[1 + \left(\frac{C_i}{a}\right)^{3\gamma/2}\right], \quad (2.58)$$

onde o índice  $i$  na constante é para ressaltar que ela assume valores diferentes para  $\gamma$ 's distintos.

É possível também expressar o fator de desaceleração, através da (2.56), por

$$q = \frac{3\gamma}{2} \exp(-\sigma\gamma t/2) - 1. \quad (2.59)$$

## 2.2.1 Época dominada por radiação

Na fase dominada por radiação, usando-se  $\gamma = 4/3$  em (2.56) se encontra a expressão do fator de escala,

$$a = C_r [\exp(2\sigma t/3) - 1]^{1/2}, \quad (2.60)$$

e também, usando-se (2.57) e (2.58), as densidades de radiação e energia escura,

$$\rho_r = \frac{\sigma^2 C_r^4}{3a^4} + \frac{\sigma^2 C_r^2}{3a^2}, \quad (2.61)$$

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^2 C_r^2}{3a^2}. \quad (2.62)$$

Em tempos muito remotos ( $\sigma t \ll 1$ ), a (2.60) pode ser aproximada por

$$a \approx \sqrt{2C_r^2 \sigma t/3}. \quad (2.63)$$

Neste limite de  $a \rightarrow 0$ , as densidades podem ser escritas como

$$\rho_r = \frac{\sigma^2 C_r^4}{3a^4} = \frac{3}{4t^2}, \quad (2.64)$$

$$\Lambda = \frac{\sigma^2 C_r^2}{3a^2} = \frac{\sigma}{2t}. \quad (2.65)$$

Verifica-se que o fator de escala (2.63) tem a mesma dependência temporal que o do modelo padrão, (2.21), e a densidade de radiação também evolui com  $a^{-4}$ . Ainda do fator de escala (2.63) obtemos  $Ht = 1/2$  e  $q = 1$ , que são os mesmos resultados do  $\Lambda$ CDM apresentados na seção 2.1.1.

Comparando (2.64) e (2.65), percebe-se que a radiação diverge mais rapidamente que a energia escura quando  $a \rightarrow 0$ . Conclui-se então que em tempos remotos da

história do universo, segundo este modelo, a expansão é dominada completamente pela radiação. O segundo termo das expressões (2.61) e (2.62) reflete o acoplamento entre as componentes, o decaimento da energia de vácuo produzindo matéria. Mas como o primeiro termo de (2.61) domina neste limite, a produção de matéria não interfere em processos que ocorram nesta época, como, por exemplo, a nucleossíntese<sup>1</sup>.

Ainda é possível expressar o parâmetro de Hubble em função do redshift. Para tanto, isola-se o tempo na (2.63), substituindo-o em  $H = 1/2t$ , e, como  $z \gg 1$ , tem-se, enfim,

$$H = \frac{C_r^2 \sigma}{3a_o^2} z^2. \quad (2.66)$$

### 2.2.2 Época dominada por matéria

Tomando-se  $\gamma = 1$  em (2.56), encontra-se o fator de escala na fase em que a expansão é regida pela matéria,

$$a = C_m [\exp(\sigma t/2) - 1]^{2/3}, \quad (2.67)$$

que, para tempos distantes no passado comparados com o momento atual, pode ser aproximado por

$$a = C_m (\sigma t/2)^{2/3}, \quad (2.68)$$

apresentando a mesma dependência temporal que no modelo padrão, como visto em (2.24).

Usando novamente as (2.57) e (2.58), agora com  $\gamma = 1$ , temos

$$\rho_m = \frac{\sigma^2}{3} \left[ \left( \frac{C_m}{a} \right)^3 + \left( \frac{C_m}{a} \right)^{3/2} \right] \quad (2.69)$$

e

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} \left[ 1 + \left( \frac{C_m}{a} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.70)$$

---

<sup>1</sup>Para uma discussão sobre vínculos observacionais provenientes da nucleossíntese primordial sobre modelos com decaimento do vácuo, veja [20].

O primeiro termo de (2.69) é o usual de matéria incoerente, como visto no  $\Lambda$ CDM, enquanto o segundo está relacionado com a produção de matéria devido ao decaimento da densidade do vácuo. Na análise deste modelo foi feita a suposição de que a energia escura só decai em matéria escura, e não em bariônica ou radiação. Pode ser mostrado também que a época de matéria é suficientemente longa para possibilitar a formação de grandes estruturas [18].

Usando as expressões (2.7) e (2.18) em (2.53), é possível obter

$$\sigma = 3H(1 - \Omega_i), \quad (2.71)$$

que vale também para os valores atuais,

$$\sigma = 3H_o(1 - \Omega_{m,o}). \quad (2.72)$$

Invertendo-se a função (2.52) para obter  $t(H)$ , usando  $\gamma = 1$  e (2.71), encontra-se a expressão do parâmetro de idade nesta época,

$$Ht = \frac{2}{3(\Omega_m - 1)} \ln \Omega_m. \quad (2.73)$$

Para a aplicação de testes observacionais, uma função muito importante é a  $H(z)$ . Para obtê-la basta substituir (2.67) na definição do redshift (2.36), chegando-se a

$$(z + 1)^{3/2} = \frac{e^{\sigma t_o/2} - 1}{e^{\sigma t/2} - 1}. \quad (2.74)$$

Da expressão (2.52) com  $\gamma = 1$  encontra-se

$$e^{\sigma t/2} = \frac{3H}{3H - \sigma}, \quad (2.75)$$

que, substituída na equação (2.74), com auxílio de (2.72), leva à função procurada,

$$H(z) = H_o [1 - \Omega_{m,o} + \Omega_{m,o}(1 + z)^{3/2}]. \quad (2.76)$$

Substituindo (2.76) em (2.44) encontramos que o fator de desaceleração na fase de matéria para o modelo  $\Lambda(t)$  é dado por

$$q(z) = -1 + \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m,o}(1 + z)^{3/2}}{[1 - \Omega_{m,o} + \Omega_{m,o}(1 + z)^{3/2}]}, \quad (2.77)$$

o que também pode ser obtido fazendo-se  $\gamma = 1$  na (2.59), e usando-se as equações (2.72), (2.75) e (2.76).

Com o resultado anterior, temos que o fator de desaceleração atual é

$$q_o = -1 + \frac{3}{2}\Omega_{m,o}, \quad (2.78)$$

coincidindo com a expressão para o modelo padrão, (2.46).

### 2.2.3 Igualdade radiação-matéria

Nesta seção é encontrada a expressão que dá o valor estimado do redshift de transição entre a fase dominada por radiação e a dominada por matéria. Para isto, primeiramente toma-se um redshift muito alto – passado distante – na época dominada por matéria, quando  $\rho_m \approx \rho_T$ , e assim, com (2.7) e a aproximação  $z \gg 1$  em (2.76), tem-se

$$\rho_m \approx 3H_o^2\Omega_{m,o}^2z^3. \quad (2.79)$$

Por outro lado, como a radiação conserva-se separadamente neste modelo, vale a (2.15), onde substitui-se (2.36), fazendo-se  $z \gg 1$ , e então tem-se

$$\rho_r \approx \rho_{r,o}z^4. \quad (2.80)$$

No momento da igualdade  $\rho_m(z_{rm}) = \rho_r(z_{rm})$ , e encontra-se

$$z_{rm} = \frac{\Omega_{m,o}^2}{\Omega_{r,o}}, \quad (2.81)$$

que, comparado com o  $z_{rm}$  do  $\Lambda$ CDM (2.39), leva à relação

$$z_{rm}[\Lambda(t)] = \Omega_{m,o}z_{rm}[\Lambda\text{CDM}]. \quad (2.82)$$

Voltando à expressão (2.66), tomando-a para  $z = z_{rm}$ , tem-se

$$H = \frac{H(z_{rm})}{z_{rm}^2}z^2, \quad (2.83)$$

e substituindo-se a aproximação de altos redshifts de (2.76),

$$H \approx H_o \Omega_{m,o} z^{3/2}, \quad (2.84)$$

com  $z = z_{rm}$ , e usando-se (2.81), chega-se à seguinte expressão do parâmetro de Hubble na época dominada por radiação, em função do redshift:

$$H = H_o \sqrt{\Omega_{r,o}} z^2. \quad (2.85)$$

## 2.2.4 O parâmetro de Hubble

Nas seções anteriores foram discutidas as épocas de radiação e de matéria separadamente, assim como a sua transição, mas o parâmetro de Hubble não foi escrito levando em conta a contribuição das três componentes ao mesmo tempo, ou seja, uma expressão de  $H$  que valha para qualquer  $z$ . Ela será necessária na análise da radiação cósmica de fundo, como será visto no quinto capítulo.

Usemos a equação de Friedmann (2.7) – sendo a densidade total a soma das densidades das três componentes – e sua derivada na (2.8). A pressão total também será a soma das pressões de cada componente. Assim,

$$2\dot{H} + 3H^2 + p_\Lambda + p_r = 0. \quad (2.86)$$

Sabendo que  $p_r = \rho_r/3$  e que  $p_\Lambda = -\Lambda = -\sigma H$ , e conhecendo a equação de evolução para a radiação – que se conserva independentemente –, obtemos

$$2\dot{H} + 3H^2 - \sigma H + \frac{\rho_{r,o}}{3} \left(\frac{a_o}{a}\right)^4 = 0. \quad (2.87)$$

Da definição (2.18) e tomando  $\Lambda = \sigma H$ , temos

$$\sigma = 3H_o \Omega_{\Lambda,o}. \quad (2.88)$$

A derivada de  $H$  é em relação ao tempo cosmológico. Podemos aplicar a regra da cadeia de derivação e teremos

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH}{dz} \frac{dz}{da} \frac{da}{dt}. \quad (2.89)$$

Conhecendo a relação entre redshift e fator de escala, (2.36), e denotando  $dH/dz$  como  $H'$ , é possível reescrever a (2.87) na forma

$$-2HH'(1+z) + 3H^2 - 3\Omega_{\Lambda,o}H_oH + \frac{\rho_{r,o}}{3}(1+z)^4 = 0. \quad (2.90)$$

Em muitos cálculos é vantajoso definir uma nova função a partir do parâmetro de Hubble, de tal maneira que esta tenha valor 1 no instante atual, ou seja,  $z = 0$ .

Chamaremos de função  $E(z)$ :

$$E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_o}, \quad (2.91)$$

e assim, ao dividir a (2.90) por  $H_o^2$ , temos a equação diferencial

$$-2EE'(1+z) + 3E^2 - 3\Omega_{\Lambda,o}E + \Omega_{r,o}(1+z)^4 = 0. \quad (2.92)$$

É interessante verificar que, para redshifts muito baixos, e sabendo de antemão que  $\Omega_{r,o}$  é muito baixo comparado com os outros parâmetros de densidade, o último termo da (2.92) pode ser desprezado. E assim obteríamos

$$E = \Omega_{\Lambda,o} + C_1(1+z)^{3/2}, \quad (2.93)$$

onde  $C_1$  é uma constante que podemos determinar sabendo que  $E(0) = 1$  e que, como  $\Omega_{r,o}$  é muito pequeno,  $\Omega_{T,o} \approx \Omega_{m,o} + \Omega_{\Lambda,o}$ . Logo, encontramos

$$E = 1 - \Omega_{m,o} + \Omega_{m,o}(1+z)^{3/2}, \quad (2.94)$$

que é exatamente a expressão (2.76) obtida para o parâmetro de Hubble na fase de matéria, mostrando assim que os cálculos são consistentes.

Mas, como queremos uma função  $H(z)$  que possa ser usada para qualquer valor de  $z$ , temos que resolver a (2.92) com todos os seus termos. O problema é que esta equação não tem solução analítica. Como nos testes com dados observacionais é preciso calcular o valor de  $H(z)$  variando os valores dos parâmetros de densidade, não é nada prático trabalhar com a solução numérica de uma equação diferencial,

visto que, cada vez que mudamos o valor de um parâmetro, a solução numérica tem de ser obtida novamente.

Para fugir deste problema, procuramos uma função analítica que seja uma boa aproximação da solução numérica. Partindo da equação de Friedmman na forma (2.16), usando o parâmetro de Hubble da fase de matéria (2.76) para determinar  $\rho_m + \Lambda$ , e lembrando que a radiação conserva-se independentemente, temos

$$3H^2 = 3H_o^2 \left[ 1 - \Omega_{m,o} + \Omega_{m,o} (1+z)^{3/2} \right]^2 + \rho_{r,o} (1+z)^4, \quad (2.95)$$

que reduz-se a

$$H = H_o \sqrt{\left[ 1 - \Omega_{m,o} + \Omega_{m,o} (1+z)^{3/2} \right]^2 + \Omega_{r,o} (1+z)^4}. \quad (2.96)$$

É fato que a (2.96) não é solução de (2.92), mas podemos verificar se ela é uma boa aproximação. Para resolver a equação (2.92) numericamente é necessário fixar valores para os parâmetros  $\Omega_{\Lambda,o} \approx 1 - \Omega_{m,o}$  e  $\Omega_{r,o}$ . Como este último é bem conhecido, a análise foi feita para diversos valores de  $\Omega_{m,o}$ . A análise gráfica das duas soluções, como podemos ver na Figura 2.1, garantiu que a (2.96) é uma aproximação muito boa, dando discrepâncias menores que 0.1%.

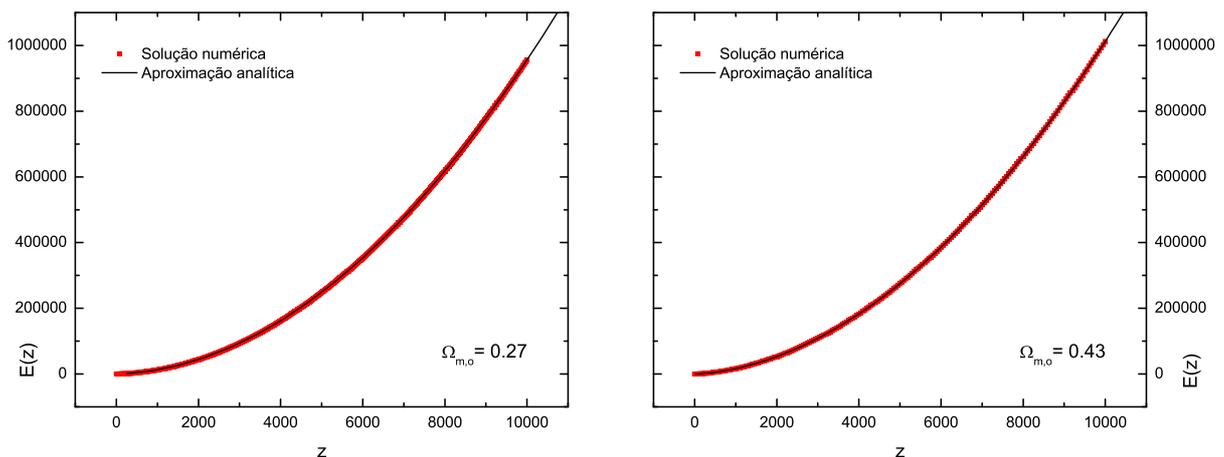


Figura 2.1: Verificação da equação (2.96) para dois valores de  $\Omega_{m,o}$ .

Quando  $z \gg 1$ , podemos escrever a (2.96) como

$$H = H_o \sqrt{\Omega_{m,o}^2 z^3 + \Omega_{r,o} z^4}. \quad (2.97)$$

Apresentados os modelos padrão e  $\Lambda(t)$ , e obtidas as expressões que são necessárias à aplicação dos testes observacionais, o próximo passo é introduzir alguns conceitos de medidas de distâncias e outras grandezas muito importantes no cenário da cosmologia observacional.

## Capítulo 3

# Medindo o Universo

Admiramos o céu em uma noite estrelada. A beleza é graças à emissão de radiação na faixa da luz visível pelos corpos celestes, com frequências e intensidades diversas. Da estrela mais próxima de nós, o Sol, sentimos que a radiação infravermelha também chega à Terra. Detetores confirmam que somos bombardeados por informações eletromagnéticas em diversas frequências. Estes mesmos detetores são capazes de medir o fluxo dessa radiação estrangeira.

As posições angulares são medidas de maneira simples, sendo uma prática muito antiga. Foi com o uso de conhecidas posições angulares de estrelas “fixas” – como eram chamadas na época – que a civilização européia pôde ir além da navegação costeira e lançar-se ao mar aberto na época das grandes navegações entre os séculos XV e XVI.

Conhecemos então o fluxo da radiação emitida por um corpo e sua posição angular. Porém, há um fator muito importante, que inclusive influencia no fluxo observado, que está faltando. Sabemos que se o Sol estivesse mais próximo ou mais afastado da Terra, a vida existente neste planeta como a conhecemos não seria possível, pois na posição que se encontra ele fornece a dose certa de energia necessária para a origem e manutenção da vida na forma que conhecemos. Assim, o que falta definirmos jamais poderia ser visto como menos importante. Estamos falando de distância [3, 4, 5, 21].

Acostumados com as distâncias do dia-a-dia, parece se tratar de um conceito trivial. Mas quando consideramos a escala do universo, e este estando em expansão, a própria definição de distância é uma tarefa árdua.

Para tanto, consideremos uma galáxia longe o suficiente para que possamos usar a métrica (2.1), ignorando as pequenas perturbações do espaço-tempo. Tomemos um sistema de referência de forma que estejamos na origem e essa galáxia tenha coordenadas co-móveis  $(r, \theta, \phi)$ . Devido à expansão, para definir uma distância exata entre esta galáxia e nós, devemos fixar um instante  $t$ .

Podemos definir a *distância própria*  $d_p(t)$  como o comprimento da geodésica espacial que liga a galáxia observada à Terra. Como na extensão da geodésica espacial não há variação de posição angular, a (2.1), com  $k = 0$ , leva a

$$ds = a(t)dr. \quad (3.1)$$

Obtemos então a distância própria ao integrar a (3.1) na coordenada radial, de 0 a  $r$ ,

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r dr' = a(t)r. \quad (3.2)$$

Como a coordenada  $r$  é constante, a derivada da distância própria, conhecida como velocidade de recessão, resulta em

$$\dot{d}_p(t) = \dot{a}r = Hd_p. \quad (3.3)$$

Esta “velocidade” é interpretada astronomicamente como a velocidade com que dois pontos do universo, distantes um do outro de  $d_p(t)$ , se afastam naquele instante. Como no nosso sistema de referência a posição co-móvel é fixa, esta grandeza na verdade expressa a taxa com que o espaço entre estes dois pontos aumenta.

Quando a velocidade de recessão coincide com a velocidade da luz, a distância própria assume o valor chamado de *distância de Hubble*, que em  $t = t_o$  é dado por

$$d_H(t_o) \equiv \frac{c}{H_o}. \quad (3.4)$$

Ainda com a galáxia na posição  $(r, \theta, \phi)$ , acompanhemos a luz emitida no momento  $t_e$ , observada na Terra em  $t_o$ . Sabemos que a luz viaja por uma geodésica nula, ou seja,  $ds = 0$ , e como num espaço homogêneo e isotrópico não há razão para deflexão de um raio luminoso, temos por (2.1), com  $k = 0$ ,

$$c^2 dt^2 = a(t)^2 dr^2, \quad (3.5)$$

o que leva a

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr. \quad (3.6)$$

Integrando esta última relação de  $t_e$  até  $t_o$ , temos

$$c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r dr' = r. \quad (3.7)$$

Assim, (3.2) e (3.7) levam a uma distância própria atual

$$d_p(t_o) = a(t_o) c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.8)$$

Em teoria, o objeto mais distante que se pode observar é aquele que emitiu luz em  $t = 0$ , e esta nos alcança em  $t_o$ . A distância percorrida pela luz desde 0 até  $t_o$  é chamada de *distância de horizonte* e é dada por

$$d_{hor}(t_o) = a(t_o) c \int_0^{t_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.9)$$

Objetos que estão a uma distância maior que  $d_{hor}(t_o)$  não podem ser observados, pois a radiação por eles emitida não teve tempo suficiente para alcançar o observador. A porção do universo que contém todos os pontos com distâncias menores que esta forma o universo observável.

Definida a distância própria, nos deparamos com um fato: esta distância não é fisicamente mensurável. Para medirmos seu valor num instante específico, seria necessário uma fita métrica que viajasse instantaneamente entre os dois pontos cuja distância se quer medir, ou então deveríamos parar a expansão do espaço para que tal medida fosse efetuada. Como nenhuma das alternativas é viável, torna-se necessária a

definição de distâncias mensuráveis<sup>1</sup>. Mas, antes disso, definamos a grandeza chamada redshift.

### 3.1 Redshift

Da análise do espectro de uma radiação incidente é possível medir com grande precisão a posição das linhas de absorção e de emissão dos gases em laboratório. Observando-se as radiações de fontes distantes, percebeu-se que estas linhas sofriam um desvio sistemático, algumas para o azul – menores comprimentos – e a maioria para o vermelho – grandes comprimentos. O *desvio para o vermelho*, em inglês *redshift*, presente na maioria das observações em qualquer direção que se aponte o detector, foi a evidência de que todos os corpos no universo estariam se afastando devido ao aumento de espaço entre eles. Ao passo que o espaço aumenta, o comprimento de onda tende a ser aumentado pelo mesmo fator que o espaço, e assim, o espectro é desviado para o vermelho. Quando se apresenta *blueshift*, isso é devido a movimentos peculiares do objeto, de acordo com fatores locais, como por exemplo, rotação em sistemas binários.

A medida do redshift é dada pelo desvio percentual de  $\lambda$ ,

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (3.10)$$

onde  $\lambda_e$  é o comprimento de onda no momento da emissão, e  $\lambda_o$ , no instante da observação.

Quanto mais distante uma fonte, mais tempo sua radiação leva para chegar ao observador, e mais tempo o espaço tem para aumentar, provocando um maior redshift do espectro. Percebemos assim que há uma relação entre tempo, fator de escala e redshift, ou seja, maiores redshifts correspondem a radiações emitidas em tempos mais remotos, quando o fator de escala era menor. Vimos no capítulo anterior que a relação

---

<sup>1</sup>Para uma discussão sobre os principais indicadores de distâncias utilizados em Astronomia, veja [21].

entre fator de escala e tempo depende do modelo cosmológico, das componentes que o formam. Já a relação entre redshift e fator de escala [3] é obtida independente de modelo.

Tomemos uma galáxia emitindo um sinal eletromagnético. Se no instante  $t_e$  uma crista é emitida, e esta é observado na Terra em  $t_o$ , sabemos pela (3.7) que a coordenada comóvel radial da fonte é dada por

$$c \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = r. \quad (3.11)$$

A crista seguinte sairá da fonte no instante  $t_e + \lambda_e/c$ , chegando no detector em  $t_o + \lambda_o/c$ . Assim, a mesma coordenada é dada também por

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_o + \lambda_o/c} \frac{dt}{a(t)} = r. \quad (3.12)$$

E, dessas últimas expressões, temos

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_o + \lambda_o/c} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.13)$$

Subtraindo da equação (3.13) o termo

$$\int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_o} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.14)$$

chegamos à igualdade

$$\int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o + \lambda_o/c} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.15)$$

Considerando que no intervalo de tempo entre a emissão de duas cristas de onda o universo não teve tempo suficiente para ter um aumento significativo, de forma que o fator de escala fica praticamente inalterado, ele pode sair das integrais de (3.15),

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_o)} \int_{t_o}^{t_o + \lambda_o/c} dt, \quad (3.16)$$

e, assim,

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_o}{a(t_o)}. \quad (3.17)$$

Usando a (3.10) na última equação, obtemos enfim a relação entre redshift e fator de escala,

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} = \frac{a_o}{a}, \quad (3.18)$$

que é justamente a (2.36). Uma radiação observada atualmente (quando o fator de escala vale  $a_o$ ) com redshift  $z$ , foi emitida quando o fator de escala era  $a$ .

Definido o redshift, é possível encontrar a expressão da distância própria em termos de  $z$ . A diferencial da expressão (3.18) pode ser escrita como

$$dz = -\frac{a_o}{a^2} \frac{da}{dt} dt = -\left(\frac{a_o}{a}\right) \left(\frac{da/dt}{a}\right) dt = -(1+z)H dt. \quad (3.19)$$

Logo, aplicando a mudança de  $t$  para  $z$  na (3.8), temos

$$d_p(t_o) = c \int_{t_e}^{t_o} \frac{a_o}{a} dt = -c \int_z^0 (1+z') \frac{dz'}{(1+z')H(z')}, \quad (3.20)$$

onde usamos o fato de que uma radiação emitida no instante da observação não apresenta redshift, e uma radiação emitida em  $t_e$  sofre redshift  $z$ . Assim, a expressão da distância própria em termos de uma integral em  $z$  é dada por

$$d_p(t_o) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.21)$$

Para objetos próximos, ou seja, baixos redshifts, de tal forma que  $H$  não tenha mudado significativamente no intervalo de tempo  $\Delta t = t_o - t_e$ ,  $H \approx H_o$ , e assim (3.21) resulta em

$$d_p(t_o) = \frac{c}{H_o} z, \quad (3.22)$$

que é a *lei de Hubble*, de distância proporcional ao redshift, descoberta em 1929 por Edwin Hubble. Pela (3.3), vimos que o produto  $cz$  é a velocidade de recessão, e podemos reescrever a (3.22) como

$$v_o = H_o d_p(t_o). \quad (3.23)$$

Hubble encontrou esta relação ao medir redshifts de galáxias e suas distâncias. Como eram galáxias próximas, obteve a proporcionalidade acima, e assim acreditava-se que

a expansão do universo se dava a uma taxa constante, e o valor primeiramente medido foi  $H_o \approx 500 \text{ km/s/Mpc}$ . Como veremos, este valor é muito alto comparado com o obtido atualmente.

Analisando a dimensão da constante de Hubble, podemos interpretá-la como sendo o aumento da velocidade de recessão a cada megaparsec. Assim, usando o valor primeiramente encontrado, temos que um ponto a 1 Mpc está se “afastando” com 500km/s, enquanto outro a 2 Mpc estará a 1000km/s e assim por diante.

## 3.2 Distâncias Curtas

Anteriormente discutimos a viabilidade da medida da distância própria. Claro que para pequenas distâncias, pequenas de tal forma que o universo não se expanda significativamente ao se viajar de um ponto a outro, é possível medir esta grandeza. Exatamente por isso, qualquer que seja o tipo de distância que venhamos a definir, esperamos que ela convirja para o valor da distância própria em baixos redshifts.

Mas para definir alguma distância, é necessário computá-la a partir de propriedades observadas. Para medir distâncias grandes, os astrônomos foram adaptando as medidas de distâncias curtas. A princípio, para obter com precisão a separação entre os corpos do sistema solar, foi utilizado o método de reflexão de sinais de radares. Já que as velocidades relativas dos objetos do sistema solar são muito menores que a velocidade da luz, as correções devido a esses movimentos são desprezíveis, e então, se um sinal leva  $\delta t$  para chegar num planeta e voltar à Terra, sua distância a nós será

$$d = \frac{c\delta t}{2}. \quad (3.24)$$

Esta técnica é muito precisa para distâncias menores que 10 Unidades Astronômicas (1UA=  $1,49 \times 10^{11} m$ ).

Para distâncias maiores que estas, as ondas de rádio refletidas são muito fracas para serem detetadas. Nesta escala, o método predileto é o de paralaxe trigonométrica.

Ao observar uma estrela de dois pontos distando  $b$  um do outro, a posição aparente da estrela sofre um deslocamento angular  $\theta$ . Assim, a distância paralaxe será

$$d_{\pi} = 1\text{pc} \left( \frac{b}{1\text{UA}} \right) \left( \frac{1\text{arcsec}}{\theta} \right), \quad (3.25)$$

onde  $1\text{pc} = 3,086 \times 10^{16}m$  e arcsec significa segundo de arco.

Usando a órbita da Terra como referência ( $b=2\text{UA}$ ), cujo raio tem ótima precisão pelas medidas de radar, a precisão da distância paralaxe é limitada pela precisão da medida de  $\theta$ . Devido a isto, este método é muito utilizado para descobrir distâncias dentro de nossa galáxia. Porém, ao tentar descobrir a distância a outras galáxias, a paralaxe é muito pequena para ser medida com a tecnologia atual. Tornam-se necessários outros métodos de medida.

### 3.3 Distância Luminosidade

Em um universo estático e euclidiano, sabemos que a propagação do sinal de uma fonte pontual se dá em frentes esféricas, de tal forma que um detetor situado a uma distância  $d$  da fonte medirá um fluxo, ou intensidade, com valor

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (3.26)$$

onde  $L$  é a luminosidade desta fonte, ou seja, a potência por ela irradiada. Como podemos medir o fluxo bolométrico – fluxo completo, integrado sobre todos os comprimentos de onda da luz – das radiações incidentes na Terra, e caso haja uma classe de objetos astronômicos cuja luminosidade é conhecida, torna-se útil definir uma função chamada *distância luminosidade*,

$$d_L \equiv \left( \frac{L}{4\pi f} \right)^{1/2}. \quad (3.27)$$

Ela é chamada de distância por sua dimensão e porque seria o valor da distância própria caso o espaço-tempo fosse estático e euclidiano (vale ressaltar que trabalhamos com  $k = 0$ , logo o espaço é euclidiano).

Se uma fonte emite fótons num instante  $t_e$ , no momento da observação,  $t_o$ , eles estarão espalhados em uma superfície cuja área própria será, no espaço euclidiano,

$$A_p(t_o) = 4\pi d_p(t_o)^2 = 4\pi a_o^2 r^2. \quad (3.28)$$

Quando um fóton é emitido, sua energia é  $E_e = hc/\lambda_e$ , e o fator de escala é  $a$ . Mas, devido ao redshift, em  $t_o$  temos

$$\lambda_o = \frac{a_o}{a} \lambda_e = (1+z)\lambda_e, \quad (3.29)$$

e a energia cairá para

$$E_o = \frac{E_e}{1+z}. \quad (3.30)$$

O intervalo de tempo entre a emissão de dois fótons e a recepção dos mesmos também será alterada por causa da expansão. Se o intervalo na emissão era  $\delta t_e$ , a distância própria entre eles era  $c\delta t_e$ . Na observação, esta distância será  $c\delta t_e(1+z)$ , e o intervalo de tempo na detecção será  $\delta t_o = \delta t_e(1+z)$ . Como o fluxo é dado pela potência detedada dividida pela área na qual a energia está espalhada, temos

$$f = \frac{E_o/\delta t_o}{4\pi a_o^2 r^2} = \frac{\frac{E_e/(1+z)}{\delta t_e(1+z)}}{4\pi a_o^2 r^2} = \frac{L}{4\pi a_o^2 r^2 (1+z)^2}. \quad (3.31)$$

Assim, a distância luminosidade (3.27) é dada por

$$d_L = a_o r (1+z) = d_p(t_o)(1+z), \quad (3.32)$$

que para baixos redshifts se aproxima do valor da distância própria. Substituindo a (3.21) na (3.32), temos a distância luminosidade em termos do parâmetro de Hubble,

$$d_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.33)$$

A grandeza definida nesta seção é útil quando temos um objeto astronômico que possui uma luminosidade conhecida, e admitindo que seu comportamento físico não varia de uma região do universo a outra. Este objeto é chamado então *devela-padrão*. Para conhecer sua luminosidade, basta obter a distância de um corpo daquela classe

próximo o suficiente para que possamos utilizar, por exemplo, o método da paralaxe, e medir o seu fluxo luminoso. Um exemplo é a classe de estrelas variáveis conhecidas como cefeidas – estrelas supergigantes altamente luminosas, com pulsação radial, a qual é percebida pela variação do brilho aparente. Henrietta Leavitt descobriu uma forma de calibração das cefeidas: uma relação entre período de pulsação e luminosidade para cefeidas próximas. Se essa relação é a mesma para todas as cefeidas, em qualquer galáxia, em qualquer região do cosmo, então a cefeida pode ser usada como uma vela padrão.

Assim, se se observa uma cefeida mais distante, através do período de pulsação obtém-se  $L$  – pela relação acima citada – e, ao medir seu fluxo, a (3.27) dará o valor da distância luminosidade.

### 3.4 Distância Diâmetro-Angular

Uma outra propriedade observada em objetos astronômicos é sua dimensão. Se para uma classe de objetos o comprimento próprio é conhecido, então ela pode ser usada como *régua-padrão*. É conveniente que a régua padrão seja um corpo mantido agregado por gravidade ou outros fatores, de tal forma que suas dimensões não aumentem com a expansão do universo.

Se um objeto tem comprimento  $\ell$ , está perpendicular à linha de visão, e suas extremidades submetem uma abertura angular  $\delta\theta$ , sendo essa abertura pequena, podemos definir uma função *distância diâmetro-angular* como

$$d_A \equiv \frac{\ell}{\delta\theta}, \quad (3.34)$$

que seria a distância própria caso o universo fosse estático e euclidiano. Estando o observador na origem do sistema co-móvel, e o objeto observado a uma distância comóvel  $r$  do observador, com seus extremos ocupando as posições comóveis  $(r_1, \theta_1, \phi)$  e  $(r_2, \theta_2, \phi)$ , a distância entre os dois extremos no momento da emissão da luz pode

ser obtida de (2.1):

$$ds = ar\delta\theta = \ell. \quad (3.35)$$

Sabendo o redshift sofrido pela radiação emitida por nossa régua padrão, temos

$$\ell = \frac{a_o r \delta\theta}{1+z}, \quad (3.36)$$

o que leva a concluir, pela (3.34), que

$$d_A = \frac{a_o r}{1+z}. \quad (3.37)$$

Comparando a (3.37) com a (3.32), temos a relação entre as distâncias luminosidade e diâmetro-angular,

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}, \quad (3.38)$$

e, ainda,

$$d_A(1+z) = d_p(t_o) = \frac{d_L}{1+z}. \quad (3.39)$$

Dessa forma, a distância própria de um objeto é maior que a diâmetro-angular e menor que a distância luminosidade. É curioso perceber que  $d_A$  coincide com o valor da distância própria no momento da emissão da radiação

$$d_A = \frac{d_p(t_o)}{1+z} = \frac{a_o r}{1+z} = ar = d_p(t_e), \quad (3.40)$$

lembrando que  $a$ , sem índice, é o fator de escala do universo no momento da emissão do sinal.

Para obter a distância diâmetro-angular em termos do parâmetro de Hubble, basta substituir (3.21) na primeira igualdade de (3.40), e, assim,

$$d_A = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.41)$$

A medida da distância diâmetro-angular encontra dificuldades observacionais. Uma régua-padrão deve ser larga o suficiente para que sua abertura angular seja medida com boa precisão. Para grandes distâncias seriam necessários grandes objetos.

Galáxias e aglomerados de galáxias são grandes o suficiente mas suas extremidades são difíceis de se definir de forma que se tenha um valor único e confiável para  $\delta\theta$ . Além disso, estes corpos não são isolados e rígidos, com comprimento fixo. Galáxias têm dimensões alteradas devido a sua interação com a vizinhança. Devido a essas dificuldades, tem sido mais comum o uso de velas-padrão e da distância luminosidade.

### 3.5 Magnitude e Módulo de Distância

Medidas de fluxos e luminosidades são expressas através do sistema de magnitudes. No século II a.C., o astrônomo grego Hiparco (160-125 a.C.) dividiu as estrelas visíveis a olho nu pelo seu brilho aparente, atribuindo 1 à mais brilhante e 6 às mais fracas. Em 1856, Norman Robert Pogson (1829-1891) verificou que a percepção do brilho pelo olho humano seguia uma lei logarítmica [22],

$$m = A \log f + B, \quad (3.42)$$

onde A e B são constantes, e f, o fluxo. Ele constatou que o fluxo correspondente a uma estrela de primeira magnitude ( $m = 1$ ) tinha brilho 100 vezes superior a uma com  $m = 6$ . Assim,

$$m_1 - m_2 = A \log \left( \frac{f_1}{f_2} \right) \Rightarrow 1 - 6 = A \log \left( \frac{100f_2}{f_2} \right), \quad (3.43)$$

obtendo-se  $A = -2.5$ . Dessa forma,

$$m_2 - m_1 = -2.5 \log \left( \frac{f_2}{f_1} \right). \quad (3.44)$$

A constante B define o zero da escala, e normalmente é utilizada a magnitude aparente da estrela Vega. Para o nosso estudo é irrelevante o zero da escala, pois trabalhamos basicamente com diferenças de magnitudes.

Definamos magnitude bolométrica *aparente* através de um valor de fluxo de referência  $f_x$ ,

$$m \equiv -2.5 \log \left( \frac{f}{f_x} \right). \quad (3.45)$$

A magnitude bolométrica *absoluta* de uma fonte de luz será a magnitude aparente quando este objeto tiver uma distância luminosidade de 10pc. Ela é definida pela luminosidade absoluta  $L$  e pelo valor de referência  $L_x$ , quando os objetos cujos fluxos são, respectivamente,  $f$  e  $f_x$  estão a uma distância luminosidade de 10 pc. Assim,

$$M \equiv -2.5 \log \left( \frac{L}{L_x} \right). \quad (3.46)$$

Tomando a diferença entre (3.46) e (3.45), temos

$$M - m = -2.5 \log \left( \frac{L f_x}{f L_x} \right), \quad (3.47)$$

e, com ajuda da (3.27),

$$M - m = -2.5 \log \left[ \frac{4\pi d_L^2}{4\pi(10\text{pc})^2} \right], \quad (3.48)$$

obtendo então

$$M - m = -5 \log \left( \frac{d_L}{10\text{pc}} \right). \quad (3.49)$$

Como trabalhamos com grandes distâncias – da ordem de megaparsecs – podemos fazer uma mudança de dimensão na (3.49),

$$M - m = -5 \log \left( \frac{d_L}{10^{-5}\text{Mpc}} \right) = -5 \log \left( \frac{d_L}{1\text{Mpc}} \right) - 25. \quad (3.50)$$

Medindo fluxos e luminosidades através da magnitude, é conveniente então definir o *módulo de distância*, dado por

$$\mu = m - M = 5 \log \left( \frac{d_L}{1\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (3.51)$$

Já que para uma mesma classe de objetos, ou seja, uma dada magnitude absoluta, objetos mais distantes terão magnitude aparente menor,  $\mu$  será sempre positivo.

Conhecendo-se as relações distância-redshift, podemos utilizá-las em testes observacionais, os quais começamos a discutir no próximo capítulo.

## Capítulo 4

# Supernovas

As estrelas são as principais fontes de observações do universo por emitirem radiação eletromagnética, incluindo frequências na faixa da luz visível. Esferas autogravitantes de gás ionizado, suas camadas são atraídas gravitacionalmente para o centro e núcleos de hidrogênio são muito comprimidos, a tal ponto que se fundem gerando núcleos de hélio, liberando grande quantidade de energia. Esse processo de liberação de energia das fusões nucleares gera uma pressão que sustenta as camadas gasosas, impedindo o colapso após atingido o equilíbrio.

Estrelas pouco massivas, em seu estágio final de evolução formam anãs brancas. No núcleo há elétrons livres, formando um gás de elétrons, e, por serem férmions, o princípio de exclusão de Pauli impõe um valor de densidade máxima para o mesmo, originando a chamada pressão de degenerescência. Essa pressão impede que as camadas gasosas da anã branca colapsem, caso sua massa seja menor que um valor crítico chamado *limite de Chandrasekhar*.

Se a estrela tiver massa superior a 10 massas solares, à medida em que o hidrogênio se esgota, o hélio é fundido em carbono, e elementos cada vez mais pesados vão sendo sintetizados até transformar o núcleo em ferro, quando não há mais como extrair energia através de fusão nuclear. A estrela então colapsa, ejetando a maior parte de sua massa em um fenômeno conhecido como *supernova*.

As supernovas apresentam luminosidades da ordem de  $10^{10}$  vezes a luminosidade solar, aumentam seu brilho em poucos dias, o qual decresce em centenas de dias. Fazendo um gráfico da variação do brilho com o tempo temos a *curva de luz* da supernova. O primeiro espectro de uma supernova foi obtido em 1885 pelo alemão Hermann Carl Vogel (1841-1907) [22].

Lembrando que queremos verificar se um modelo cosmológico é coerente com a realidade, precisamos de informações do universo em escala cosmológica, ou seja, dados de objetos muito distantes. Para objetos cada vez mais distantes, a informação é cada vez mais antiga, e o redshift é maior. E para que nessa longa viagem a radiação não se perca – não caia tanto em intensidade, sendo ainda detetável – a fonte deve ter alta luminosidade, liberando grande quantidade de energia. É de se esperar então que as supernovas sejam grandes candidatas a velas-pradrão na medida de distâncias cosmológicas. Mas não basta medir fluxo e redshift: deve haver algum padrão, alguma evidência de que certa classe de supernovas se comportam fisicamente da mesma forma, e que a elas possa associar um valor de luminosidade absoluta.

Uma vantagem observacional das supernovas é a possibilidade de se isolar a radiação emitida por elas. Se várias corpos emitem radiação e estão próximos, fica difícil delimitar qual a contribuição exata de cada um para a radiação total observada. Como as supernovas são temporárias – seu brilho aumenta e esmaece – é possível obter o fluxo que corresponde à radiação emitida apenas por ela, através do *método da subtração de imagens*: tem-se registrado qual era a radiação proveniente de uma região do espaço antes de surgir a explosão, e então ela é subtraída da total observada na presença da supernova.

As supernovas são classificadas em dois tipos, de acordo com uma proposta feita em 1941 por Rudolph Leo Bernhard Minkowski (1895-1976): as do tipo I, que não apresentam hidrogênio no espectro, e as do tipo II, as quais possuem linhas de emissão ou absorção de hidrogênio no espectro. Em uma subdivisão do primeiro tipo há as supernovas do tipo Ia. Uma típica supernova deste subgrupo ocorre quando uma

anã branca, num sistema binário, adquire massa da companheira por acreção e, ao ultrapassar o limite de Chandrasekhar, a explosão é acionada. A menos de alguns fatores, como a proporção exata de elementos na composição da anã branca, esta supernova se dá em condições físicas bem padronizadas. Assim, para supernovas do tipo Ia observadas em regiões distintas do universo, não se tem razões para acreditar que elas possuam comportamento físico distinto.

A análise das curvas de luz de diferentes supernovas do tipo Ia levou a um resultado interessante: elas são muito parecidas. Feitas as devidas correções, verifica-se que o comportamento de fato é padrão. Digamos que em uma galáxia próxima observou-se uma supernova, e nesta galáxia há uma cefeida. Pelo período de pulsação da cefeida sabemos qual sua magnitude, logo sabemos sua distância luminosidade. Se as dimensões da galáxia são pequenas comparadas com sua distância à Terra, essa é aproximadamente a distância luminosidade da supernova. Medindo seu fluxo, é possível descobrir qual deveria ser o fluxo detectado na Terra caso a supernova estivesse a 10 parsecs, ou seja, obtem-se a luminosidade absoluta. Ao se calibrar a curva de luz da supernova do tipo Ia, obteve-se uma magnitude absoluta de 19.5 mag no pico de luz.

Enfim, possuímos uma classe de objetos astronômicos que emitem grande radiação e, dessa forma, podem dar informações de pontos muito distantes de nós; esses objetos possuem um comportamento padrão e conhecemos sua magnitude absoluta, e, assim, medindo a magnitude aparente, obtemos sua distância luminosidade. Através também da radiação emitida é medido o redshift, que é uma medida independente da magnitude. Com esses dados será possível elaborar um teste cosmológico.

O uso de supernovas para se obter medidas cosmológicas permitiu a aquisição de informações relativas a maiores redshifts. Neste ponto, a aproximação utilizada para se obter (3.22) não é mais válida. De fato, os dados de supernovas mostraram que a lei de Hubble só é válida para baixos redshifts, e, assim, a expansão do universo não se dá a uma taxa constante. Era de se esperar que a expansão estivesse sendo

desacelerada pela atração gravitacional, mas os dados indicam que ela é acelerada ( $q_o < 0$ ), como veremos a seguir.

## 4.1 Procedimento do teste

No capítulo anterior foram apresentadas duas expressões que envolvem a distância luminosidade: a (3.33), que depende do redshift e do modelo cosmológico, e a (3.51), que depende da magnitude. Substituindo uma expressão na outra, obtém-se uma terceira que relaciona magnitude e redshift, duas grandezas medidas independentemente:

$$\mu = m - M = 5 \log \left[ \frac{c(1+z)}{1 \text{Mpc}} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right] + 25. \quad (4.1)$$

Cada modelo cosmológico terá sua função  $H(z)$ , como visto no segundo capítulo, e, assim, cada modelo tem sua curva módulo de distância *versus* redshift. Havendo um conjunto de supernovas onde, para cada uma, mede-se  $z$  e  $\mu$ , basta verificar se o modelo cosmológico se ajusta bem aos pontos dados pela observação. Como as supernovas observadas apresentam redshifts menores que 2, tomaremos as expressões de  $H(z)$  na fase de matéria. Mas podemos verificar nas (2.38) e (2.76) que os parâmetros de Hubble e de densidade de matéria atuais são parâmetros livres. Podemos então encontrar, para um modelo específico, qual par  $(H_o, \Omega_{m,o})$  dá o melhor ajuste aos dados observacionais.

Aplicamos então o teste do  $\chi^2$ , que define o quadrado da diferença entre o  $\mu$  teórico e o observado, dividido pelo quadrado do erro da medida. A depender do tratamento que se dá aos dados experimentais, deve-se levar em conta ainda um erro sistemático adicional, de tal forma que

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[\mu_{teo;i}(z|H_o, \Omega_{m,o}) - \mu_{obs;i}]^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{sist}^2}. \quad (4.2)$$

Para um conjunto de dados, o índice  $i$  refere-se a uma supernova específica. Escolhido um par de parâmetros  $(H_o, \Omega_{m,o})$ , sabendo-se o redshift da supernova  $i$ , calcula-

Nível	Probabilidade	$\Delta\chi^2$
$1\sigma$	68.3%	2.30
$2\sigma$	95.4%	6.17
$3\sigma$	99.73%	11.8

Tabela 4.1: Níveis de confiança para dois parâmetros livres.

se qual seria o módulo de distância teórico  $\mu_{teo}$ . Tendo-se o valor observado  $\mu_{obs}$ , mede-se para esta supernova qual a razão entre a diferença observação-teoria e o erro da medida. Fazendo-se isso para todas as supernovas do conjunto e somando, obtém-se o valor do  $\chi^2$ . Através de uma rotina *Fortran* fazemos esse somatório variando os valores dos parâmetros, e assim é possível encontrar o par para o qual o  $\chi^2$  assume um valor mínimo ( $\chi_{min}^2$ ).

Um parâmetro chamado  $\chi^2$  reduzido ( $\chi_r^2$ ) mede quão bom, estatisticamente falando, é o ajuste [23]. Ele é definido pela expressão

$$\chi_r^2 \equiv \frac{\chi_{min}^2}{\nu}, \quad (4.3)$$

onde  $\nu$  é o número de graus de liberdade – número de dados subtraído o número de parâmetros livres. Quanto mais próximo o valor do  $\chi_r^2$  ficar de 1, melhor o ajuste.

De posse do valor do  $\chi_{min}^2$ , é possível encontrar regiões no diagrama  $H_o$  versus  $\Omega_{m,o}$  delimitadas por níveis de confiança. Para cada nível está associada uma distância ao  $\chi_{min}^2$  e uma probabilidade de que o valor real da grandeza procurada esteja dentro daquela região. Esta relação pode ser verificada na Tabela 4.1, onde os valores da variação em relação ao  $\chi_{min}^2$  são para o caso de dois parâmetros livres [23].

Quanto mais distante do  $\chi_{min}^2$  uma região esteja, maior a certeza de que o valor real está dentro dela, mas também maior é a região. Os níveis utilizados geralmente são os três da tabela, ressaltando que a região de  $1\sigma$  é muito restritiva.

O parâmetro de densidade é adimensional, e é comum definir

$$h \equiv \frac{H_o}{100\text{km/s/Mpc}}, \quad (4.4)$$

de tal forma que o segundo parâmetro livre a ser ajustado também seja adimensional. Trabalharemos a partir daqui com o par  $(h, \Omega_{m,o})$ . Podemos, então, reescrever a (4.1) como

$$\mu = 5 \log \left[ (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right] - 5 \log h + 42.384, \quad (4.5)$$

onde usamos  $c = 3 \times 10^5$  km/s.

Já cientes do procedimento, resta apresentar os dados e resultados. O modelo  $\Lambda(t)$  foi ajustado utilizando quatro pacotes de dados – *samples* –, que chamaremos: Gold Sample, Legacy Survey, Gold 2006 e Essence. Não é possível juntar as quatro amostras em uma, pois cada conjunto foi disponibilizado por uma equipe internacional, e cada equipe fez um tratamento de dados distinto. Vejamos quais os resultados para cada amostra.

## 4.2 Gold Sample

Até meados de 2006, o *High Z Supernovae (HZS) Team* [24, 25] tinha um conjunto total de 186 supernovas, com redshifts de 0.01 a 1.7, composto pelos melhores dados do *Cosmology Project* e ainda 16 do Telescópio Espacial Hubble. Deste conjunto, os valores mais confiáveis formam o chamado *Gold Sample*, e o restante, o *Silver Sample*. No presente teste, trabalhamos apenas com o Gold Sample, que é constituído por 157 supernovas [1].

Para todos os testes variamos os parâmetros  $h$  e  $\Omega_{m,o}$  de 0 a 1, com um passo de 0.0025. Tanto os valores dos parâmetros que deram o *best-fit*, ou seja, o menor  $\chi^2$ , como o  $\chi_r^2$  estão apresentados na Tabela 4.2. Lembrando-se que sempre foi feito o

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.390	0.640	1.157
$\Lambda$ CDM	0.313	0.643	1.143

Tabela 4.2: Valores dos parâmetros obtidos com o Gold Sample.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$
$1\sigma$	[0.360;0.418]	[0.284;0.339]	[0.634;0.645]	[0.637;0.648]
$2\sigma$	[0.332;0.447]	[0.259;0.368]	[0.629;0.651]	[0.632;0.653]
$3\sigma$	[0.305;0.477]	[0.235;0.397]	[0.624;0.656]	[0.626;0.659]

Tabela 4.3: Intervalos nos três níveis de confiança dados pelo Gold Sample.

mesmo teste com o modelo padrão ( $\Lambda\text{CDM}$  com  $k = 0$ ), tanto para garantir que o procedimento realizado estava correto, quanto para comparar os resultados do modelo  $\Lambda(t)$  com os do padrão. O  $\Lambda\text{CDM}$  apresentou um menor parâmetro de densidade de matéria, e um  $\chi_r^2$  mais próximo de 1. Como o  $\chi_r^2$  para o  $\Lambda(t)$  não ficou muito acima do valor deste parâmetro no modelo padrão, os ajustes nos dois modelos são igualmente bons.

Os diagramas  $h - \Omega_{m,o}$  da Figura 4.1 mostram as regiões correspondentes aos

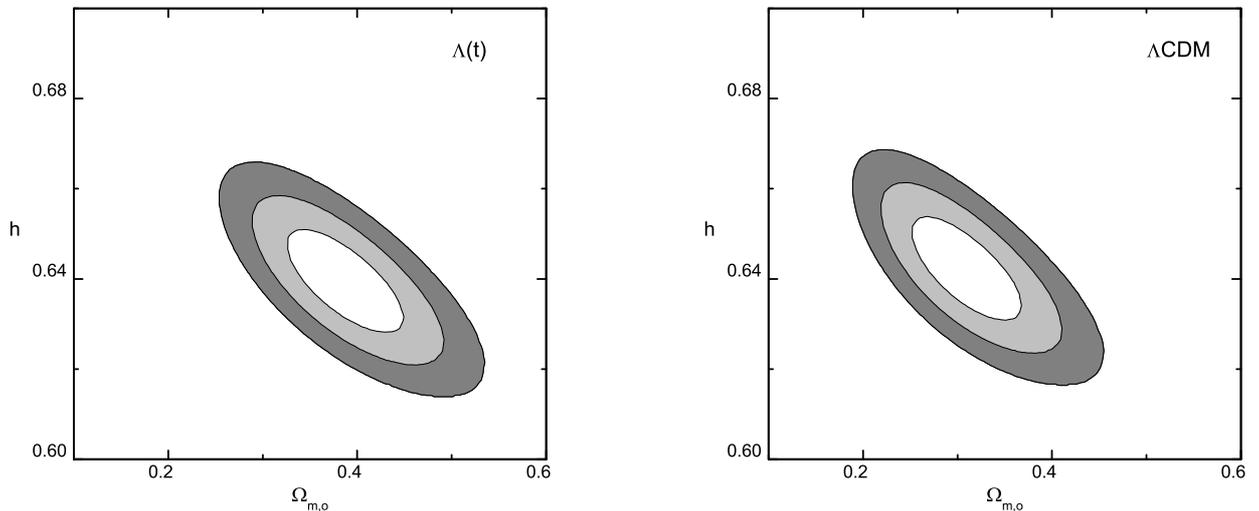


Figura 4.1: Regiões de confiança do ajuste com o Gold Sample de ambos modelos.

três níveis de confiança explorados. Os pontos dentro da região mais interna possuem 68.3% de chances de serem o valor real do parâmetro; os da região seguinte têm 95.4%, e assim por diante. Os intervalos dos valores dos parâmetros para cada nível estão na Tabela 4.3. Percebemos que, apesar de o modelo aqui estudado apresentar valores maiores para o parâmetro de densidade, há uma região de intersecção entre os intervalos. A Figura 4.1 mostra que o diagrama para o modelo aqui estudado apresenta um deslocamento para maiores densidades, isto ocasionado provavelmente pela produção de matéria associada ao decaimento do vácuo.

Com auxílio de (2.78) e (2.73) encontramos que, para  $2\sigma$ ,  $\Lambda(t)$  possui  $q_o = -0.42^{+0.08}_{-0.09}$  e  $H_o t_o = 1.03^{+0.07}_{-0.06}$ , que resulta uma idade do universo de 15.72 Gyr (1 Gyr =  $10^9$  anos). Já o  $\Lambda$ CDM, com (2.35) e (2.46), possui  $H_o t_o = 0.95^{+0.05}_{-0.04}$ , obtendo-se  $t_o = 14.51$  Gyr e  $q_o = -0.53 \pm 0.08$  [1]. Encontrar uma maior idade pode justificar a existência de objetos mais antigos que a idade do universo estimada pelo modelo padrão. Os fatores de desaceleração negativos mostram, por outro lado, que de fato os dados de supernovas indicam que a expansão é atualmente acelerada.

### 4.3 Legacy Survey

O segundo teste foi feito com a amostra do *Supernovae Legacy Survey* (SNLS) [26]. Ele é composto pelos resultados do primeiro ano dos cinco planejados para o projeto. Inclui 71 supernovas com redshifts entre 0.2 e 1, aproximadamente, além de 44 com baixo redshift adquiridos da literatura, mas analisadas da mesma maneira que as com alto redshift. É considerado o melhor pacote de supernovas com alto redshift,

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.325	0.698	1.008
$\Lambda$ CDM	0.263	0.700	1.005

Tabela 4.4: Valores dos parâmetros obtidos com o Legacy.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$
$1\sigma$	[0.301;0.349]	[0.241;0.285]	[0.693;0.703]	[0.696;0.705]
$2\sigma$	[0.278;0.373]	[0.220;0.308]	[0.688;0.707]	[0.691;0.710]
$3\sigma$	[0.255;0.398]	[0.200;0.331]	[0.684;0.712]	[0.686;0.715]

Tabela 4.5: Intervalos nos três níveis de confiança dados pelo Legacy.

tanto pela técnica de obtenção de dados como pela cuidadosa calibração das medidas, além de constituir a amostra com melhor acordo com os dados mais recentes da CMB. Uma estimativa cuidadosa de erros sistemáticos levou a um valor de  $\sigma_{sist} = 0.13$ , que deve ser somado ao erro na medida da magnitude no cálculo do  $\chi^2$  (ver (4.2)).

O *best-fit* para ambos modelos encontra-se na Tabela 4.4. Os valores do  $\chi_r^2$  são novamente muito próximos um do outro, e como a diferença está na terceira casa decimal, podemos afirmar que os ajustes são igualmente bons. Esta amostra fornece

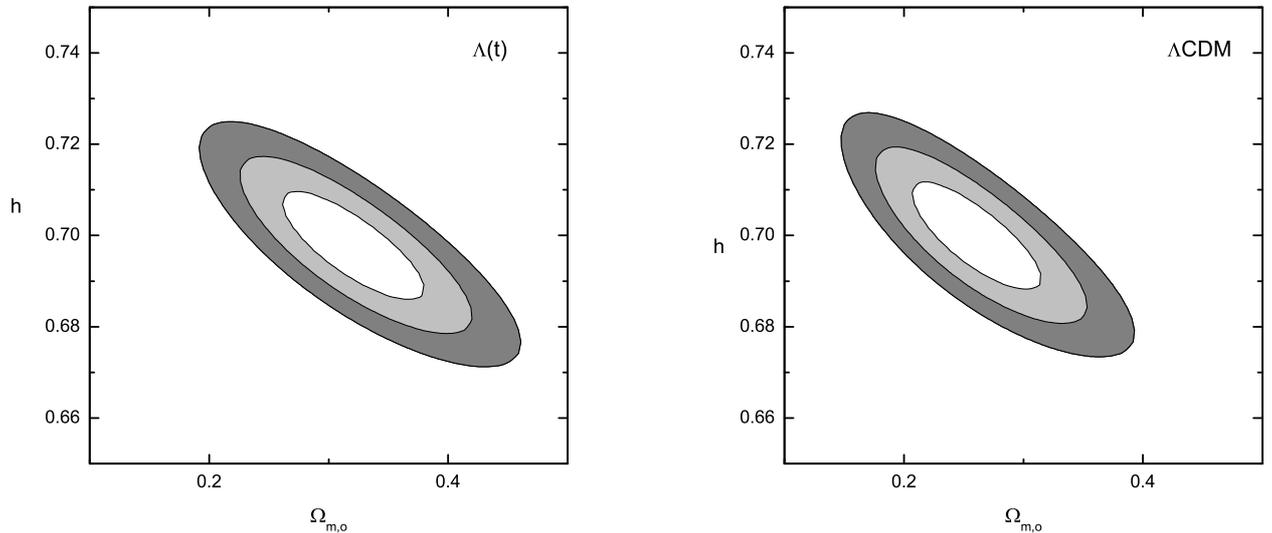


Figura 4.2: Regiões de confiança do ajuste com o Legacy de ambos modelos.

uma densidade de matéria menor para o modelo estudado, em comparação com o Gold Sample, mas outra vez mais alta que no  $\Lambda$ CDM. Porém, analisando a Tabela 4.5, verificamos que para um nível de confiança de 95.4%, o intervalo de  $\Omega_{m,o}$  para o  $\Lambda(t)$  inclui o valor 0.27, o mais aceito no caso do modelo padrão [1]. A Figura 4.2 compara os diagramas  $h - \Omega_{m,o}$  para ambos modelos, onde outra vez verificamos o deslocamento para maiores densidades de matéria no  $\Lambda(t)$ .

Novamente com  $2\sigma$ , o parâmetro de idade para o  $\Lambda(t)$  é  $H_0 t_o = 1.11_{-0.06}^{+0.07}$ , com o qual encontramos a idade do universo de 15.56 Gyr, enquanto para o  $\Lambda$ CDM temos  $H_0 t_o = 1.00_{-0.04}^{+0.05}$ , e, conseqüentemente, uma idade de 13.97 Gyr. Novamente o modelo estudado confere ao universo uma idade maior que no modelo padrão. Quanto ao fator de desaceleração, ambos modelos resultam em um universo atualmente acelerado, porém, para o  $\Lambda(t)$  temos  $q_o = -0.51 \pm 0.07$  e, no  $\Lambda$ CDM,  $q_o = -0.61_{-0.06}^{+0.07}$ .

## 4.4 Gold 2006

No final de 2006 um novo pacote foi divulgado, incluindo 21 supernovas descobertas pelo Telescópio Espacial Hubble, com os mais altos redshifts obtidos até então. Esta amostra possui também dados do Gold Sample anterior e do Legacy – com todas medidas calibradas segundo uma mesma técnica –, totalizando 182 supernovas [27].

Utilizando esta amostra, obtivemos para os valores que dão o melhor ajuste aqueles apresentados na Tabela 4.6. Ambos modelos apresentaram alto valor de densidade de matéria, e o valor do  $\chi_r^2$  mostra que este ajuste não é tão bom quanto os expostos anteriormente. Da tabela 4.7 temos que, para o  $\Lambda(t)$ , mesmo no nível  $3\sigma$ , o intervalo

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.430	0.623	0.896
$\Lambda$ CDM	0.343	0.628	0.882

Tabela 4.6: Valores dos parâmetros obtidos com o Gold 2006.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$
$1\sigma$	[0.407;0.451]	[0.322;0.363]	[0.618;0.627]	[0.623;0.632]
$2\sigma$	[0.386;0.473]	[0.302;0.385]	[0.613;0.631]	[0.618;0.637]
$3\sigma$	[0.366;0.495]	[0.283;0.407]	[0.609;0.636]	[0.614;0.641]

Tabela 4.7: Intervalos nos três níveis de confiança dados pelo Gold 2006.

do parâmetro de densidade fica ainda muito alto no limite inferior. E mesmo com o modelo padrão,  $\Omega_{m,o}$  só é próximo do valor dado pela CMB no limite inferior do terceiro nível. Os valores para  $h$  também são baixos comparados com os resultados das amostras anteriores.

A Figura 4.3 mostra os diagramas  $h - \Omega_{m,o}$ , onde novamente o  $\Lambda(t)$  é deslocado para maiores densidades de matéria.

Utilizando o nível  $2\sigma$  para cálculo do fator de desaceleração e do parâmetro de

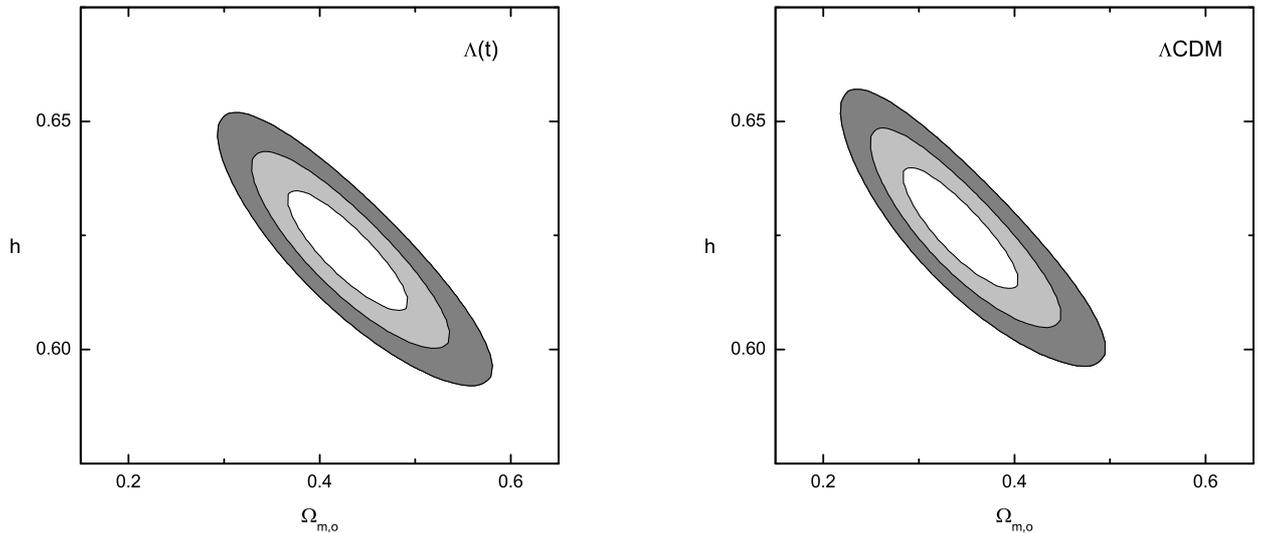


Figura 4.3: Regiões de confiança do ajuste com o Gold 2006 de ambos modelos.

idade, obtemos, para o modelo  $\Lambda(t)$ ,  $q_o = -0.36_{-0.06}^{+0.07}$  e  $H_o t_o = 0.99 \pm 0.04$ , resultando numa idade de 15.51 Gyr. Já para o  $\Lambda$ CDM temos  $q_o = -0.49_{-0.06}^{+0.07}$  e  $H_o t_o = 0.93 \pm 0.03$ , o qual dá a idade de 13.64 Gyr. Para ambos modelos o universo se apresenta em expansão acelerada, com o menor fator de desaceleração de todos os ajustes.

## 4.5 Essence

Também no final de 2006, foram divulgados os resultados do primeiro ano de quatro do *ESSENCE survey* (*Equation of State: SuperNovae trace Cosmic Expansion*) [28]. Segundo o tratamento dos dados observacionais feito pelo grupo deste projeto, as medidas apresentaram um erro sistemático de  $\sigma_{sist} = 0.15$ , o qual deve ser levado em conta no cálculo do  $\chi^2$ . Utilizando-se as 192 supernovas desta amostra, os resultados obtidos para melhor ajuste estão na Tabela 4.8.

Mais uma vez, o modelo  $\Lambda(t)$  apresentou maior  $\Omega_{m,o}$ , o que pode ser visto também na Tabela 4.9 e na Figura 4.4. Apesar de fornecer valores mais consistentes com outras observações que o Gold 2006, foi o conjunto de dados que obteve o pior  $\chi_r^2$  das quatro amostras, sendo o pior ajuste de todos.

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.350	0.650	0.666
$\Lambda$ CDM	0.270	0.655	0.659

Tabela 4.8: Valores dos parâmetros obtidos com o Essence.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM
$1\sigma$	[0.325;0.377]	[0.246;0.293]	[0.644;0.656]	[0.649;0.661]
$2\sigma$	[0.300;0.404]	[0.224;0.318]	[0.639;0.662]	[0.643;0.666]
$3\sigma$	[0.276;0.431]	[0.202;0.344]	[0.633;0.668]	[0.637;0.672]

Tabela 4.9: Intervalos nos três níveis de confiança dados pelo Essence.

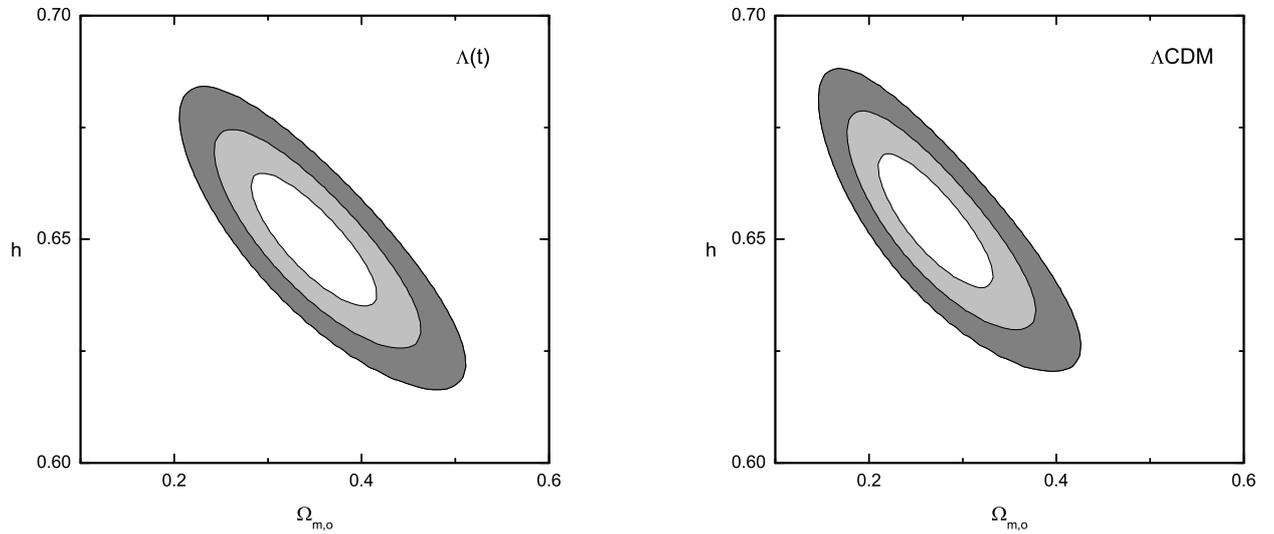


Figura 4.4: Regiões de confiança do ajuste com o Essence de ambos modelos.

Obtivemos, com 95.4% de confiança, que no modelo  $\Lambda(t)$  o fator de desaceleração vale  $q_o = -0.48^{+0.09}_{-0.07}$ , enquanto o parâmetro de idade  $H_o t_o = 1.08 \pm 0.07$ , o qual resulta numa idade de 16.20 Gyr. Fazendo os cálculos para o modelo padrão, encontramos  $q_o = -0.60^{+0.08}_{-0.06}$  e  $H_o t_o = 0.99^{+0.05}_{-0.04}$ , dando, por sua vez, uma idade de 14.82 Gyr.

## 4.6 Comparação entre as amostras

O diagrama de Hubble relaciona graficamente duas grandezas medidas independentemente: módulo de distância e redshift. Nas Figuras 4.5 e 4.6 está representado este diagrama para cada amostra, na ordem em que foram apresentadas. Tanto nos diagramas como nos gráficos das diferenças, percebemos que o Legacy é a amostra que apresenta menor dispersão, sendo mais um motivo para ser considerado o melhor conjunto de dados. Um preço a se pagar em trabalhar com esta amostra é abrir mão dos dados de supernovas em maiores redshifts.

Cada curva foi feita utilizando-se o *best-fit* de cada modelo, fazendo uso de cada amostra. O modelo aqui estudado apresenta um comportamento muito próximo do  $\Lambda$ CDM, apresentando diferenças percentuais em torno de 1% no valor do módulo de distância para cada redshift. Essa diferença aumenta para maiores redshifts, mas não podemos afirmar qual modelo é melhor neste aspecto. Não se têm ainda informações mais precisas de supernovas em redshifts maiores que 1, e só será possível verificar qual modelo se ajusta melhor para altos redshifts quando houver dados observacionais nesta região do diagrama de Hubble.

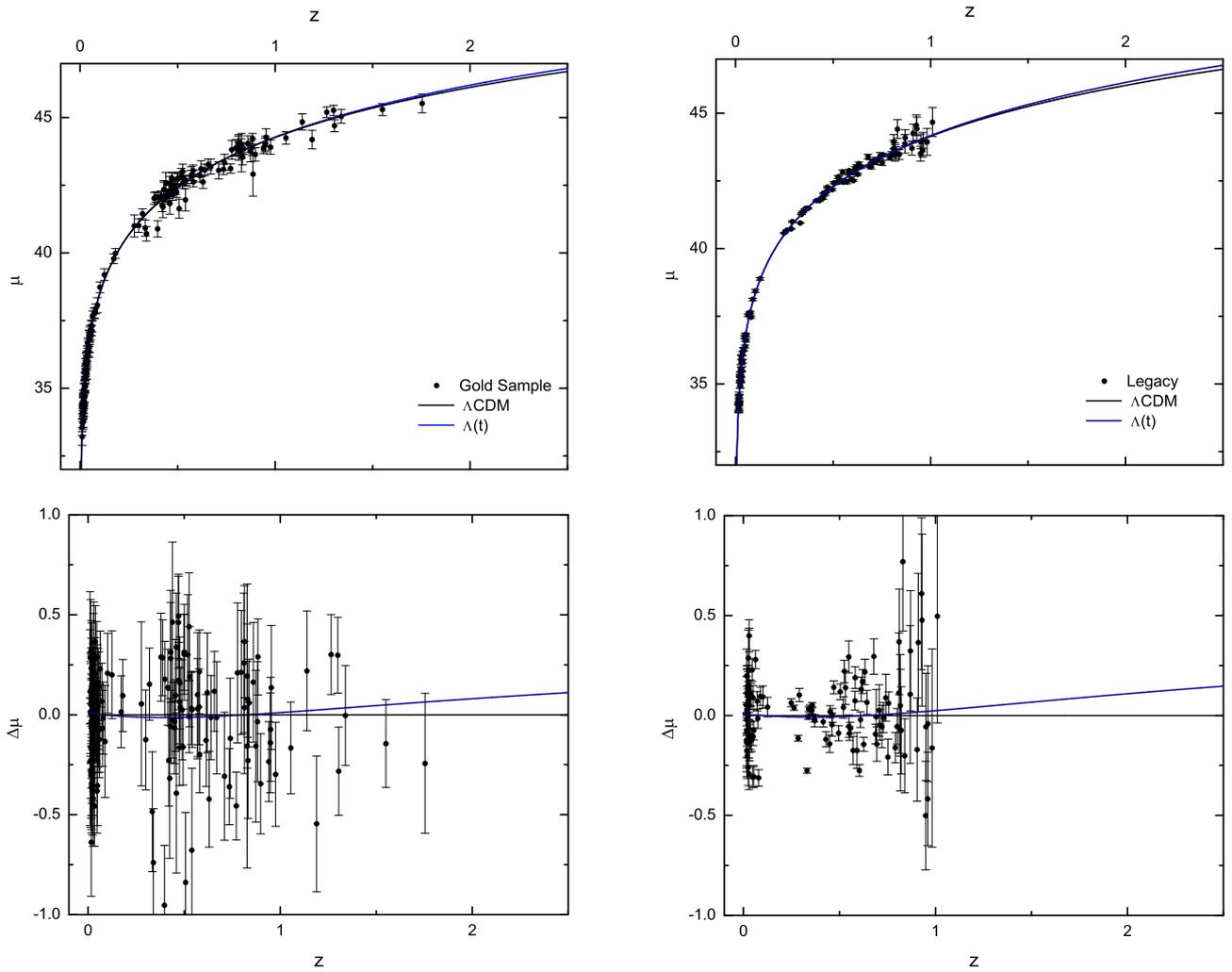


Figura 4.5: Diagramas de Hubble obtidos com os valores de *best-fit* seguidos pelas diferenças em relação ao  $\Lambda$ CDM.

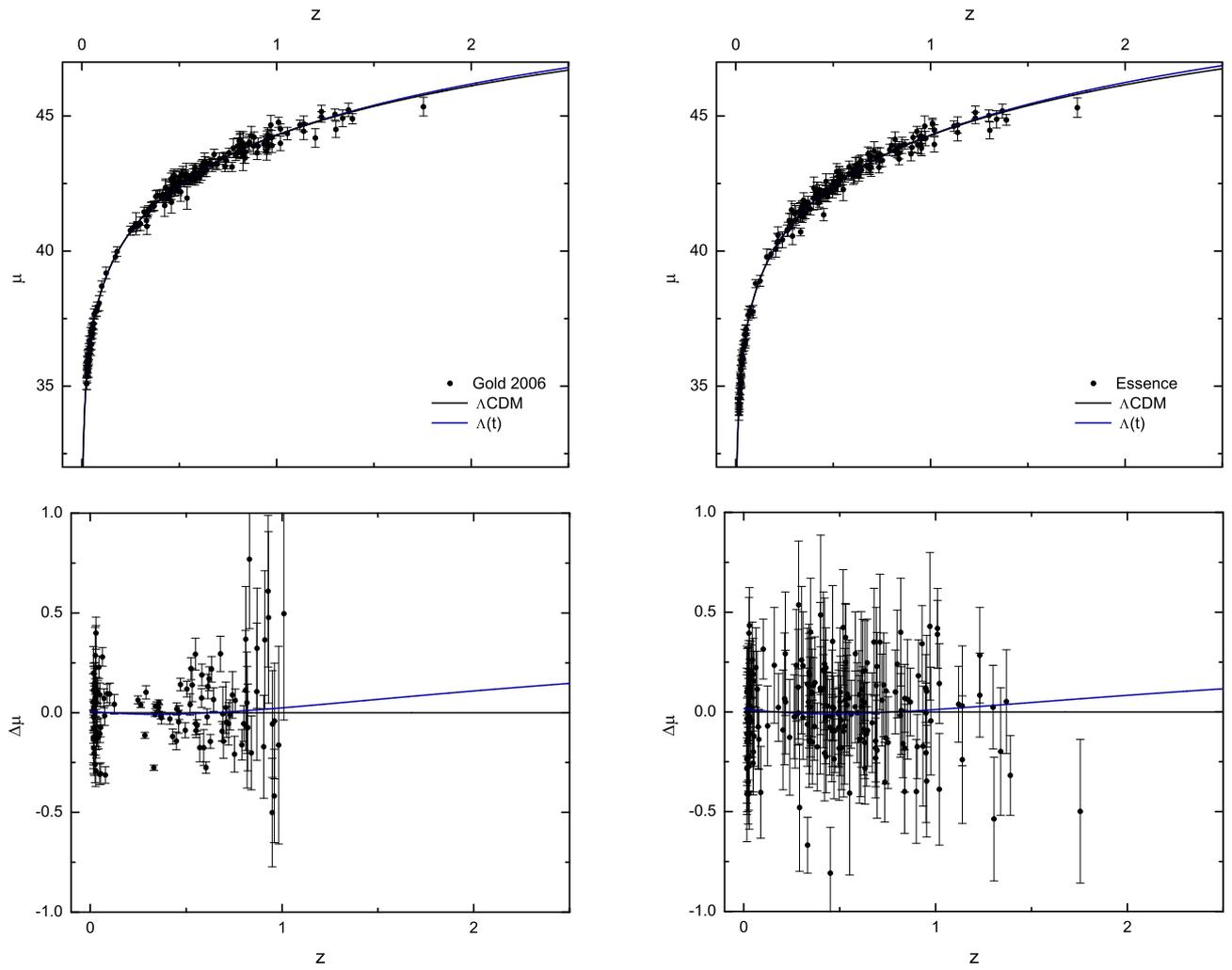


Figura 4.6: Diagramas de Hubble e respectivas diferenças em relação ao  $\Lambda$ CDM.

## Capítulo 5

# Radiação Cósmica de Fundo

Os americanos Arno Penzias e Robert Wilson [4], trabalhando nos laboratórios Bell, projetaram em 1960 uma antena para testes de comunicação, recebendo sinais em microondas com comprimento de onda  $\lambda = 7.35$  cm, refletidos de um satélite de comunicações em órbita. Apontando esta antena para o espaço, eles encontram um ruído no sinal recebido, e fizeram de tudo para eliminá-lo. Após várias tentativas, o ruído permanecia, isotrópico e constante no tempo, de tal forma que não podia ser associado a uma fonte isolada, compacta, sendo então uma radiação de origem cósmica.

Ao entrarem em contato com Robert Dicke e seu grupo de pesquisa na Universidade de Princeton, conclui-se que eles tinham obtido a evidência mais forte para o modelo do Big Bang. Em 1948, George Gamow e colaboradores haviam previsto que, se o universo começou em um estado muito quente e denso, ele deveria estar agora preenchido de radiação em microondas. Dicke e seu grupo estavam de fato em processo de construção de uma antena que detetasse a radiação prevista, mas então constataram que Penzias e Wilson já a haviam detetado, descoberta que os consagrou com o Nobel de Física em 1978.

Segundo o modelo do Big Bang, um fóton da CMB era muito energético no universo primordial, mas com a expansão espacial o fóton “sofre” redshift, e atualmente

sua energia é comparável com a energia de vibração e rotação de pequenas moléculas como a água. Logo, após viajar 13 a 15 bilhões de anos, um fóton da CMB pode ser absorvido por uma molécula de água da atmosfera terrestre. Microondas com comprimento abaixo de 3 cm são fortemente absorvidas. Para obter o espectro desta radiação numa larga faixa de comprimentos de onda, é necessária a utilização de balões, ou fazer a observação da radiação no pólo Sul, onde baixas temperaturas e grandes altitudes mantêm a umidade baixa. Mas a melhor maneira é fugir da atmosfera, e, para isso, em 1989 foi lançado o satélite COBE (*COsmic Backgroud Explorer*) [29, 30, 31].

Com o conjunto de instrumentos do COBE, foi possível medir pela primeira vez com boa precisão o espectro da CMB. Obteve-se que para qualquer posição angular  $(\theta, \phi)$  do céu, o espectro da CMB é muito próximo do de um corpo negro ideal, fortalecendo o modelo de um universo inicialmente muito quente e opaco. O FIRAS (*Far InfraRed Absolute Spectrophotometer*) detectou flutuações no espectro em relação ao de um corpo negro ideal da ordem de  $10^{-4}$ .

A CMB apresentou uma distorção dipolar, onde em uma metade do céu o espectro sofre blueshift, desviado para altas temperaturas, enquanto na outra metade é desviado para o vermelho. Isto ocorre devido ao movimento do COBE em torno da Terra, dos movimentos da Terra, do Sol, da galáxia e do Grupo Local. Extraído o efeito destes movimentos, obtém-se um referencial onde a CMB é isotrópica, e, se para cada ponto do céu é medida a temperatura  $T(\theta, \phi)$  da CMB incidente, podemos encontrar a temperatura média [32] com a integral

$$\langle T \rangle = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 2.725K. \quad (5.1)$$

O que se achava inicialmente ser uma radiação uniforme, com o COBE verificou-se apresentar flutuações em sua distribuição de temperatura. Vamos definir a flutuação de temperatura para cada ponto do céu como a função

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) \equiv \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}. \quad (5.2)$$

A partir dos mapas do céu feitos por um instrumento a bordo do COBE chamado DMR (*Differential Microwave Radiometer*), após subtração da distorção dipolar e da contaminação por nossa própria galáxia, encontrou-se que [4]

$$\left\langle \left( \frac{\delta T}{T} \right)^2 \right\rangle^{1/2} = 1.1 \times 10^{-5}. \quad (5.3)$$

Com variações de apenas  $30\mu K$ , podemos afirmar que a CMB é muito próxima de isotrópica. Incluindo o fato de ela ter espectro muito próximo de um corpo negro ideal, as observações da CMB indicam que o universo foi muito quente, denso, opaco e aproximadamente homogêneo, como é proposto no modelo conhecido como *Hot Big Bang*. É muito complicado tentar justificar a existência de tal radiação em um universo estacionário.

## 5.1 Corpo negro e expansão homogênea

Objeto opaco em equilíbrio térmico, o corpo negro absorve toda a luz que incide sobre ele e emite radiação térmica cujo espectro só depende de sua temperatura. A densidade de energia dos fótons numa faixa de frequência  $f \rightarrow f + df$  em um corpo negro é dada pela função

$$\varepsilon(f)df = \frac{16\pi^2\hbar}{c^3} \frac{f^3 df}{\exp(2\pi\hbar f/kT) - 1}, \quad (5.4)$$

onde  $k = 8.617 \times 10^{-5} eVK^{-1}$  é a constante de Boltzmann, e  $\hbar = 6.583 \times 10^{-16} eVs$ , a constante de Planck reduzida. Integrando (5.4) em todas as frequências, encontramos

$$\varepsilon_\gamma = \alpha T^4, \quad (5.5)$$

que é a lei de Stefan-Boltzmann, com

$$\alpha = \frac{\pi^2 k^5}{15\hbar^3 c^3} = 7.56 \times 10^{-16} Jm^{-3}K^{-4}. \quad (5.6)$$

Como sabemos que a densidade de radiação na expansão cai com a quarta potência do fator de escala, obtemos a simples relação

$$T(t) \propto a(t)^{-1}. \quad (5.7)$$

Podemos encontrar a densidade do número de fótons lembrando que a energia do fóton com frequência  $f$  é

$$E_\gamma = 2\pi\hbar f. \quad (5.8)$$

Logo, a densidade de energia  $\varepsilon(f)$  pode ser reescrita como o produto da densidade  $n$  de fótons com frequência  $f$  pela energia de um fóton com essa frequência,

$$\varepsilon(f) = n(f)2\pi\hbar f, \quad (5.9)$$

e assim, substituindo esta última relação em (5.4), encontramos

$$n(f)df = \frac{8\pi}{c^3} \frac{f^2 df}{\exp(2\pi\hbar f/kT) - 1}, \quad (5.10)$$

que, integrada em todas as frequências, dá a densidade de fótons na radiação de corpo negro,

$$n_\gamma = \beta T^3, \quad (5.11)$$

onde

$$\beta = \frac{2.404k^3}{\pi\hbar^3 c^3} = 2.03 \times 10^7 m^{-3} K^{-3}. \quad (5.12)$$

É possível ainda encontrar a energia média dos fótons de um corpo negro,

$$\langle E_\gamma \rangle = \frac{\varepsilon_\gamma}{n_\gamma} \approx 2.70kT. \quad (5.13)$$

Outro número importante é a fração de bárions por fótons, que escreveremos como

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma}. \quad (5.14)$$

Como no modelo  $\Lambda(t)$  foi feita a suposição de que o vácuo só produz matéria escura, há a conservação dos bárions, e, como verificamos no capítulo 2, sua densidade evoluirá com o inverso de  $a^3$ ,

$$\varepsilon_b = \varepsilon_{b,o} \left( \frac{a_o}{a} \right)^3 = \varepsilon_{b,o} (1+z)^3. \quad (5.15)$$

Simbolizando a energia de repouso do próton – ou do nêutron – por  $E_b$ , a densidade do número de bárions pode então ser dada por

$$n_b = \frac{\varepsilon_b}{E_b} = \frac{\varepsilon_{b,o}}{E_b} \left(\frac{a_o}{a}\right)^3 = n_{b,o} (1+z)^3. \quad (5.16)$$

Podemos utilizar a proporcionalidade (5.7) para obter a relação

$$T = \left(\frac{a_o}{a}\right) T_o = (1+z)T_o, \quad (5.17)$$

onde  $T$  é a temperatura associada aos fótons da CMB quando o fator de escala é  $a$ . Podemos também escrever a fração bárion-fóton como

$$\eta = \frac{n_{b,o}}{\beta T_o^3}. \quad (5.18)$$

Estudos minuciosos de nucleossíntese [20] determinam muito bem o valor da densidade atual de bárions como  $n_{b,o} = 0.23 \pm 0.002\text{m}^{-3}$ , e vimos na secção anterior que a temperatura média atual associada aos fótons da CMB é  $T_o = 2.725$  K. Assim,  $\eta = 5.6 \times 10^{-10}$ .

## 5.2 Estágios do universo primordial

Analisemos de maneira simplificada o modelo do Big Bang quente. Não há sentido falar de um instante anterior ao Big Bang, visto que neste fenômeno teria se dado a origem do espaço e do tempo. Sem entrar nos detalhes da teoria quântica de campos, como no início a escala de energia era muito grande, visto que é associada uma temperatura muito alta próximo de  $t=0$ , é intuitivo concluir que nestas condições havia uma “sopa” de quarks, elétrons e fótons tão energéticos que a formação de bárions estáveis seria fisicamente inviável. Os fótons com alta energia eram constantemente espalhados pela matéria, de forma que não conseguiam circular livremente, caracterizando um universo opaco.

Ao passo que a expansão progrediu, com conseqüente resfriamento do universo, foi possível a união de quarks para formar bárions. Porém, inicialmente as energias

dos fótons são suficientemente altas para impedir que os elétrons sejam aprisionados pelos prótons. Dessa forma, o universo continua ainda opaco. Nesta seção queremos justamente analisar de forma mais cuidadosa, mas também aproximada, como a matéria bariônica deixou de ser um componente de um plasma ionizado, passando a ser um gás de átomos neutros, e a sua relação com a passagem de um universo opaco para um universo transparente, explicando assim de onde provêm os fótons observados na CMB. Para tanto, vamos definir e estudar três momentos da história do universo fortemente relacionados, porém distintos.

### 5.2.1 Recombinação

O momento da recombinação aconteceu quando o universo deixou de ser ionizado e tornou-se neutro. Para simplificar o estudo, vamos supor que, inicialmente, os bárions capturaram elétrons e formaram apenas hidrogênio. Assim, trabalhamos apenas com uma escala de energia relevante, que é a de ionização do hidrogênio,  $Q = 13.6$  eV. Neste período teremos basicamente a reação



Um fóton com energia superior a 13.6 eV provoca a reação da esquerda para a direita, chamada de *fotoionização*. O sentido oposto pode ocorrer, constituindo a *recombinação radioativa*, formando um átomo de hidrogênio. A fração de íons no universo em um dado instante dependerá do balanço entre estas duas reações. Definamos esta fração como

$$X \equiv \frac{n_p}{n_p + n_H} = \frac{n_p}{n_b} = \frac{n_e}{n_b}, \quad (5.20)$$

onde o índice indica se se trata de densidade de prótons (p), elétrons (e), bárions (b) ou hidrogênio (H). Para obtermos um universo neutro,  $n_p$  deve ser igual a  $n_e$ . O instante da recombinação é definido quando  $X = 1/2$  [33], ou seja, o momento a

partir do qual a quantidade de hidrogênio neutro irá superar a de íons. Encontremos qual a temperatura e o redshift associados à recombinação.

Enquanto os fótons são espalhados frequentemente pelos elétrons, eles permanecem em equilíbrio térmico com os mesmos e, indiretamente, com os prótons. Ou seja, enquanto houver acoplamento fóton-elétron, fótons e bárions estarão à mesma temperatura. Neste período, a reação (5.19) estará em equilíbrio estatístico, e podemos escrever a densidade de número de partículas de um componente  $x$  através da equação de Maxwell-Boltzmann,

$$n_x = g_x \left( \frac{m_x kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_x c^2}{kT}\right), \quad (5.21)$$

onde  $m_x$  é a massa da partícula  $x$ ,  $g_x$  seu peso estatístico – associado aos possíveis estados de spin – e  $\hbar = h/2\pi$ . Podemos então escrever

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \frac{g_H}{g_p g_e} \left( \frac{m_H}{m_p m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{[m_p + m_e - m_H]c^2}{kT}\right). \quad (5.22)$$

Sabendo que a massa do elétron é muito pequena comparada com a do próton, façamos  $m_H/m_p = 1$ . A energia necessária para dissociar o elétron do hidrogênio é justamente dada pelo numerador do termo na exponencial. Sabemos que os pesos estatísticos do próton e do elétron são iguais, sendo  $g_p = g_e = 2$ , enquanto para o hidrogênio temos  $g_H = 4$ . Assim, obtemos a *equação de Saha*,

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left( \frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{Q}{kT}\right). \quad (5.23)$$

Reescrevendo a (5.20) como

$$n_H = \frac{1-X}{X} n_p, \quad (5.24)$$

a equação de Saha torna-se

$$\frac{1-X}{X} = n_p \left( \frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{Q}{kT}\right), \quad (5.25)$$

onde utilizamos a condição de universo neutro, ou seja,  $n_p = n_e$ .

Tomando novamente a (5.20), ao substituir na (5.14) encontramos

$$\eta = \frac{n_p}{Xn_\gamma}, \quad (5.26)$$

e, com ajuda das (5.11) e (5.12), a densidade de prótons pode ser expressa por

$$n_p = 0.243X\eta \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3. \quad (5.27)$$

Finalmente, a equação Saha adquire a forma

$$\frac{1-X}{X^2} = 3.84\eta \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( \frac{Q}{kT} \right), \quad (5.28)$$

sendo uma equação quadrática e, como uma fração próton-bárion negativa não é fisicamente possível, tem como única solução

$$X = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4S}}{2S}, \quad (5.29)$$

onde

$$S(T, \eta) = 3.84\eta \left( \frac{kT}{m_e c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left( \frac{Q}{kT} \right). \quad (5.30)$$

Sabendo que a energia de repouso do elétron é  $m_e c^2 = 0.5110$  MeV, e com os valores de  $\eta$ ,  $k$  e  $Q$  citados anteriormente, encontramos graficamente que a temperatura associada ao momento em que  $X = 1/2$  – a temperatura de recombinação – vale  $T_{rec} = 3752$  K. Através de (5.17) obtemos o redshift de recombinação  $z_{rec} = 1376$ . Para encontrar este valor, não utilizamos um modelo cosmológico específico, ou seja, em momento algum precisamos utilizar uma função do fator de escala ou parâmetro de Hubble. Resolvendo (5.28) para  $X = 0.9$  e  $X = 0.1$ , verificamos que o universo é 90% ionizado em  $z = 1474$ , e apenas 10% em  $z = 1258$ .

Calculamos o redshift de transição entre a fase dominada por radiação e a dominada por matéria para o modelo padrão e para  $\Lambda(t)$ , usando os valores do *best-fit* do Legacy nas expressões (2.39) e (2.81). O parâmetro de densidade relativa de radiação é estimado contando com a contribuição dos fótons da CMB e dos neutrinos remanescentes da época em que o universo era tão quente e denso que era opaco inclusive a

neutrinos. Seu valor é dado na literatura como  $\Omega_{r,o} = 8.4 \times 10^{-5}$ , se  $h = 0.7$ . Como  $\Omega_{r,o} \propto h^{-2}$ , podemos obter o valor deste parâmetro para um  $h$  qualquer através da relação

$$\Omega_{r,o} = \frac{8.4 \times 10^{-5} \times 0.7^2}{h^2} = \frac{4.116 \times 10^{-5}}{h^2}. \quad (5.31)$$

Os valores obtidos são, para o modelo padrão,  $z_{rm}^* = 3125$ , enquanto para o  $\Lambda(t)$ ,  $z_{rm} = 1248$ . No primeiro caso, a recombinação se dá já na fase de matéria, enquanto para o modelo que estudamos, ocorre próximo da transição, mas ainda na fase de radiação.

## 5.2.2 Desacoplamento

Quando o universo era totalmente ionizado, os fótons interagem com elétrons através de *espalhamento Thomson* [34],

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-, \quad (5.32)$$

sem alterar a frequência dos fótons – o que o difere do efeito Compton. A seção de choque para este espalhamento vale  $\sigma_e = 6.65 \times 10^{-29} m^2$ . O caminho livre médio do fóton é dado por

$$\lambda = \frac{1}{n_e \sigma_e}, \quad (5.33)$$

e, assim, obtemos a *taxa de espalhamento* como sendo

$$\Gamma = \frac{c}{\lambda} = n_e \sigma_e c. \quad (5.34)$$

Vimos na seção anterior que para o universo ser globalmente neutro,  $n_e = n_p$ , e, quando ele for totalmente ionizado,  $n_e = n_b = n_{b,o}(1+z)^3$ . Logo,

$$\Gamma(z) = n_{b,o} \sigma_e c (1+z)^3. \quad (5.35)$$

O fótons permanecem acoplados aos elétrons enquanto a taxa de espalhamento  $\Gamma$  for maior que a taxa de expansão  $H$ , ou seja, enquanto o livre caminho médio

do fóton é menor que a distância de Hubble  $c/H$ . Quando  $\Gamma$  se torna menor que  $H$ , os elétrons são diluídos pela expansão mais rapidamente, de tal forma que os fótons não conseguem mais interagir com eles. Ocorre então o desacoplamento, e o universo torna-se transparente, devido à liberdade de movimento dos fótons. Uma vez desacoplada, não há mais razão física para a matéria bariônica ter a mesma temperatura que os fótons da CMB.

Por causa da recombinação, a fração  $X$  é reduzida, e para quando só uma porção da matéria está ionizada, generalizamos a (5.35) para

$$\Gamma(z) = X(z)n_{b,o}\sigma_e c(1+z)^3. \quad (5.36)$$

Encontrar o redshift de desacoplamento do fóton seria simplesmente fazer  $\Gamma = H$ . Para o modelo padrão é obtido um  $z_{des}^* = 1130$ . Porém, a função  $X$  dada pela equação de Saha requer que a reação (5.19) esteja em equilíbrio. Como não é mais o caso, seria necessário um estudo de não-equilíbrio, o que resulta num valor um pouco mais abaixo, aproximadamente 1100.

### 5.2.3 Último espalhamento

Os fótons que observamos na CMB viajaram diretamente até nós desde o momento em que foram espalhados pela última vez por um elétron. Cada observador está circundado por uma superfície de último espalhamento. Do inglês, *last scattering*, utilizaremos  $ls$  como índice, referindo-se a este momento. Em um intervalo de tempo  $t \rightarrow t + dt$ , a probabilidade de um fóton sofrer espalhamento será  $dP = \Gamma(t)dt$ , sendo  $\Gamma$  a taxa de espalhamento. Quando detetamos um fóton da CMB no instante  $t_o$ , esperamos que o número de espalhamentos sofridos desde um instante  $t$  seja

$$\tau(t) = \int_t^{t_o} \Gamma(t')dt', \quad (5.37)$$

onde  $\tau$  é a *profundidade ótica*. Para que  $t$  seja o instante do último espalhamento, esperamos que  $\tau = 1$ . Mudando a variável de integração em (5.37), encontramos

$$\tau(a) = \int_a^1 \frac{\Gamma(a')}{H(a')} \frac{da'}{a'}, \quad (5.38)$$

ou ainda

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{\Gamma(z')}{H(z')} \frac{dz'}{1+z'}. \quad (5.39)$$

Como novamente  $\Gamma$  depende de  $X$ , e a reação (5.19) não está em equilíbrio, a equação de Saha não se aplica. Utilizamos no cálculo de  $z_{ls}$  fórmulas de ajuste (*fitting formulae*) encontradas na literatura [35, 36], que se aplicam ao modelo padrão:

$$z_{ls}^* = 1048 [1 + 0.00124(\Omega_{b,o}h^2)^{-0.738}] [1 + g_1(\Omega_{m,o}h^2)^{g_2}], \quad (5.40)$$

onde

$$g_1 = 0.0783(\Omega_{b,o}h^2)^{-0.238} [1 + 39.5(\Omega_{b,o}h^2)^{0.763}]^{-1}, \quad (5.41)$$

$$g_2 = 0.56 [1 + 21.1(\Omega_{b,o}h^2)^{1.81}]^{-1}. \quad (5.42)$$

Com  $h = 0.7$ , no modelo padrão é estimada uma densidade relativa de bárions de  $\Omega_{b,o} = 0.04$ . Como discutido anteriormente, no modelo  $\Lambda(t)$  supomos que o vácuo só decai em matéria escura, não alterando os valores associados a bárions no  $\Lambda$ CDM.

Para encontrar o  $z_{ls}$  no modelo que estudamos, analisamos qual deveria ser o valor de  $z$  na (5.39) com o parâmetro de Hubble do  $\Lambda(t)$  para obtermos o mesmo  $\tau(z)$  que é obtido com o do modelo padrão,  $H^*(z)$ , para diversos pares  $(\Omega_{m,o}, h)$ . Ou seja,

$$\int_0^{z_{ls}} \frac{\Gamma(z')}{H(z')} \frac{dz'}{1+z'} = \int_0^{z_{ls}^*} \frac{\Gamma(z')}{H^*(z')} \frac{dz'}{1+z'}, \quad (5.43)$$

onde  $z_{ls}^*$  é dado pela (5.40). O interessante é que, para pares diferentes de parâmetros, a razão entre o redshift obtido para o  $\Lambda$ CDM –  $z_{ls}^*$  – e o obtido para o  $\Lambda(t)$  permaneceu praticamente inalterada. Dessa forma, encontramos

$$z_{ls} = 0.986z_{ls}^*. \quad (5.44)$$

Com o *best-fit* do Legacy encontramos  $z_{ls}^* \approx 1095$  e  $z_{ls} \approx 1098$ , sendo a época do último espalhamento logo depois do desacoplamento.

Sabendo que os fótons da CMB carregam informações da época do último espalhamento, vejamos como os dados deles obtidos podem compor um teste de modelo cosmológico.

### 5.3 Flutuações de temperatura

Voltando à análise do espectro de temperaturas da radiação cósmica de fundo, discutimos que a distorção dipolar ocorre devido a efeitos locais de movimento. Extraindo estes efeitos, o espectro apresenta ainda pequenas flutuações de temperatura, o que indica que o universo não era perfeitamente homogêneo na época do último espalhamento. A abertura angular  $\delta\theta$  de uma flutuação na CMB está relacionada com um tamanho físico  $\ell$  na superfície de último espalhamento, relação dada pela distância diâmetro-angular (3.34).

Como as flutuações estão distribuídas numa superfície esférica, podemos escrevê-las como uma expansão em harmônicos esféricos

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (5.45)$$

onde  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  são as funções harmônicas esféricas. Duas direções no céu  $\hat{n}$  e  $\hat{n}'$ , separadas por um ângulo  $\theta$ , estão relacionadas por  $\cos\theta = \hat{n} \cdot \hat{n}'$ . É possível definir uma *função correlação*  $C(\theta)$  como

$$C(\theta) \equiv \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}) \frac{\delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle_{\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos\theta}. \quad (5.46)$$

Utilizando a expansão em harmônicos esféricos em (5.46), obtemos

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos\theta), \quad (5.47)$$

onde  $P_l$  são os polinômios de Legendre. Assim, a função correlação pode ser expandida em momentos de multipolos  $l$ , e, de maneira geral, um termo  $C_l$  é uma medida de flutuação de temperatura numa escala angular

$$\theta = \frac{\pi}{l}. \quad (5.48)$$

O termo de monopolo ( $l = 0$ ) vai a zero quando em larga escala a temperatura média é definida corretamente. O termo dipolar ( $l = 1$ ) é devido à distorção dipolar comentada anteriormente. Os momentos  $l \geq 2$  são os de maior interesse para a Cosmologia, por estarem relacionadas com as flutuações presentes no momento do último espalhamento.

Os dados observacionais da CMB são relacionados num gráfico flutuação de temperatura versus momento de multipolo  $l$ . Verificar se um modelo se ajusta bem a estes dados constitui o teste associado à CMB. A posição do primeiro pico neste gráfico é fortemente dependente da curvatura do espaço. A posição observada deste pico é consistente com  $k = 0$ , ou seja,  $\Omega_T = 1$ , o que justifica todo o presente trabalho ter sido elaborado para este caso. Uma análise mais cuidadosa da curva das flutuações de temperatura leva, para  $h = 0.7$ , à densidade relativa de bárions  $\Omega_{b,o} = 0.04$ , que é consistente com o valor obtido nos estudos de nucleossíntese primordial. Este resultado depende basicamente do modelo de universo na fase pré-recombinação. Como o modelo  $\Lambda(t)$  não difere do  $\Lambda$ CDM nessa etapa, temos mais uma justificativa para a utilização deste mesmo valor de  $\Omega_{b,o}h^2$  em nossa análise.

## 5.4 A posição do primeiro pico

Como o ajuste de um modelo aos dados de CMB é muito complexo, o teste feito com o  $\Lambda(t)$  no presente trabalho limitou-se a verificar a posição do primeiro pico,  $l_1$ , mas também de forma indireta. Com as informações mais recentes de CMB, obtidos com o WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) [37, 38], sabe-se que, no

modelo padrão, o primeiro pico está em  $l_1 = 220.8 \pm 0.7$  (para o nível de confiança de  $1\sigma$ ). Queremos encontrar os pares  $(\Omega_{m,o}, h)$  que resultam, para o  $\Lambda(t)$ , em valores de  $l_1$  dentro deste intervalo.

Antes do desacoplamento, fótons e bárions constituíam um único plasma, e, como discutiremos no próximo capítulo, oscilações neste fluido irão provocar o surgimento de ondas sonoras, com velocidade  $c_s$ , dependente da razão fótons-bárions.

Da mecânica dos fluidos, obtemos

$$\frac{c_s}{c} = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}. \quad (5.49)$$

Considerando que os bárions não contribuem para a pressão, teremos

$$p = \frac{1}{3}\rho_\gamma, \quad (5.50)$$

e, assim,

$$\delta p = \frac{1}{3}\delta\rho_\gamma. \quad (5.51)$$

A densidade total do plasma será

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_b, \quad (5.52)$$

obtendo-se

$$\delta\rho = \delta\rho_\gamma + \delta\rho_b. \quad (5.53)$$

Se os bárions se conservam separadamente, sua densidade cai com  $a^3$ , enquanto a de fótons evolui com  $a^{-4}$ , e então encontramos

$$\delta\rho_b = -3(1+z)\rho_b, \quad (5.54)$$

$$\delta\rho_\gamma = -4(1+z)\rho_\gamma. \quad (5.55)$$

Com estes resultados reescrevemos a (5.49) como

$$\frac{c_s}{c} = \left[ 3 + \frac{9\rho_b}{4\rho_\gamma} \right]^{-1/2}. \quad (5.56)$$

A razão entre as densidades de bárions e de fótons é facilmente obtida, pois já sabemos como elas evoluem com o redshift,

$$\frac{\rho_b}{\rho_\gamma} = \frac{\Omega_{b,o}(1+z)^3}{\Omega_{\gamma,o}(1+z)^4} \approx \frac{\Omega_{b,o}}{\Omega_{\gamma,o}} z^{-1}. \quad (5.57)$$

A máxima distância que uma onda acústica neste plasma pôde percorrer, desde a formação do plasma – que aproximaremos por  $t = 0$  – até o último espalhamento, define o *horizonte acústico*

$$r_s = a_{ls} \int_0^{t_{ls}} c_s \frac{dt}{a(t)}, \quad (5.58)$$

que pode ser escrito em termos do redshift e do parâmetro de Hubble,

$$r_s = \frac{1}{1+z_{ls}} \int_{z_{ls}}^{\infty} c_s \frac{dz}{H(z)}. \quad (5.59)$$

A abertura angular que subtende a distância  $r_s$  sobre a superfície de último espalhamento pode ser obtida a partir de (3.34),

$$\theta_A = \frac{r_s}{d_A}, \quad (5.60)$$

e, tomando a (3.41), encontramos

$$\theta_A = \left[ \int_{z_{ls}}^{\infty} \frac{c_s}{c} \frac{dz}{H(z)} \right] \left[ \int_0^{z_{ls}} \frac{dz}{H(z)} \right]^{-1}. \quad (5.61)$$

O cálculo de  $\theta_A$  tem que ser feito de forma cuidadosa. Como a primeira integral é de  $t = 0$  até o instante do último espalhamento, atravessa-se época dominada por radiação, seguida pela dominada por matéria. De (2.37) temos, no  $\Lambda$ CDM, quando  $z \gg 1$ ,

$$H^*(z) \approx H_o [\Omega_{m,o} z^3 + \Omega_{r,o} z^4]^{1/2}, \quad (5.62)$$

enquanto para  $\Lambda(t)$ , com (2.96), obtemos

$$H(z) \approx H_o [\Omega_{m,o}^2 z^3 + \Omega_{r,o} z^4]^{1/2}. \quad (5.63)$$

Na segunda integral, sendo feita já na época de matéria até o momento atual, basta utilizar (2.38) para o modelo padrão e (2.76) para o aqui estudado. A razão  $c_s/c$  é obtida através de (5.56) e (5.57), e não difere entre os dois modelos.

Calculada a abertura angular, define-se a *escala acústica* como

$$l_A \equiv \frac{\pi}{\theta_A}. \quad (5.64)$$

Segundo [39], a posição do primeiro pico é dada por

$$l_1 = l_A(1 - \delta_1), \quad (5.65)$$

onde  $\delta_1$  é uma correção determinada apenas pela física pré-recombinação. O seu valor aproximado para a cosmologia padrão – que tomaremos também para o  $\Lambda(t)$  – é

$$\delta_1 \approx 0.267 \left[ \frac{1}{3} \frac{\rho_r(z_{ls})}{\rho_m(z_{ls})} \right]^{0.1}. \quad (5.66)$$

Para altos redshifts, a radiação – fótons mais neutrinos – em ambos modelos evolui como

$$\rho_r = 3H_o^2 \Omega_{r,o} z^4. \quad (5.67)$$

Na fase de matéria do modelo padrão temos

$$\rho_m^* \approx \rho_T = 3H_o^2 \Omega_{m,o} z^3, \quad (5.68)$$

o que resulta em

$$\frac{\rho_r(z_{ls})}{\rho_m^*(z_{ls})} = \frac{\Omega_{r,o}}{\Omega_{m,o}^*} z_{ls}^*, \quad (5.69)$$

enquanto que, para o  $\Lambda(t)$ ,

$$\rho_m \approx \rho_T = 3H_o^2 \Omega_{m,o}^2 z^3, \quad (5.70)$$

e

$$\frac{\rho_r(z_{ls})}{\rho_m(z_{ls})} = \frac{\Omega_{r,o}}{\Omega_{m,o}^2} z_{ls}. \quad (5.71)$$

Foi possível então, através de uma rotina no *Maple*, encontrar os pares  $(\Omega_{m,o}, h)$  que satisfazem a condição de que  $l_1 = 220.8 \pm 0.7$ . Os valores de  $z_{ls}$  foram obtidos a partir de (5.40) ou de (5.44), a depender do modelo cosmológico.

O resultado desta análise encontra-se na Figura 5.1. Verificamos que, tomando  $h$  próximo de 0.7, encontramos  $\Omega_{m,o}$  menor no  $\Lambda$ CDM – em torno de 0.25 – enquanto no  $\Lambda(t)$  a curva passa por valores maiores de  $\Omega_{m,o}$ , próximo dos 0.36.

Posteriormente será apresentada a superposição e a combinação destes resultados com os resultados de supernovas. Antes disso, falemos sobre o terceiro teste que foi aplicado ao modelo.

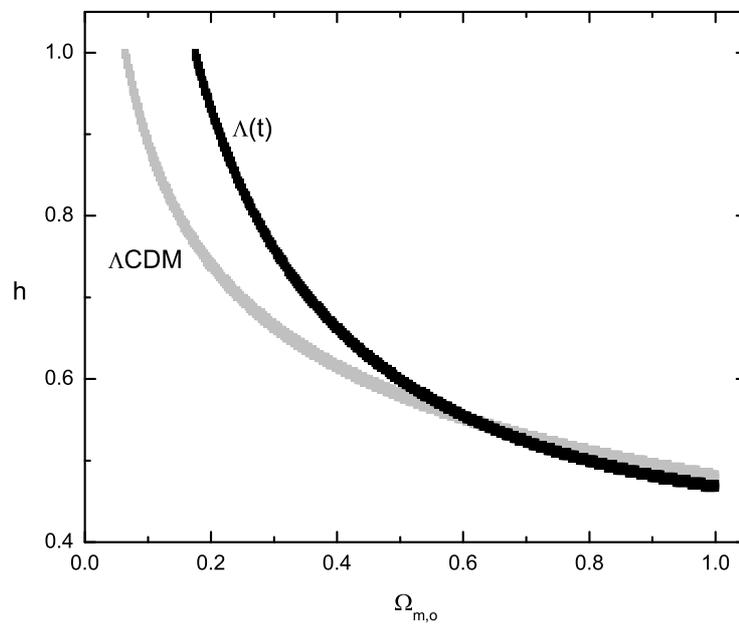


Figura 5.1: Pares de parâmetros que resultam na posição do primeiro pico.

## Capítulo 6

# Oscilações Acústicas Bariônicas

No capítulo anterior tratamos de anisotropias na CMB, mas não discutimos as origens dessas flutuações. As flutuações associadas a altos multipolos, ou seja, pequenas aberturas angulares, têm origem no fato do fluido fóton-bárion estar distribuído num cenário onde a matéria escura já está desacoplada e apresenta flutuações de densidade, que se refletem em flutuações no potencial gravitacional. À medida em que o fluido cai em um poço de potencial, sua pressão aumenta, o que irá provocar sua posterior expansão. Expandindo, a pressão cai e a gravidade volta a reger, comprimindo o fluido. Isto dá origem às oscilações acústicas no fluido.

No caso de poços de potencial em escalas maiores que a distância de Hubble na época do último espalhamento,  $c/H(z_{ls})$ , o fluido não teve tempo suficiente para oscilar. Assim, caso ele estivesse “subindo” um poço de potencial no instante do último espalhamento, ele estaria perdendo energia, apresentando redshift. Se estivesse “caindo” em um poço, aparece como pontos mais quentes na distribuição de temperaturas da CMB. As anisotropias da temperatura em larga escala nos dá um mapa das flutuações de potencial presentes no instante do último espalhamento. A criação de flutuação de temperatura devido a perturbações no potencial gravitacional é conhecido como *efeito Sachs-Wolfe*.

Voltando a escalas menores, os picos acústicos ocorrem porque perturbações cos-

mológicas excitam ondas sonoras no plasma fóton-bárion. Na época da recombinação, a velocidade do som cai abruptamente, cessando a propagação das ondas. Desde a formação das perturbações até a recombinação, modos de vibração em diferentes comprimentos de onda completam diferentes números de oscilações, o que gera séries harmônicas de máximos e mínimos no espectro de anisotropias de temperatura da CMB. Estas séries podem ser expressas em uma função correlação, assim como fizemos na CMB, mas agora referente a flutuações de densidade.

O primeiro e maior pico do espectro caracteriza justamente a divisão entre as duas origens das flutuações. Representa um poço de potencial no qual o fluido fóton-bárion alcançou máxima compressão no instante do último espalhamento.

Se a oscilação ocorria por causa da pressão do fluido, com a liberação dos fótons no desacoplamento a dinâmica dos bárions vai ser governada por sua própria gravidade, pelo potencial gravitacional da matéria escura e pela expansão do universo. Se verificamos, pela observação da CMB, que seus fótons apresentam anisotropias de temperatura, era porque o fluido do qual eles faziam parte apresentava flutuações de densidade. Com o desacoplamento, o fluido deixa de existir, deixando uma marca (*imprint*) na distribuição de densidade dos bárions.

A evolução de perturbações na distribuição de bárions leva à formação de grandes estruturas como galáxias e aglomerados de galáxias observados no universo corrente. Esperamos assim verificar, ao analisar a distribuição de massa de bárions no universo atual, alguma correlação com a distribuição de temperaturas na CMB, ou seja, encontrar as assinaturas acústicas na distribuição bariônica. Como essas assinaturas são fracas e em larga escala, algumas pesquisas não puderam detetá-las claramente. O êxito foi da *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) [40], com uma amostra de 46748 galáxias, com redshifts entre 0.16 e 0.47, varrendo 3816 estereorradianos no céu. Com estes dados é construída uma função correlação, com base na análise de flutuações de densidade em torno da densidade média. Assim como na CMB, faremos uma análise indireta deste fenômeno.

Através da função correlação determina-se a distância à oscilação acústica, a qual é definida pela média geométrica

$$D_V(z) = \left[ D_M(z)^2 \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (6.1)$$

onde

$$D_M(z) = (1+z)d_A \quad (6.2)$$

é a distância diâmetro-angular co-móvel, e o outro fator está relacionado com a distância radial [40]. Esta definição leva em conta o *efeito Alcock-Paczynski* [41], segundo o qual a dilatação do fator de escala na linha de visão não é equivalente a uma dilatação transversal. O SDSS indica um máximo na oscilação para  $z \approx 0.35$ , e é obtido, no modelo padrão,  $D_V(0.35) = 1370 \pm 64$  Mpc, no nível de confiança  $1\sigma$ .

Utilizando a (3.41) reescrevemos (6.1) para  $z = 0.35$  como

$$D_V(0.35) = \frac{c}{H_o} \frac{(0.35)^{1/3}}{[E(0.35)^{1/3}]} \left[ \int_0^{0.35} \frac{dz'}{E(z')} \right]^{2/3}, \quad (6.3)$$

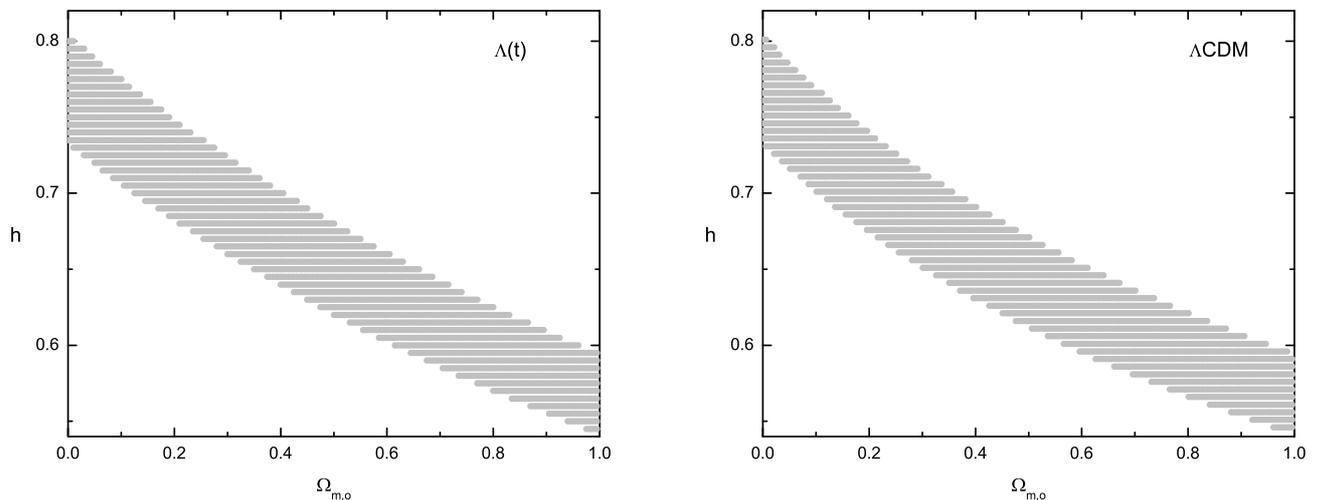


Figura 6.1: Resultados obtidos com  $D_V(0.35) = 1370 \pm 64$  Mpc.

onde  $E(z) = H(z)/H_o$  e  $c = 3 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$ . Através de uma rotina *Fortran*, encontramos quais pares  $(\Omega_{m,o}, h)$  são compatíveis com o intervalo acima para  $D_V(0.35)$ , tanto para o modelo padrão como para o  $\Lambda(t)$ .

Como pode ser verificado na Figura 6.1, o teste aplicado não é muito restritivo, apresentando-se como uma larga faixa no diagrama  $h - \Omega_{m,o}$ . A diferença entre os modelos é sutil, mostrando que o parâmetro  $D_V(0.35)$  não é muito sensível à mudança de modelo.

Este teste, assim como os anteriores, não tem muito significado quando analisado isoladamente. Resultados interessantes são obtidos quando analisamos conjuntamente dados de diferentes tipos de observações, e verificamos se há concordância ou não entre eles. É o que veremos no próximo capítulo.

## Capítulo 7

### Análise Combinada

Ao longo do trabalho, obtivemos curvas no diagrama  $h - \Omega_{m,o}$  para testes envolvendo amostras de supernovas, a posição do primeiro pico da CMB, assim como o valor de  $D_V$  associado às oscilações acústicas bariônicas (BAO). É natural agora analisar a superposição destes resultados. As superposições das curvas de cada amostra de supernovas com BAO e CMB estão nas Figuras 7.1 a 7.4.

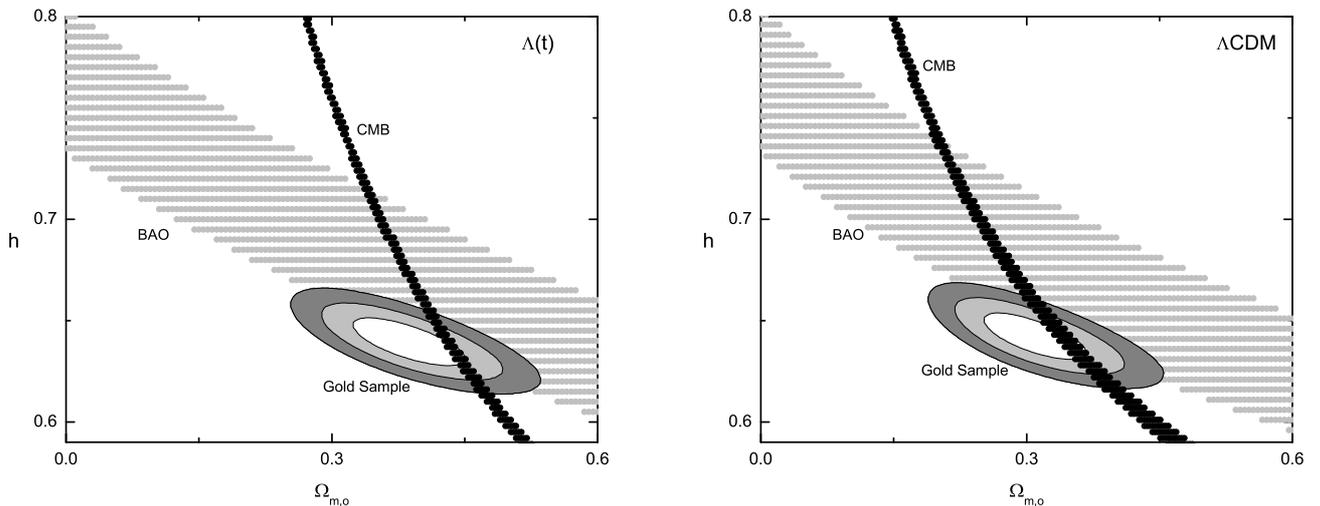


Figura 7.1: Superposição dos resultados com Gold Sample, BAO e CMB.

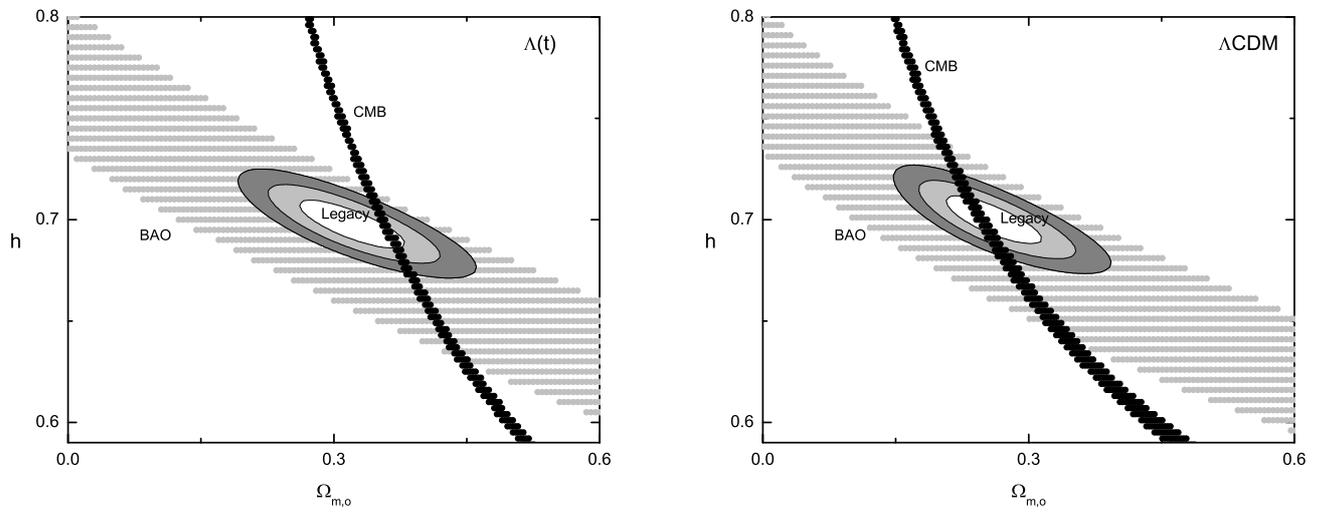


Figura 7.2: Superposição dos resultados com Legacy, BAO e CMB.

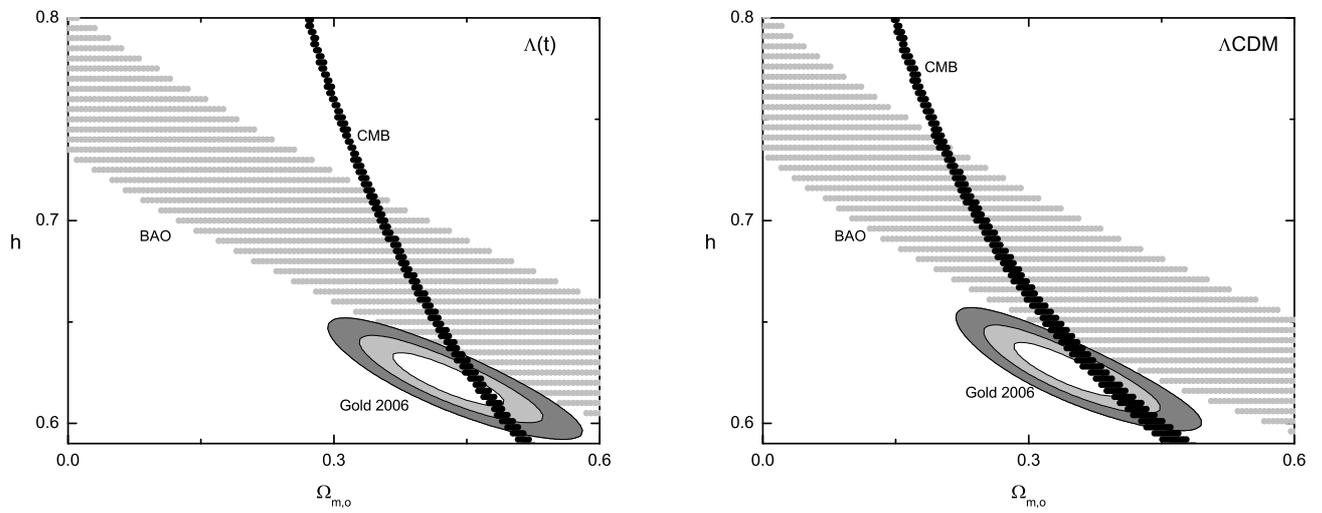


Figura 7.3: Superposição dos resultados com Gold 2006, BAO e CMB.

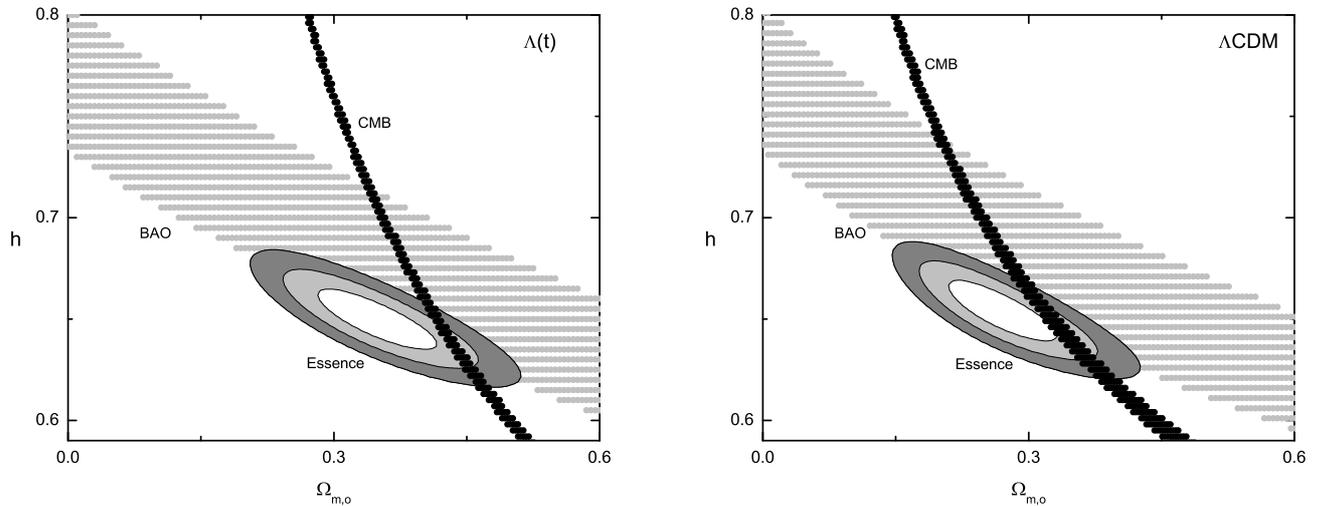


Figura 7.4: Superposição dos resultados com Essence, BAO e CMB.

Na construção dos gráficos houve o cuidado de manter sempre a mesma escala, de forma a facilitar a comparação visual. Em ambos modelos podemos verificar que a amostra de supernovas que resulta numa melhor concordância com BAO é o Legacy. Somente neste caso temos toda a região até  $3\sigma$  imersa na faixa de confiança do BAO. Já o Gold 2006 é o que se apresenta mais fora desta faixa.

Concluimos no capítulo anterior que o teste que realizamos com BAO não é muito restritivo, mas o mesmo não podemos dizer dos resultados com CMB. A diferença entre as espessuras das faixas de BAO e CMB ilustram claramente que esta última restringe bastante a concordância.

Analisando novamente os gráficos anteriores, percebemos que para o  $\Lambda$ CDM há uma concordância entre resultados de supernovas e CMB passando pela região de  $1\sigma$  nas quatro amostras de supernovas estudadas. Já para o  $\Lambda(t)$ , esta concordância só não ocorre com o Essence, passando a curva da CMB na região de  $2\sigma$ . Este fato não é alarmante pois vimos anteriormente que os testes com o Essence apresetaram o pior  $\chi_r^2$ , o que questiona a credibilidade deste ajuste.

A análise de superposições constitui uma comparação qualitativa. Para obter um ajuste que seja a combinação de dois ou mais ajustes, é necessário usar as diferentes observações para calcular um único  $\chi^2$ . Isto é o que será feito nas próximas seções. Apresentaremos aqui apenas as combinações com o Legacy, por ser usualmente considerado a melhor amostra, e o único a apresentar superposição completa com BAO. As combinações com as demais amostras estão registradas no Apêndice B.

## 7.1 Legacy + BAO

Para realizar a análise combinada é necessário inserir no cálculo do  $\chi^2$  de supernovas, equação (4.2), a contribuição do desvio de  $D_V(0.35)$  para  $1\sigma$ , 64 Mpc. Assim, o  $\chi^2$  pode ser reescrito como

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[\mu_{teo;i}(z|H_o, \Omega_{m,o}) - \mu_{obs;i}]^2}{\sigma_i^2 + \sigma_{sist}^2} + \frac{[D_V(0.35|H_o, \Omega_{m,o}) - 1370]^2}{64^2}, \quad (7.1)$$

onde  $D_V$  é calculado através da equação (6.3), na qual  $H(z)$  depende do modelo e dos valores dos parâmetros  $\Omega_{m,o}$  e  $h$ . Feito este ajuste para ambos modelos, obtivemos os resultados apresentados nas Tabelas 7.1 e 7.2, bem como na Figura 7.5.

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.323	0.698	1.001
$\Lambda\text{CDM}$	0.263	0.700	0.997

Tabela 7.1: Valores dos parâmetros obtidos com a combinação Legacy+BAO.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$
$1\sigma$	[0.300;0.347]	[0.240;0.284]	[0.693;0.703]	[0.696;0.705]
$2\sigma$	[0.277;0.371]	[0.219;0.306]	[0.688;0.707]	[0.691;0.710]
$3\sigma$	[0.254;0.396]	[0.199;0.329]	[0.684;0.712]	[0.686;0.714]

Tabela 7.2: Intervalos nos três níveis de confiança com Legacy+BAO.

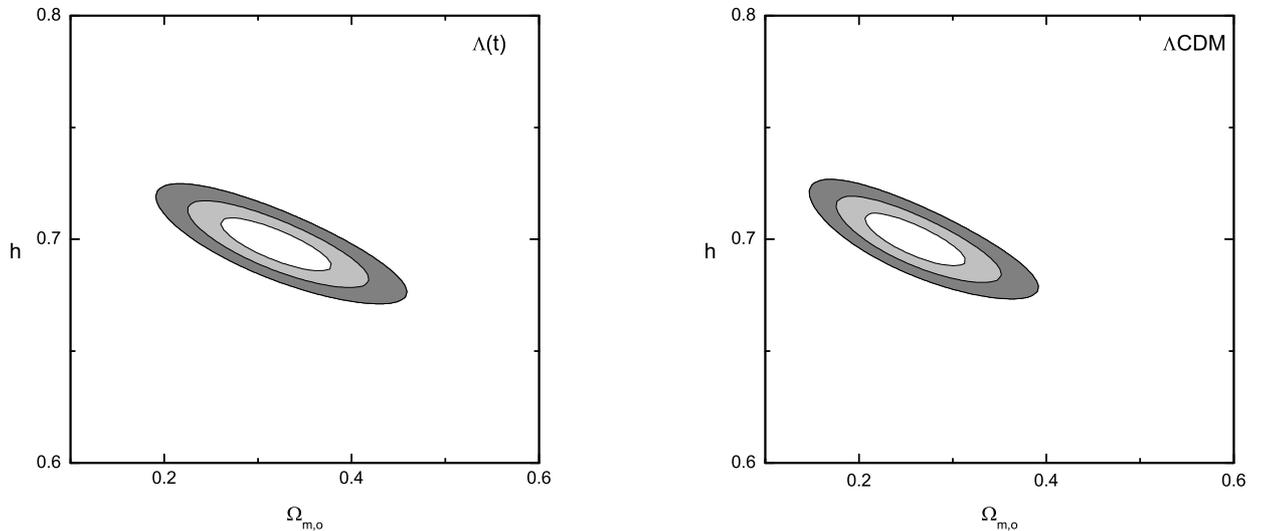


Figura 7.5: Resultado da combinação Legacy+BAO.

Comparando com os resultados obtidos na seção 4.3 para o Legacy, verificamos que de fato a inclusão de BAO no ajuste não altera significativamente o resultado. Apenas melhora um pouco o  $\chi_r^2$  de ambos modelos. Vejamos o que acontece quando acrescentamos CMB nesta análise.

## 7.2 Legacy + BAO + CMB

Combinar os dados anteriores com os de CMB seria simplesmente acrescentar, no cálculo do  $\chi^2$  em (7.1), um termo relacionado com o valor obtido da posição do primeiro pico  $l_1$ ,

$$(7.1) + \frac{[l_{1;teo} - 220.8]^2}{0.7^2}, \quad (7.2)$$

onde  $l_1$  é calculado conforme a seção 5.4. Houve uma dificuldade técnica no cálculo de  $\theta_A$  (ver (5.61)), por envolver integrais em intervalos muito grandes e integrais infinitas,

não resolvidas pela rotina de integração *Fortran* que utilizamos, a qual apresentava resultados muito divergentes. A saída foi encontrar os valores de  $l_1$  tanto para o  $\Lambda$ CDM como para  $\Lambda(t)$ , para todos os pares  $(\Omega_{m,o}, h)$ , variando esses parâmetros num passo de 0.0025 no *Maple*. Foi então inserido um comando na rotina *Fortran* para importar essa tabela de valores. Para um par de parâmetros específico é calculado (7.1), e o respectivo valor de  $l_1$  é puxado da tabela de forma a calcular o  $\chi^2$  total.

Os resultados dos ajustes estão nas Tabelas 7.3 e 7.4, bem como na Figura 7.6. Nossa intuição de que o ajuste com CMB seria mais restritivo se confirma. Comparando os intervalos da Tabela 7.4 com os da Tabela 4.5, verificamos que os encontrados agora são menores. O modelo padrão é deslocado para menores valores de  $\Omega_{m,o}$ , enquanto o  $\Lambda(t)$ , para maiores [2, 42].

Com os valores de *best-fit* deste ajuste, e para o intervalo de  $2\sigma$ , o modelo testado apresenta fator de desaceleração  $q_o = -0.46_{-0.01}^{+0.02}$ , e parâmetro de idade  $H_o t_o = 1.06 \pm 0.01$ , o que associa ao universo uma idade atual de 14.96 Gyr. No modelo padrão, temos  $q_o = -0.63 \pm 0.02$ ,  $H_o t_o = 1.02 \pm 0.01$ , e uma idade corrente de 14.19 Gyr.

Para o  $\Lambda$ CDM, esta combinação melhorou a idade que era obtida em outros ajustes. Estatisticamente, ambos modelos se ajustam igualmente bem aos dados,

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.363	0.693	1.012
$\Lambda$ CDM	0.245	0.703	0.999

Tabela 7.3: Valores dos parâmetros obtidos com a combinação Legacy+BAO+CMB.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM
$1\sigma$	[0.358;0.368]	[0.238;0.251]	[0.689;0.696]	[0.699;0.706]
$2\sigma$	[0.354;0.372]	[0.232;0.258]	[0.686;0.699]	[0.695;0.709]
$3\sigma$	[0.350;0.377]	[0.226;0.265]	[0.683;0.702]	[0.692;0.713]

Tabela 7.4: Intervalos nos três níveis de confiança com Legacy+BAO+CMB.

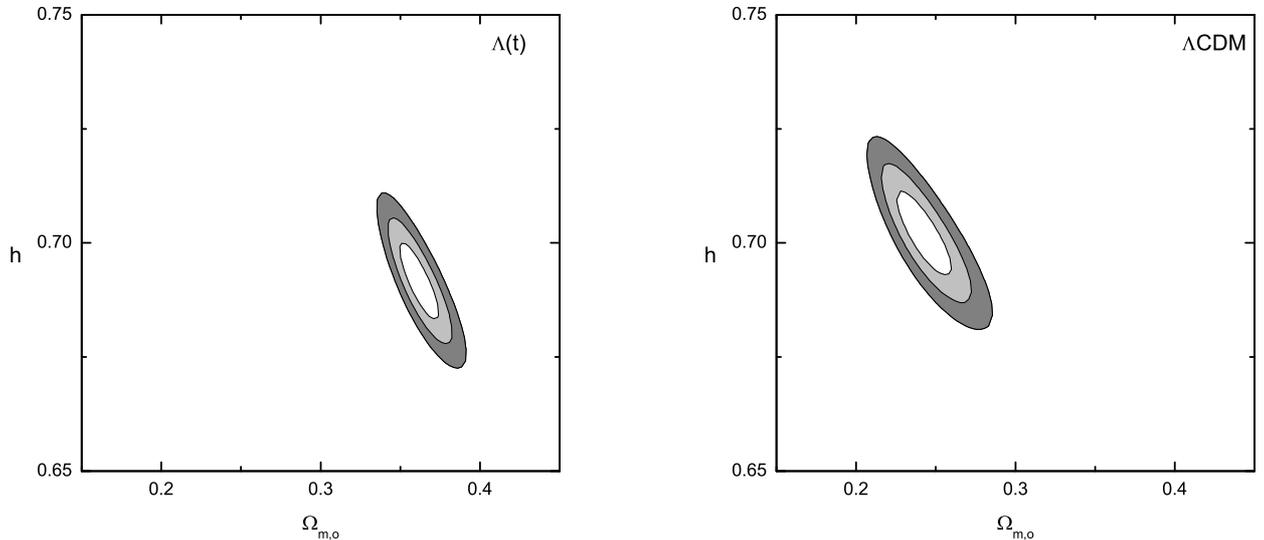


Figura 7.6: Resultado da combinação Legacy+BAO+CMB.

visto que as distâncias do  $\chi_r^2$  de 1 em cada modelo são muito próximas. Os diagramas  $h - \Omega_{m,0}$  da Figura 7.6 mostram a diferença entre os ajustes dos dois modelos.

As diferenças ficam mais nítidas quando superpomos os ajustes do Legacy com as combinações feitas (Figura 7.7). De fato, CMB restringe bastante as regiões de confiança. Se os testes de supernovas Ia e BAO já levavam  $\Lambda(t)$  para maiores valores de densidade, CMB deixa esta diferença mais acentuada.

Muitos fatores podem ter contribuído para que a curva de CMB para o  $\Lambda(t)$  tenha levado a densidades tão altas. Por exemplo, as equações utilizadas para calcular  $oz_{ls}$  não são próprias de um modelo com produção de matéria, e a correção, representado por  $\delta_1$  (ver (5.66)), no cálculo da posição do primeiro pico também não é uma expressão específica para o modelo com o qual trabalhamos.

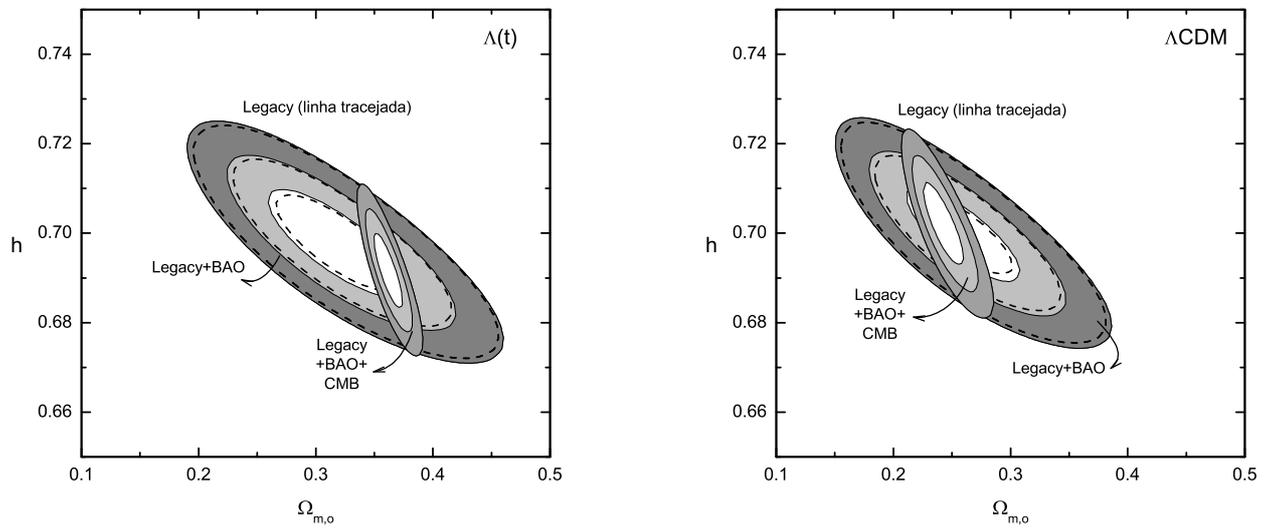


Figura 7.7: Superposição dos ajustes combinados com o Legacy.

## Capítulo 8

### Conclusão

O modelo com densidade de vácuo proporcional ao parâmetro de Hubble é muito rico enquanto modelo teórico, sendo uma proposta para resolver o problema da diferença entre a densidade de energia escura observada hoje e o alto valor previsto pela teoria quântica de campos. Este modelo apresenta as mesmas etapas do modelo padrão, tendo uma fase dominada por radiação, seguida da dominada por matéria – longa o suficiente para que haja formação das grandes estruturas – e, logo após, aquela onde o termo de energia escura rege a expansão.

A transição da época dominada por radiação para a regida pela matéria,  $t_{rm}$ , se dá para redshifts mais altos no  $\Lambda$ CDM, o que garante que as três etapas discutidas – recombinação, desacoplamento e último espalhamento – se dão na fase de matéria. No  $\Lambda(t)$ , a recombinação ocorre um pouco antes da transição, enquanto o desacoplamento e o último espalhamento acontecem depois do  $t_{rm}$ .

Observacionalmente, não houve qualquer resultado que descartasse o modelo estudado. Os testes com amostras de supernovas apresentaram ajustes tão bons quanto o modelo padrão. Os dados do SNLS apresentaram-se como os menos dispersos e com menores barras de erros. Ambos modelos foram melhor ajustados por este conjunto de supernovas. Felizmente, os valores de *best-fit* dados por este ajuste estão coerentes com observações de dinâmicas de galáxias e de lentes gravitacionais, e também, como

vimos, com os testes com CMB e BAO. Os dados de supernovas são a primeira evidência de que o universo está atualmente em expansão acelerada, o que requer uma componente de pressão negativa que seja responsável por esta expansão.

As observações da radiação cósmica de fundo em microondas marcam definitivamente a entrada da Cosmologia na categoria de ciência de precisão, por envolver medidas de flutuações de temperatura da ordem de  $10^{-5}$ . A alta sensibilidade da posição do primeiro pico da CMB com a curvatura sugere que o universo é muito próximo de ser espacialmente plano. De maneira fascinante, previsões da existência desta radiação e especulações de que anisotropias em seu espectro estão interligadas com a distribuição de matéria que observamos hoje são verificadas pelas observações.

Das análises indiretas de BAO e CMB foi possível obter valores interessantes para o parâmetro de densidade. O teste com BAO não foi restritivo, pelo contrário, ele ampliou mais ainda as regiões de confiança. O valor de  $l_1$  da CMB, por sua vez, restringiu bastante as curvas, mostrando como o modelo  $\Lambda(t)$  é deslocado para densidades mais altas. Ainda assim, os valores de concordância resultaram em uma idade coerente do universo, mais antigo que as estruturas mais velhas observadas.

A densidade de matéria mais alta pode ser devido à produção de matéria. É preciso verificar a implicação deste fator na formação de grandes estruturas, trabalho que já está em andamento. Mas o que elevou mais o valor de  $\Omega_{m,0}$  no modelo estudado foi o teste de CMB. Para ter um resultado seguro da análise da CMB, temos que refazer todo o estudo da mesma, construindo a função correlação para as anisotropias de temperatura, verificando onde a produção de matéria poderia alterar as expressões do  $l_1$ . Na verdade, fazendo um estudo mais profundo, ajustando o modelo aos dados de flutuações de temperatura *versus* momentos de multipolo, teremos uma riqueza muito maior de informações, incluindo a estimativa precisa da densidade de bárions que, neste trabalho, consideramos ser igual à do modelo padrão.

O mesmo pode ser dito em relação a BAO. Uma análise refinada requer a construção da função correlação das flutuações de densidade obtidas da análise de distribuição

de massa de galáxias, além de um estudo do crescimento de perturbações que leve das pequenas flutuações da CMB à escala de grandes estruturas.

De maneira geral, os testes observacionais aplicados ao modelo  $\Lambda(t)$  serviram como aprofundamento das questões da Cosmologia Moderna, com muitas perguntas atuais e ainda sem resposta. O modelo estudado não pode ser de forma alguma descartado. Os valores mais altos obtidos para o parâmetro de densidade servem como um estímulo para se fazer uma análise completa das anisotropias da CMB neste modelo.

## Apêndice A

### Exemplos de Algoritmos Utilizados

Figura A.1: Algoritmo do teste com Legacy.

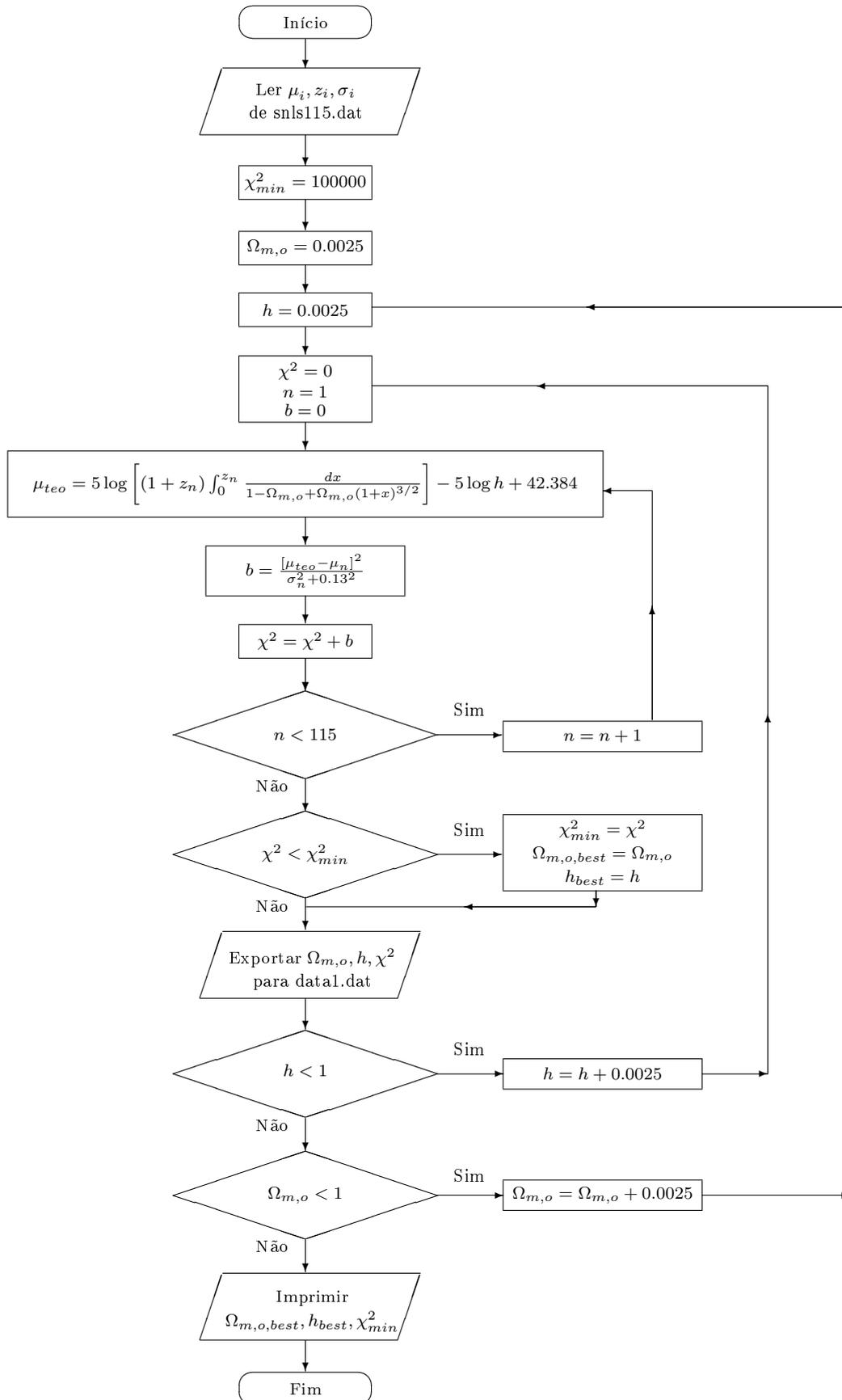


Figura A.2: Algoritmo do teste com BAO.

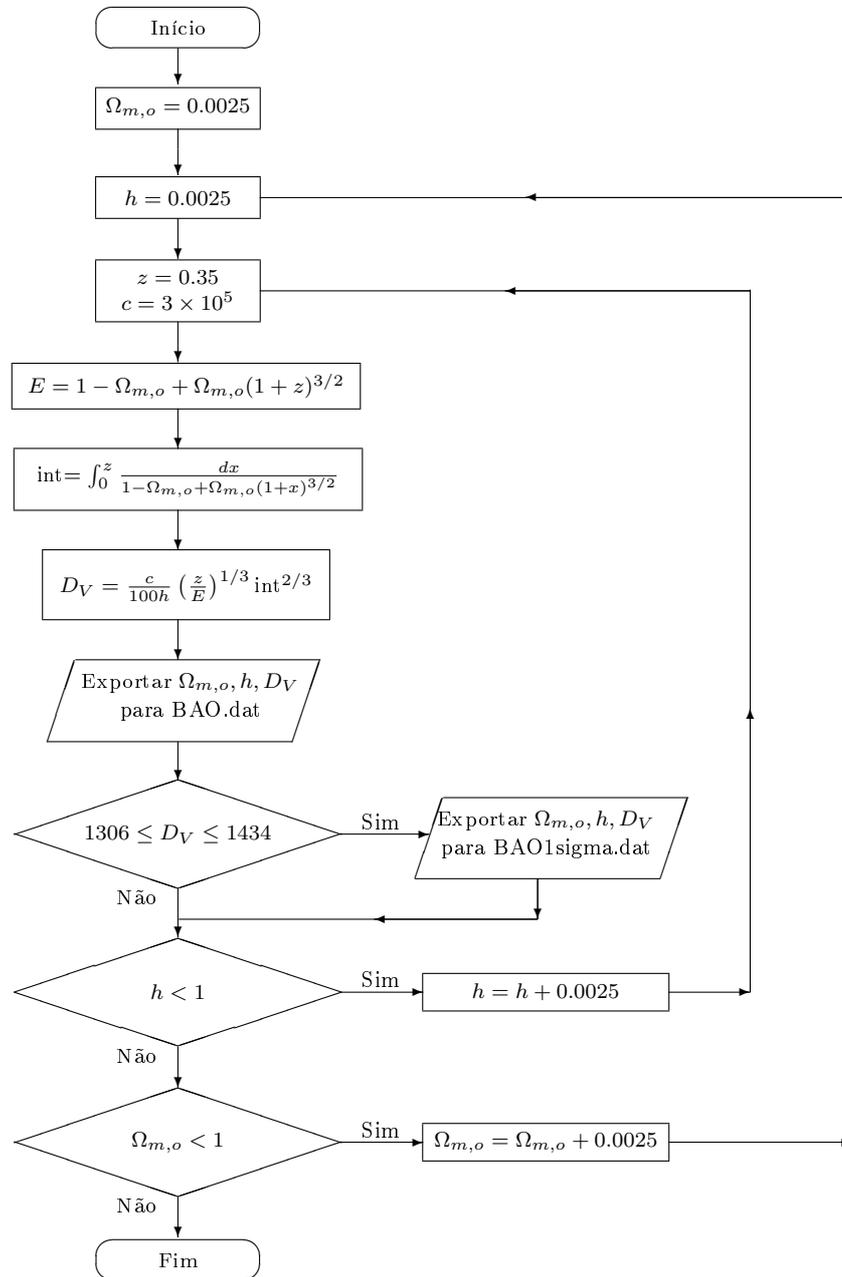
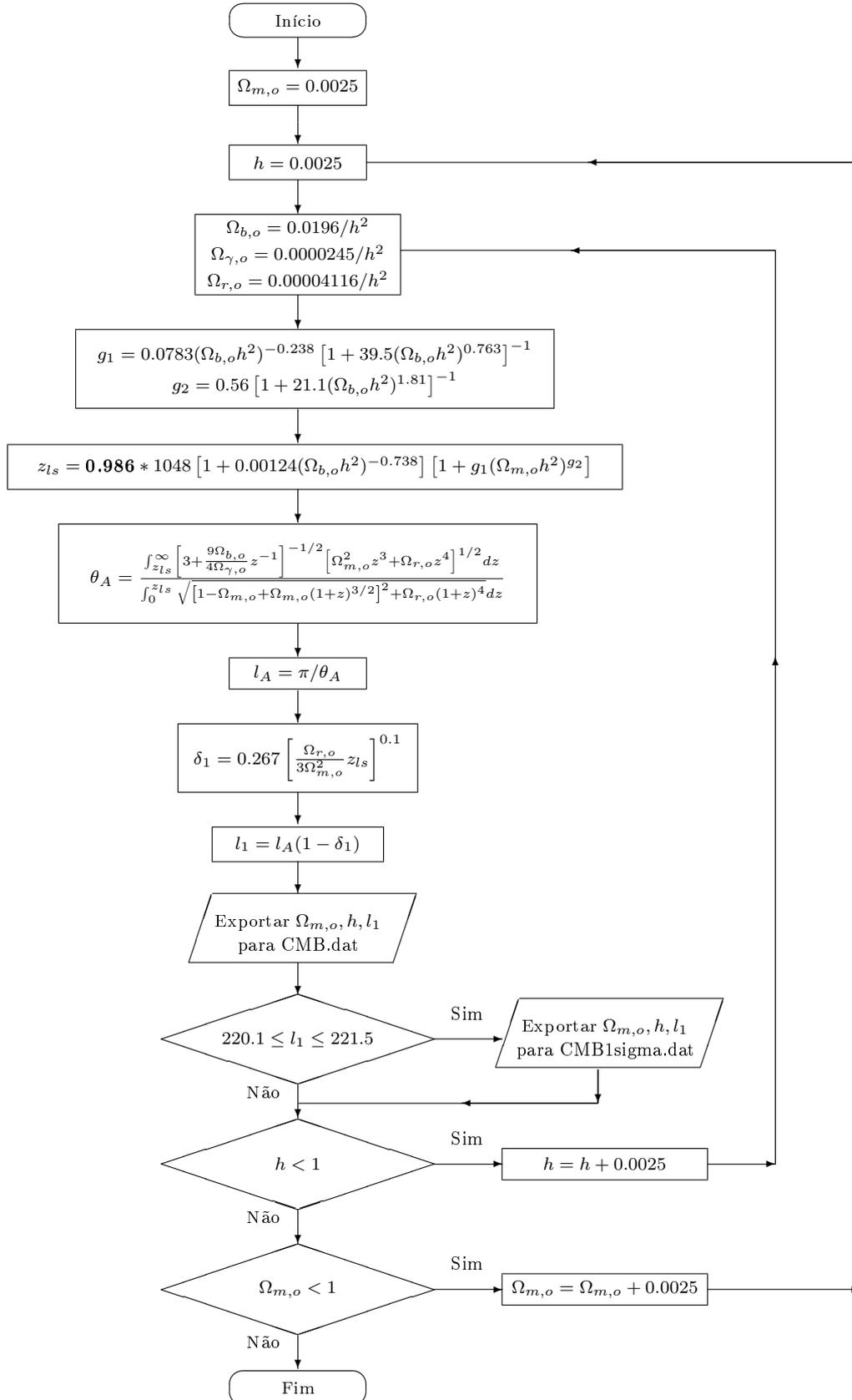


Figura A.3: Algoritmo do teste com a CMB.



## Apêndice B

# Análise Combinada para Todas as Amostras de Supernovas

### B.1 Combinações com o Gold Sample

#### B.1.1 Gold Sample + BAO

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.395	0.640	1.157
$\Lambda\text{CDM}$	0.318	0.643	1.144

Tabela B.1: Valores dos parâmetros obtidos na combinação BAO+Gold Sample.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$
$1\sigma$	[0.367;0.423]	[0.291;0.345]	[0.635;0.645]	[0.637;0.648]
$2\sigma$	[0.339;0.452]	[0.266;0.373]	[0.630;0.651]	[0.632;0.654]
$3\sigma$	[0.312;0.482]	[0.242;0.403]	[0.624;0.656]	[0.628;0.659]

Tabela B.2: Intervalos dos parâmetros ajustados com BAO+Gold Sample.

### B.1.2 Gold Sample + BAO + CMB

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.438	0.635	1.165
$\Lambda$ CDM	0.343	0.640	1.148

Tabela B.3: Valores dos parâmetros obtidos com CMB+BAO+Gold Sample.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM
$1\sigma$	[0.431;0.443]	[0.334;0.353]	[0.632;0.638]	[0.637;0.644]
$2\sigma$	[0.426;0.450]	[0.325;0.363]	[0.629;0.642]	[0.633;0.648]
$3\sigma$	[0.420;0.456]	[0.317;0.374]	[0.626;0.645]	[0.630;0.652]

Tabela B.4: Intervalos dos parâmetros ajustados com CMB+BAO+Gold Sample.

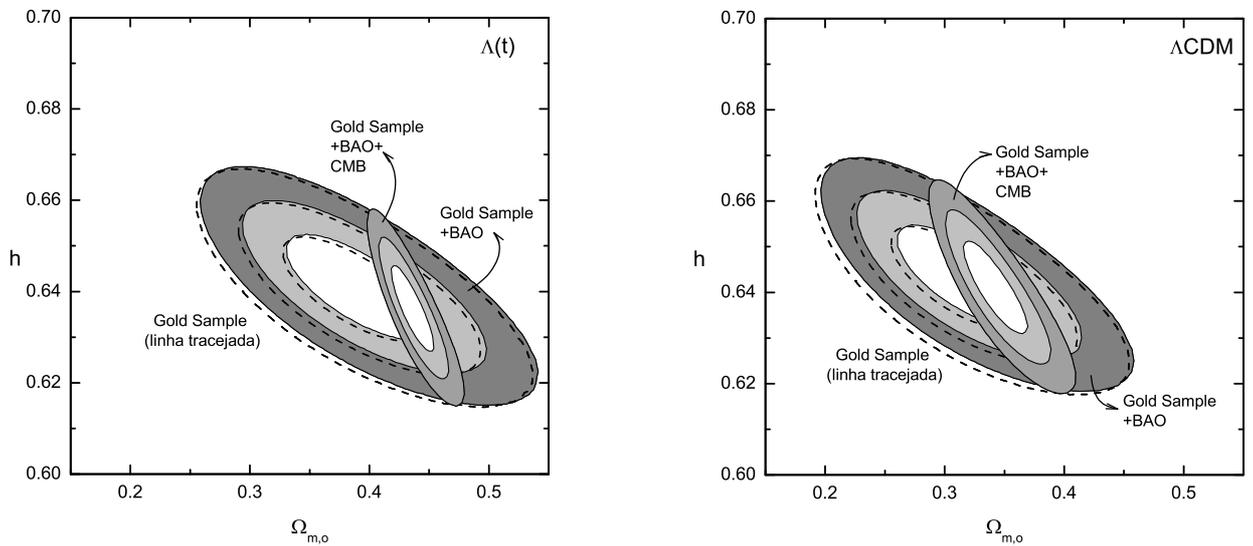


Figura B.1: Superposição dos ajustes combinados com o Gold Sample.

## B.2 Combinações com o Gold 2006

### B.2.1 Gold 2006 + BAO

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.433	0.623	0.901
$\Lambda$ CDM	0.348	0.628	0.889

Tabela B.5: Valores dos parâmetros obtidos na combinação BAO+Gold 2006.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM
$1\sigma$	[0.412;0.455]	[0.326;0.368]	[0.618;0.627]	[0.623;0.632]
$2\sigma$	[0.391;0.477]	[0.307;0.389]	[0.614;0.632]	[0.618;0.637]
$3\sigma$	[0.371;0.499]	[0.288;0.411]	[0.609;0.636]	[0.614;0.641]

Tabela B.6: Intervalos dos parâmetros ajustados com BAO+Gold 2006.

### B.2.2 Gold 2006 + BAO + CMB

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.465	0.618	0.905
$\Lambda$ CDM	0.380	0.623	0.894

Tabela B.7: Valores dos parâmetros obtidos com CMB+BAO+Gold 2006.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM	$\Lambda(t)$	$\Lambda$ CDM
$1\sigma$	[0.459;0.472]	[0.370;0.390]	[0.614;0.621]	[0.619;0.626]
$2\sigma$	[0.453;0.479]	[0.360;0.401]	[0.612;0.624]	[0.616;0.629]
$3\sigma$	[0.447;0.486]	[0.352;0.412]	[0.609;0.627]	[0.613;0.633]

Tabela B.8: Intervalos dos parâmetros ajustados com CMB+BAO+Gold 2006.

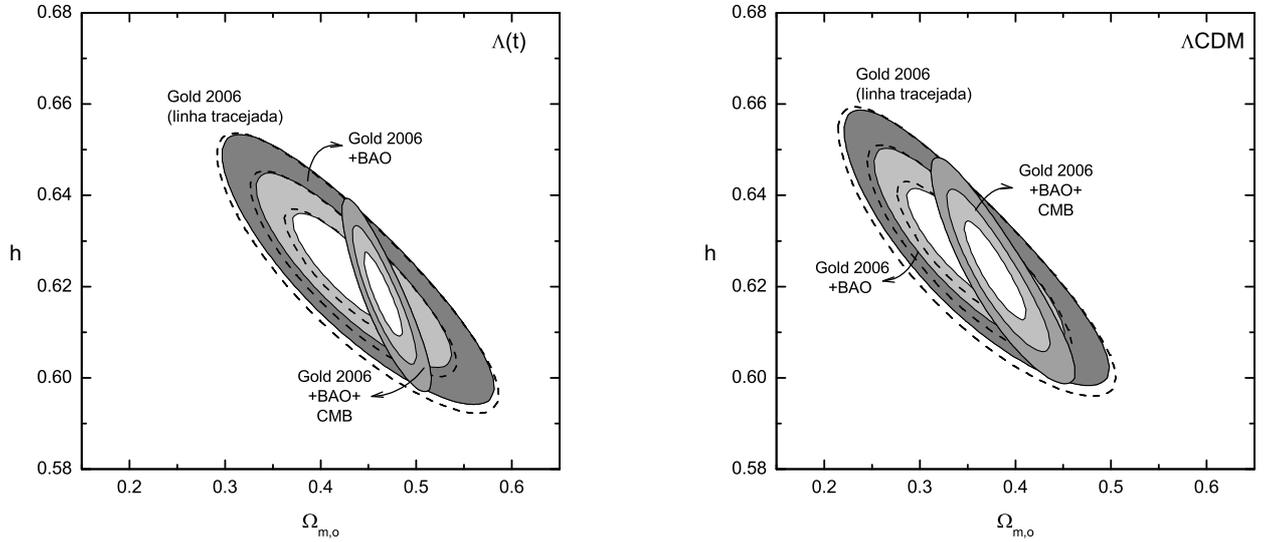


Figura B.2: Superposição dos ajustes combinados com o Gold 2006.

## B.3 Combinações com o Essence

### B.3.1 Essence + BAO

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.345	0.653	0.667
$\Lambda\text{CDM}$	0.275	0.655	0.661

Tabela B.9: Valores dos parâmetros obtidos na combinação BAO+Essence.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$
$1\sigma$	[0.321;0.372]	[0.251;0.298]	[0.646;0.658]	[0.649;0.661]
$2\sigma$	[0.296;0.398]	[0.228;0.322]	[0.641;0.664]	[0.643;0.666]
$3\sigma$	[0.272;0.424]	[0.207;0.348]	[0.635;0.669]	[0.638;0.672]

Tabela B.10: Intervalos dos parâmetros ajustados com BAO+Essence.

### B.3.2 Essence + BAO + CMB

	$\Omega_{m,o}$	h	$\chi_r^2$
$\Lambda(t)$	0.430	0.640	0.684
$\Lambda\text{CDM}$	0.328	0.648	0.672

Tabela B.11: Valores dos parâmetros obtidos com CMB+BAO+Essence.

Nível	$\Omega_{m,o}$		h	
	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$	$\Lambda(t)$	$\Lambda\text{CDM}$
$1\sigma$	[0.423;0.435]	[0.318;0.336]	[0.636;0.643]	[0.643;0.651]
$2\sigma$	[0.418;0.441]	[0.310;0.345]	[0.633;0.646]	[0.640;0.655]
$3\sigma$	[0.412;0.447]	[0.302;0.355]	[0.629;0.649]	[0.636;0.659]

Tabela B.12: Intervalos dos parâmetros ajustados com CMB+BAO+Essence.

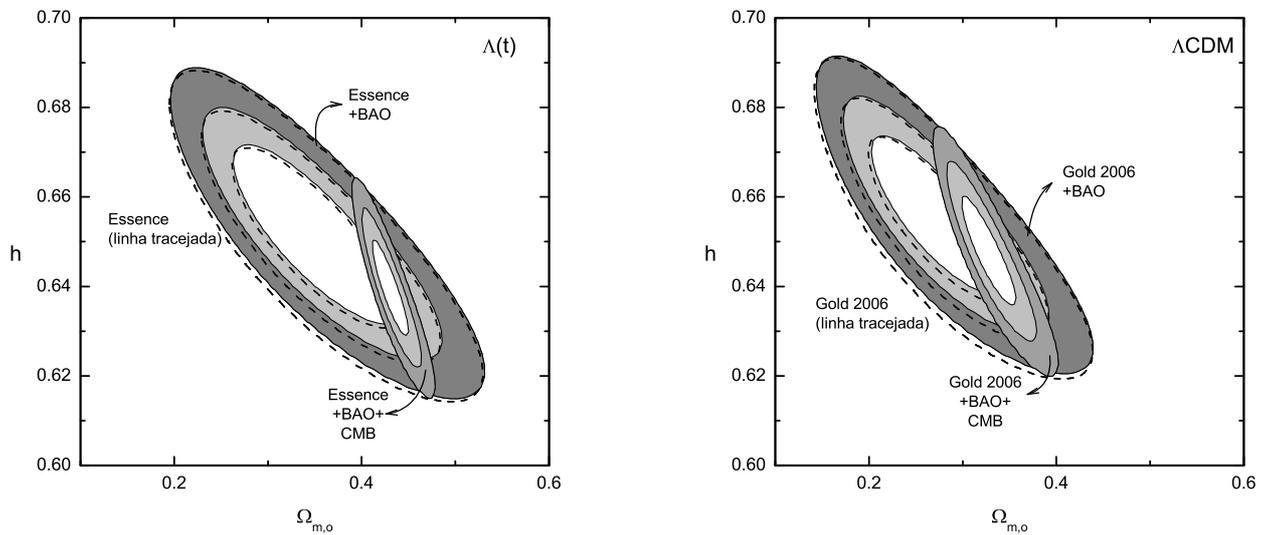


Figura B.3: Superposição dos ajustes combinados com o Essence.

# Bibliografia

- [1] S. Carneiro, C. Pigozzo, H. A. Borges and J. S. Alcaniz, *Phys. Rev. D* **74**, 23532 (2006).
- [2] S. Carneiro, M. A. Dantas, C. Pigozzo, J. S. Alcaniz, arXiv:0711.2686v1 [astro-ph].
- [3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972).
- [4] B. Ryden, *Introduction to Cosmology* (2003).
- [5] S. Dodelson, *Modern Cosmology* (2003).
- [6] P. J. E. Peebles, *The Large-scale Structure of the Universe* (1980).
- [7] V. Rubin et al., *Astrophys. J.* **159** 379 (1970). V. Rubin et al., *Astrophys. J.* **289**, 81 (1985).
- [8] F. Zwicky, *Morphological Astronomy* (1957).
- [9] R. G. Calberg et al., *Astrop. J.* **462**, 32 (1996).
- [10] A. Dekel et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **316**, 479 (2000).
- [11] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [12] T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* **380**, 235 (2003).
- [13] E. J. Copeland et al, hep-th/0603057.
- [14] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [15] M. Tegmark et al, *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004).
- [16] R. Shutzhold, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 081302 (2002); *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 4359 (2002).
- [17] S. M. Carroll, *Living Rev. Relativity* **4** (2001).
- [18] H. A. Borges and S. Carneiro, *Gen. Rel. Grav.* **37**, 1385 (2005).

- [19] S. Carneiro, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 2241-2247 (2006).
- [20] M. Birkel, S. Sarkar, *Astropart. Phys.* **6**, 197-204 (1997).
- [21] M. Rowan-Robinson, *The Cosmological Distance Ladder: Distance and Time in the Universe* (1985).
- [22] K. S. O. Filho & M. F. O. Saraiva, *Astronomia e Astrofísica* (2000).
- [23] W. H. Press et al., *Numerical Recipes in Fortran 77* (1997).
- [24] A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [25] A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [26] P. Astier et al., *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006).
- [27] A. G. Riess et al., arXiv:astro-ph/0611572v2.
- [28] G. Miknaitis et al., *Astrophys.J.* **666**, 674 (2007).
- [29] S. Dodelson, Jay M. Jubas, *Phys.Rev.Lett.* **70**, 2224-2227 (1993).
- [30] J. R. Primack, *SLAC Beam Line* **22N4**, 1 (1992).
- [31] J. C. Mather et al., *Astrophys. J.* **354**, L37-L40 (1990).
- [32] J. C. Mather et al., *Astrophys. J.* **512**, 511-520 (1999).
- [33] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (1993).
- [34] G. B. Rybicki & A. P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics* (1985).
- [35] W. Hu & N. Sugiyama, *Astrophys.J.* **471**, 542-570 (1996).
- [36] O. Elgaroy & T. Multamaki, arXiv:astro-ph/0702343v1.
- [37] G. Hinshaw et al., *Astrophys.J.Suppl.* **170**, 288 (2007).
- [38] D. N. Spergel et al., *Astrophys.J.Suppl.* **170**, 377 (2007).
- [39] G. Sethi et al., *Int.J.Mod.Phys.D* **15**, 1089-1098 (2006).
- [40] D. J. Eisenstein et al., *Astrophys.J.* **633**, 560-574 (2005).
- [41] C. Alcock & B. Paczynski, *Nature* **281**, 358-359 (1979).
- [42] H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris and C. Pigozzo, *Physical Review D* **77**, 043513 (2008).

- [43] S. Carneiro, *J. Phys.* **40**, 6841-6848 (2007).
- [44] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).